

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIA

Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación

CÁLCULO
Tomo III

Cálculo en una Variable
Series

Gladys Bobadilla A. y Rafael Labarca B.

Santiago de Chile
Marzo 2010

Prefacio

El cero es el silencio antes del número
El número es el verbo matemático
Lo matemático es el cálculo de la realidad
La realidad es lo único increíble
Lo increíble es lo que no podemos
Y lo que no podemos es lo que queremos.
Patricio Manns.

Este texto es producto - en elaboración aún - del proyecto de desarrollo de la docencia **Texto de cálculo anual para ingeniería civil**, financiado por la Vicerrectoría de Docencia y Extensión de la Universidad de Santiago de Chile.

Gran parte de los contenidos de los capítulos 1 y 2 están sacados del antiguo texto de Cálculo I escrito por Gladys Bobadilla y Jorge Billeke (Q.E.P.D.).

La idea motriz de los autores para emprender esta tarea es el profundo convencimiento que ésta es una forma de contribuir a una cultura nacional independiente.

Aunque los temas tratados - generados en Europa entre los siglos 17 y 19 - forman parte del patrimonio universal y existe una amplia y variada literatura, no es una razón suficiente para que la universidad renuncie a crear su propio material docente. Esta labor es tan importante como la creación de nuevos conocimientos y necesita, como esta última, de una tradición para la cual se debe recorrer un largo camino de errores y rectificaciones.

Además, queremos compartir con los jóvenes estudiantes que usarán este libro, la reflexión del filósofo Gastón Bachelard (1884 - 1962) sobre lo que significa enfrentarse al conocimiento científico: "Frente al misterio de lo real el alma no puede, por decreto, tornarse ingenua. Es entonces imposible hacer, de golpe, tabla rasa de los conocimientos usuales. Frente a lo real, lo que cree saberse claramente ofusca lo que debiera saberse. Cuando se presenta ante la cultura científica, el espíritu jamás es joven. Hasta es muy

II

viejo, pues tiene la edad de sus prejuicios. Tener acceso a la ciencia es rejuvenecerse espiritualmente, es aceptar una mutación brusca que ha de contradecir a un pasado.”¹

Agradecemos los valiosos comentarios de la Dra. Cecilia Yarur, la profesora Graciela Escalona y el señor Luis Riquelme que nos ayudaron a mejorar la presentación de este texto. Agradecemos además, el apoyo técnico en la escritura digital, de la señorita Evelyn Aguilar y el señor Leonelo Iturriaga.

Finalmente, siendo ésta una versión preliminar, agradeceremos a quienes detecten errores nos lo hagan saber.

Gladys Bobadilla A y Rafael Labarca B.
Santiago, marzo de 2002.

¹Gastón Bachelard: La formación del espíritu científico. Ed. Siglo XXI, 1997.

Agradecimientos

Esta versión del texto ha sido financiada por la Vicerrectoría de Docencia y Extensión de la Universidad de Santiago de Chile, a través del proyecto de desarrollo docente 2006-2007, **Versión final del texto guía de cálculo para ingeniería civil y ciencias.**

Índice general

I	TOMO I	1
1.	Los números reales	3
1.1.	La aritmética de los números reales: axiomas de cuerpo	3
1.2.	Comparación de los números reales: axiomas de orden	11
1.2.1.	Los axiomas de orden	11
1.2.2.	Resolución de ecuaciones de grado mayor que uno	16
1.2.3.	Desigualdades e inecuaciones	19
1.3.	Una distancia en $\mathbb{R}$: el valor absoluto	34
1.4.	La continuidad de $\mathbb{R}$: el Axioma del Supremo	45
2.	Límites y continuidad	65
2.1.	Límites de funciones numéricas de variable discreta.	65
2.1.1.	Las variables discretas y el conjunto $\mathbb{N}$	65
2.1.2.	Sucesiones monótonas no acotadas	69
2.1.3.	Sucesiones monótonas acotadas	71
2.1.4.	Sucesiones convergentes no monótonas	75
2.2.	Límites de referencia	88
2.2.1.	Ejercicios resueltos	89
2.2.2.	Ejercicios propuestos	107
2.3.	Las funciones numéricas de variable continua	111
2.3.1.	Definiciones básicas	111
2.3.2.	Representación gráfica de funciones	118
2.3.3.	Ejercicios resueltos	120
2.3.4.	Ejercicios propuestos	136
2.4.	Límites de funciones numéricas de variable continua	140
2.4.1.	Límites infinitos cuando $ x $ crece indefinidamente	140
2.4.2.	Límites infinitos en una vecindad de un punto	143
2.4.3.	Límites finitos cuando $ x $ crece indefinidamente	147
2.4.4.	Límites finitos en un punto x_0	151

2.4.5.	Ejercicios resueltos	161
2.4.6.	Ejercicios propuestos	174
2.5.	Funciones continuas	177
2.5.1.	Definiciones básicas	177
2.5.2.	Continuidad de funciones elementales	180
2.5.3.	Discontinuidades removibles	181
2.5.4.	Propiedades de las funciones continuas	181
2.5.5.	Ejercicios resueltos	185
2.5.6.	Ejercicios propuestos	198
3.	Funciones Trascendentes	203
3.1.	Introducción	203
3.2.	Las funciones circulares o trigonométricas	204
3.2.1.	Definición de las funciones circulares o trigonométricas	206
3.2.2.	Propiedades básicas de seno y coseno	207
3.2.3.	Cálculo de los valores más usuales de las funciones seno y coseno	209
3.2.4.	Ceros y signo de las funciones seno y coseno	212
3.2.5.	Las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante	213
3.2.6.	Ejercicios resueltos	220
3.2.7.	Ejercicios propuestos	227
3.2.8.	Ejercicios resueltos	232
3.3.	Límites y continuidad de las funciones trigonométricas	252
3.3.1.	Límites de referencia de las funciones circulares	252
3.3.2.	Ejercicios resueltos	257
3.3.3.	Ejercicios propuestos	262
3.3.4.	Continuidad de las funciones circulares	262
3.3.5.	Las inversas de las funciones circulares	263
3.3.6.	Problemas resueltos	264
3.3.7.	Problemas propuestos	265
3.4.	Función Exponencial y Logaritmo	266
3.4.1.	Potencias de exponente entero	266
3.4.2.	Potencias de exponente racional	267
3.4.3.	Propiedades de las potencias de exponente racional	268
3.4.4.	Los números irracionales	269
3.4.5.	La función exponencial	270
3.4.6.	Ejercicios propuestos	280
3.4.7.	Función Logaritmo	280
3.4.8.	Relación entre las diferentes funciones exponenciales	282
3.5.	Ejercicios resueltos	282
3.6.	Las funciones hiperbólicas	284

3.7. Las funciones hiperbólicas inversas	287
--	-----

II TOMO II 293

4. La derivada y sus aplicaciones 295

4.1. Introducción	295
4.2. Definición y fórmulas básicas de la derivada	298
4.2.1. Definiciones básicas	298
4.2.2. Fórmulas elementales	304
4.2.3. Las derivadas de las funciones trigonométricas	309
4.2.4. Las derivadas de orden superior	310
4.2.5. Ejercicios resueltos	311
4.2.6. Ejercicios propuestos	318
4.3. Propiedades de las funciones derivables	322
4.3.1. Teoremas principales	322
4.3.2. Derivadas de las inversas de las funciones trigonométricas	334
4.3.3. Ejercicios resueltos	338
4.3.4. Ejercicios propuestos	343
4.4. Aplicaciones I: La regla de L'Hôpital	347
4.5. Aplicaciones II: Gráficos de funciones	360
4.6. Aplicaciones III: Análisis de curvas en el plano	380
4.6.1. Elementos de Geometría Analítica	380
4.6.2. Análisis de curvas en coordenadas rectangulares	430
4.6.3. Análisis de curvas dadas por ecuaciones paramétricas	438
4.6.4. Curvas expresadas en coordenadas polares	450
4.7. Aplicaciones IV: problemas de máximo y mínimo	464
4.8. Aplicaciones V: Razón de cambio y diferenciales	482
4.8.1. Razones de cambio	482
4.8.2. Diferenciales	484
4.9. Aplicaciones VI: Física del movimiento	489

5. La integral indefinida: cálculo de primitivas 501

5.1. La integral indefinida y sus propiedades	501
5.1.1. La integral indefinida	501
5.1.2. Fórmulas básicas de integración	503
5.1.3. Propiedades elementales de la integral indefinida	505
5.1.4. Ejercicios propuestos	512
5.2. Fórmulas de reducción	513
5.2.1. Ejercicios propuestos	519

5.3.	Integración de funciones racionales	520
5.3.1.	Descomposición de un polinomio en factores	520
5.3.2.	Descomposición de una función racional en fracciones simples	521
5.3.3.	Integración de funciones racionales	524
5.4.	Integración de ciertas funciones trascendentes.	532
5.4.1.	Integración de funciones	532
5.4.2.	Integración de funciones trigonométricas inversas.	542
5.4.3.	Integración de funciones hiperbólicas, exponenciales y logarítmicas. .	543
5.4.4.	Ejercicios propuestos	550
5.5.	Integración de algunas funciones algebraicas	552
5.5.1.	Integración de funciones irracionales simples	552
5.5.2.	Integración de $f(x) = x^p(ax^n + b)^q$ $p, q, n \in \mathbb{Q}$	554
5.5.3.	Integración de funciones racionales de x y $\sqrt{ax^2 + bx + c}$	557
5.5.4.	Ejercicios propuestos	561
6.	Integral de Riemann	563
6.1.	Introducción	563
6.2.	Sumas de Riemann y el concepto de integral	569
6.2.1.	Cálculo de integrales mediante sumas de Riemann particulares . . .	578
6.3.	Propiedades de la Integral de Riemann	602
6.4.	Teorema Fundamental de Cálculo	619
7.	Aplicaciones de la integral	629
7.1.	Cálculo de áreas	629
7.1.1.	Cálculo de áreas en coordenadas rectangulares	629
7.1.2.	Cálculo de áreas en coordenadas polares	631
7.1.3.	Cálculo de áreas usando ecuaciones paramétricas	636
7.2.	Cálculo de longitudes de curvas	656
7.2.1.	Cálculo de longitudes de curvas en coordenadas rectangulares	656
7.2.2.	Cálculo de longitudes de curvas dadas por ecuaciones paramétricas .	658
7.2.3.	Cálculo de longitudes de curvas en coordenadas polares	660
7.3.	Volúmenes y áreas de superficies de sólidos de revolución	668
7.3.1.	Método de los discos	668
7.3.2.	Método de las cortezas o cilindros	669
7.3.3.	Áreas de superficies de revolución	673
7.4.	Integrales elípticas e integración numérica	683
7.4.1.	Integrales elípticas	683
7.4.2.	Dos métodos numéricos de integración	686

III TOMO III 697

8. Integrales impropias y series 699

8.1. Integrales impropias	699
8.1.1. Integrales impropias de primera clase	699
8.1.2. Propiedades de las integrales impropias de primera clase	702
8.1.3. Integrales impropias de segunda clase	707
8.1.4. Convergencia absoluta	713
8.1.5. Otros criterios	714
8.1.6. La función Gama	716
8.1.7. La función Beta	717
8.2. Series Numéricas	740
8.2.1. Conceptos generales	740
8.2.2. Series de términos positivos	742
8.2.3. Series de términos alternados: criterio de Leibniz	748
8.2.4. Convergencia absoluta y condicional de series	750
8.2.5. Multiplicación de series de términos positivos	753
8.2.6. Multiplicación de series en general	755
8.2.7. Criterios más específicos	759
8.3. Series de potencias	775
8.3.1. Series de Funciones	775
8.3.2. Propiedades de las series uniformemente convergentes	779
8.3.3. Series de potencias	781
8.4. Teorema de Taylor	800
8.4.1. Cálculo de polinomios y series de Taylor para funciones elementales	803

9. Series de Fourier 821

9.1. Introducción	821
9.2. Preliminares	823
9.2.1. Funciones pares e impares	823
9.2.2. Funciones periódicas	826
9.2.3. Funciones continuas y derivables a tramos	828
9.2.4. Fórmulas trigonométricas	830
9.2.5. Funciones ortogonales y la serie de Fourier	831
9.2.6. La serie de Fourier como la mejor aproximación en media cuadrática	833
9.3. Series de Fourier para funciones periódicas	834
9.4. Desigualdad de Bessel	838
9.5. Fórmula de Dirichlet	840
9.6. Un resultado de convergencia	844

9.7.	Series de Fourier de senos y cosenos	855
9.7.1.	Fórmula de Parseval	857
9.7.2.	Integración de series de Fourier	857
9.7.3.	Derivación de series de Fourier	861
9.7.4.	Serie de Fourier de funciones periódicas de período cualquiera	863
9.8.	Series de Fourier de funciones a valores complejos	866
9.8.1.		866
9.8.2.	La serie de Fourier compleja	869
9.8.3.	Ejercicios resueltos	873
9.8.4.	Serie de Fourier de un producto de funciones	874

Índice de figuras

1.1. Valor absoluto	35
2.1. Interpretación geométrica del límite	75
2.2. Sistema de coordenadas rectangulares	118
2.3. Gráfico de $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$	118
2.4. Gráfico de $f(x) = x^2 - 1$	119
2.5. Gráfico de $f(x) = x - [x]$	119
2.6. Gráfico de f y su inversa f^{-1}	120
2.7. Gráfico de g	125
2.8. Gráficos de $y = x$, $y = x^2$ y $y = \sqrt{x}$	127
2.9. Gráfico de la función $f(x) = \frac{x}{[x]}$	129
2.10. Una rama de la cisoide	132
2.11. Una rama de la estrofoide	133
2.12. Gráfico de f invertible	139
2.13.	141
2.14. Vecindad de x_0	143
2.15. Límites infinitos en una vecindad de x_0	144
2.16. Comportamiento de algunas funciones cerca de puntos singulares.	146
2.17.	146
2.18. Gráfico de $h(x) = -\frac{1}{x-2}$	147
2.19. Gráfico de $f(x) = 4x^3 - 3x + 1$	149
2.20. Límites cuando $x \rightarrow \pm\infty$ de $\frac{1}{x}$	151
2.21. Asíntota horizontal de $f(x) = \frac{3x+1}{x}$	151
2.22. Existencia del límite sin que la función esté definida en el punto	155
2.23. Interpretación geométrica del límite	156
2.24. Gráfico de $y = x^2 + x - 6$	167

2.25. Gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 6}$	168
2.26. Gráfico de $g(x) = x^2 + \frac{1}{x^2 + x - 6}$	169
2.27. Gráfico de $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^3 - x}$	170
2.28. Gráfico de $g(x) = \frac{\sqrt{2x - 3}}{x^2}$	171
2.29. Gráfico de $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 1}$	173
2.30. Gráfico de $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{2x + 1}$	174
2.31. Interpretación geométrica de la continuidad	179
2.32. Casos de discontinuidades removibles	181
2.33. Teorema de Bolzano - Weierstrass	182
2.34. Teorema de Weierstrass	183
2.35. Continuidad de la inversa	185
2.36.	187
2.37.	188
2.38.	189
2.39.	191
2.40. La función f no puede ser continua	196
2.41. La función f no puede ser continua	197
3.1. Distancia entre dos puntos	204
3.2. Circunferencia unitaria	205
3.3. Dos sentidos en la medida de un ángulo	206
3.4. Representación del seno y coseno en el círculo unitario	207
3.5. Relaciones de paridad en las funciones trigonométricas	209
3.6. Hexágono regular	210
3.7. Octágono regular	210
3.8. Dodecágono regular	211
3.9. La función $y = \operatorname{sen} x$	212
3.10. La función $y = \operatorname{cos} x$	213
3.11. La función $y = \operatorname{tan} x$	214
3.12. La función $y = \operatorname{cotan} x$	215
3.13. La función $y = \operatorname{sec} x$	216
3.14. La función $y = \operatorname{cosec} x$	217
3.15. Interpretación geométrica	217
3.16. Diagrama de Cauchy	218
3.17. Función sinusoidal $f(x) = A \operatorname{sen}(\omega x + \varphi)$	235

3.18.	236
3.19. Efecto del coeficiente ω en la función $\sin(\omega x)$	237
3.20. Efecto del coeficiente α en la función $\alpha \sin x$	238
3.21. Efecto de la traslación en $\pm\pi$ de la variable independiente en la función $\sin x$	238
3.22.	241
3.23.	243
3.24. Triángulo	247
3.25. Distancia a un punto inaccesible	248
3.26. Distancia entre dos puntos inaccesibles	249
3.27. Torre de pie accesible	250
3.28. Torre de pie inaccesible	250
3.29. Altura de una montaña	251
3.30.	253
3.31. $y = \frac{\sin x}{x}$. Observar que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$	254
3.32. Gráfico de $f(x) = \sin \frac{1}{x}$	256
3.33. $y = \tan x$	257
3.34. Gráfico de $f(x) = \sin \frac{1}{x}$	258
3.35. Gráfico de $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$	259
3.36. Gráfico de $h(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$	259
3.37. La función $\sin x$ y su inversa	263
3.38. $y = \sin(x)$	264
3.39. $y = \text{signo}(\sin x)$	264
3.40. Gráfico de a^x	273
3.41. Gráfico de $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	277
3.42. Gráfico de 2^x y 2^{-x}	279
3.43. Gráfico de $\log_a(x)$	281
3.44. Funciones hiperbólicas	287
3.45. Funciones hiperbólicas inversas	289
4.1. Interpretación geométrica de la derivada	300
4.2. Recta tangente	301
4.3. Recta normal	302
4.4.	323
4.5. Teorema de Rolle	324
4.6. Interpretación geométrica del teorema del valor medio	325
4.7. Función con derivada positiva	326

4.8. Mínimo de una función	327
4.9. Significado geométrico del signo de la derivada	328
4.10. Funciones convexas (a) y funciones cóncavas (b)	329
4.11. Puntos de inflexión	332
4.12. Gráfico de $f(x) = \arcsen x$	335
4.13. Gráfico de $f(x) = \arccos x$	336
4.14. Gráfico de $f(x) = \arctan x$	336
4.15. Gráfico de $f(x) = \operatorname{arccotan} x$	337
4.16. Gráfico de $f(x) = \operatorname{arcsec} x$	338
4.17. Gráfico de $f(x) = \operatorname{arccosec} x$	338
4.18. Gráfico de $\sqrt{4-x^2}$	361
4.19. Gráfico de $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$	362
4.20. Crecimiento de la curva	362
4.21. Concavidad de la curva	363
4.22. Gráfico de $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$	363
4.23. Gráfico de $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$	364
4.24. Crecimiento de la función	368
4.25. Concavidad de la función	369
4.26. Gráfico de $\frac{x^3}{x^2-x-2}$	370
4.27. Crecimiento de la función	371
4.28. Gráfico de $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}$	372
4.29. Crecimiento de la función	372
4.30. Gráfico de $f(x) = 2 \operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x + 3$	373
4.31. Crecimiento de la función	374
4.32. Gráfico de $f(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}^3 \frac{x}{2}} + \frac{1}{\cos^3 \frac{x}{2}}$	375
4.33. Distancia entre dos puntos	381
4.34. Razón Dada	381
4.35. Recta que pasa por el origen	383
4.36. Recta que no pasa por el origen	383
4.37. Recta	384
4.38. Ángulo formado por dos rectas	385
4.39. Recta que pasa por dos puntos	385
4.40. Circunferencias	387
4.41. Elipse	388
4.42. Elipses	390

4.43. Hipérbola	391
4.44. Hipérbolas Conjugadas	392
4.45. Parábola	394
4.46. $y^2 = 13x$	395
4.47. $y^2 = -13x$	395
4.48. $x^2 = 13y$	396
4.49. $x^2 = -13y$	396
4.50. Traslación de ejes	399
4.51. Rotación de ejes	402
4.52. Cisoide	408
4.53. Lemniscata de Bernoulli	410
4.54.	411
4.55.	412
4.56. Distancia desde un punto a una recta	412
4.57. Simetrales de un triángulo	414
4.58.	416
4.59.	417
4.60.	418
4.61.	419
4.62. Reflejo de la luz en la parábola	426
4.63.	432
4.64.	438
4.65.	438
4.66. Coordenadas polares de un punto en el plano	440
4.67. Lemniscata de Geronio	446
4.68. Astroide	448
4.69. Elipse	449
4.70. Cicloide	449
4.71. Coordenadas polares de un punto en el plano	450
4.72.	454
4.73.	457
4.74.	458
4.75.	458
4.76.	459
4.77.	459
4.78.	460
4.79.	460
4.80.	460
4.81.	461
4.82.	461

4.83.	462
4.84.	462
4.85.	464
4.86.	467
4.87.	468
4.88.	470
4.89.	471
4.90.	472
4.91.	474
4.92.	475
4.93.	476
4.94.	477
4.95.	479
4.96.	479
4.97. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$	486
6.1. Partición del intervalo	569
7.1. Bifolio recto, $a = 1$	636
7.2. Lemniscata de Geronio	638
7.3. Circunferencia de radio r	639
7.4. Gráfico de una elipse	641
7.5. Área comprendida entre $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$, $y = e^{- x }$	642
7.6. Gráfico del área comprendida entre $y = \sin x $, el eje X , con $x \in [0, 4\pi]$	642
7.7. Gráfico del área comprendida entre seno y coseno entre 0 y π	643
7.8. Gráfico del área comprendida entre $y = \sin x$ y $y = \cos x $, con x entre 0 y π	644
7.9. Gráfico del área comprendida entre $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$, y las rectas $x = -1$ y $x = 3$	645
7.10. Gráfico del área encerrada entre el eje X e $y = x^3 - 6x^2 + 8x$	646
7.11. Gráfico del área acotada por las curvas $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$	648
7.12. Gráfico del área entre $y = \cosh x$ e $y = 2$	649
7.13. Astroide	650
7.14. Cicloide, $a = 1$	654
7.15. Deltoide	655
7.16. Gráfico de Datos	687
7.17. Regla de Simpson	688
7.18. Gráfico de $ f^{IV}(\theta) $	692
9.1.	825

9.2. Extensión periódica a la recta real de $f(x) = \cosh x$ definido en el intervalo $[-2, 2]$.	827
9.3. Una función continua a tramos	828
9.4.	830
9.5. La función signo	836
9.6. Los cuatro primeros armónicos de $f(x) = 1$	840
9.7. Onda parabólica	850
9.8. $f(x) = x \cos x$	851
9.9. Función exponencial en $] - \pi, \pi]$	854
9.10. Extensiones periódicas	864

Parte III

TOMO III

Capítulo 8

Integrales impropias y series

8.1. Integrales impropias

La definición de integral de Riemann necesita dos hipótesis mínimas que son que la función sea acotada y que esté definida en un intervalo cerrado y acotado. Cuando al menos una de estas condiciones no se cumple debemos usar otros recursos para darle sentido a las integrales. Hablaremos de **integrales impropias** cuando la función no es acotada en el intervalo de integración o cuando el intervalo de integración no es acotado, es decir tiene una de las formas siguientes : $] - \infty, a]$; $[a, +\infty[$; $] - \infty, +\infty[$.

8.1.1. Integrales impropias de primera clase

Estas corresponden al caso en que la integración se realiza sobre un intervalo no acotado. Integrales impropias sobre intervalos no acotados o de primera clase

Definición 8.1.1 1. Si la función $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable en $[a, c]$, para todo $c \in [a, +\infty[$, entonces definimos:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x)dx,$$

cuando este límite existe.

2. Si la función $f :] - \infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable en $[c, a]$ para todo $c \in] - \infty, a]$, entonces definimos :

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^a f(x)dx,$$

cuando este límite existe.

3. Si la función $f :]-\infty, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ es tal que para algún $a \in \mathbb{R}$ existen las dos integrales impropias $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ y $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, entonces definimos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Esta integral también puede denotarse como $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx$.

Observación 8.1.2 Es importante notar que la definición de integral impropia sobre todo $\mathbb{R}$ no depende del punto a elegido. Para ver esto elijamos otro punto b y supongamos -para fijar las ideas- que $b \leq a$. Entonces,

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \int_{-\infty}^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx$$

Así, $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ existe, y por lo tanto, la integral $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ también existe.

Observación 8.1.3 Si existe el límite $\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx$, diremos que la integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ es convergente. De manera análoga, si existe $\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_c^a f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx$, diremos que la integral $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ es convergente.

Cuando los límites que definen las integrales impropias de la definición 8.1.1, no existen diremos que las integrales divergen.

Ejemplo 8.1.4 Sea $f : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Analicemos la existencia de la integral de f sobre su dominio.

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} x^{-2}dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c \frac{dx}{x^2} = \lim_{c \rightarrow +\infty} \left. -\frac{1}{x} \right|_1^c = \lim_{c \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{c} + 1 \right) = 1.$$

Ejemplo 8.1.5 Analicemos la convergencia de la integral $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x}dx &= \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_0^c e^{-x}dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \left(-e^{-x} \Big|_0^c \right) \\ &= \lim_{c \rightarrow +\infty} [1 - e^{-c}] = 1. \end{aligned}$$

Ejemplo de referencia El siguiente ejemplo generaliza el ejemplo 8.1.4 y constituye una de las bases para usar los criterios de convergencia.

Ejemplo 8.1.6 Si $a > 0$ y $p \in \mathbb{R}$, entonces la integral impropia de primera clase

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \frac{a^{1-p}}{p-1} & \text{si } p > 1 \\ +\infty & \text{si } p \leq 1. \end{cases}$$

En efecto,

- Si $p = 1$.

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} (\ln c - \ln a) = +\infty.$$

- Si $p \neq 1$.

$$\int_a^c \frac{1}{x^p} dx = \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_a^c = \frac{c^{1-p}}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p}.$$

Entonces,

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \left[\frac{c^{1-p}}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p} \right] = \frac{a^{1-p}}{p-1} + \frac{1}{1-p} \lim_{c \rightarrow +\infty} c^{1-p}. \quad (8.1)$$

El último límite de la ecuación 8.1 tiene distinto valor según p sea mayor o menor que 1.

- Si $p > 1$: en este caso $1-p < 0$, así

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} c^{1-p} = \lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{1}{c^{p-1}} = 0.$$

- Si $p < 1$: entonces, $1-p > 0$, así

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} c^{1-p} = +\infty.$$

Ejemplo 8.1.7 Casos particulares del ejemplo 8.1.6 son:

- $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{2^{1-3}}{3-1} = \frac{1}{8}.$
- $\int_{1/2}^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{(1/2)^{1-3}}{3-1} = 2.$
- $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = +\infty.$

8.1.2. Propiedades de las integrales impropias de primera clase

Las propiedades básicas de la integral Riemann se extienden, mediante procesos de pasar al límite, a las integrales impropias. Por ejemplo:

1. **Linealidad:** Si f y g son integrables en $[a, c]$ para todo $c \in \mathbb{R}$, $c \geq a$ y si sus respectivas integrales impropias sobre $[a, +\infty[$ son convergentes, entonces también existe- es decir- es convergente la integral impropia de $\lambda f + \mu g$ sobre $[a, +\infty[$ cualesquieran sean los números reales λ y μ y se cumple la igualdad:

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f + \mu g)(x) dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x) dx + \mu \int_a^{+\infty} g(x) dx.$$

2. **Regla de Barrow** Si $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, +\infty[$ y si $F : [a, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ es una primitiva de f en $[a, c]$ para todo $c \in \mathbb{R}$, $c \geq a$ y si la integral de f sobre $[a, +\infty[$ existe, se cumple que:

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} f(x) dx &= \lim_{c \rightarrow +\infty} (F(c) - F(a)) \\ &= F(x) \Big|_a^{+\infty} \end{aligned}$$

3. **Cambio de Variable:**

Si $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, +\infty[$ y si $\varphi : [\alpha, \beta[\rightarrow \mathbb{R}$ es una función con derivada continua en $[\alpha, \beta[$; Donde $-\infty < \alpha < \beta \leq +\infty$; y si además $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(t) \rightarrow b^-$, cuando $t \rightarrow \beta^-$ y si $\varphi([\alpha, \beta]) = [a, +\infty[$, entonces:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta^-} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Si una de las integrales es convergente (divergente), la otra también lo es.

4. **Integración por Partes:** Si f, g son dos funciones con derivadas continuas en $[a, +\infty[$ y son convergentes dos de los tres términos siguientes, entonces:

$$\int_a^{+\infty} f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} f'(x) g(x) dx$$

Observación 8.1.8 Todas las propiedades anteriores son válidas para integrales sobre intervalos del tipo $] -\infty, a]$

Criterios de convergencia para integrales de primera clase

Los criterios de convergencia están enunciados para integrales impropias sobre intervalos de la forma $[a, +\infty[$, pero todos ellos valen de la misma forma para intervalos del tipo $] -\infty, a]$.

Criterio de Comparación: Sean $f(x), g(x)$ funciones continuas, positivas y tales que $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \geq a$. Entonces se tiene que:

- Si $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge, entonces $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge.
- Si $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ diverge, entonces $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge.

Demostración: Observemos que si $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ es creciente y acotada superiormente, entonces $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ existe. Definamos las funciones F y G mediante las ecuaciones:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$G(x) = \int_a^x g(t)dt.$$

Ambas funciones son crecientes, si $x_1 < x_2$ entonces $F(x_1) = \int_a^{x_1} f(t)dt < F(x_2) = \int_a^{x_2} f(t)dt = \int_a^{x_1} f(t)dt + \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt = F(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$.

Como $f(x) \geq 0$ la integral $\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$ es positiva y, por lo tanto, $F(x_1) < F(x_2)$.

Del mismo modo se prueba que G es creciente.

Recordemos ahora, que por definición:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(u)du = \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x g(u)du = \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

Entonces, por hipótesis, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ existe y como además $F(x) \geq G(x)$, la función G es creciente y acotada superiormente. Por lo cual, $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$ existe. Esto es equivalente a tener la convergencia de la integral impropia de g . $\square$

Ejemplo 8.1.9 En los ejemplos que veremos a continuación usaremos como integral de referencia la vista en el ejemplo 8.1.4, que es una integral convergente.

a) La integral: $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ es converge. En efecto,

$$x^2 \geq 0, \text{ Por tanto, } 0 \leq x^2 \leq 1+x^2 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2} \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \leq \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1.$$

b) La integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^2} dx$$

es convergente. Usando el criterio de comparación, tenemos:

$$|\operatorname{sen} x| \leq 1 \Rightarrow \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^2} dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx.$$

Como $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ es convergente, la integral dada inicialmente también converge.

c) **Un ejemplo de divergencia por comparación**

La integral $I = \int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2+1} dx$ diverge.

$$x \leq 1 \text{ implica } x^2 + 1 \leq x^2 + x \quad \text{por lo tanto, } \frac{1}{x^2+x} \leq \frac{1}{x^2+1}.$$

multiplicando la desigualdad por x que es positivo, obtenemos

$$\frac{x}{x^2+x} \leq \frac{x}{x^2+1} \quad \text{lo que implica que, } \frac{1}{x+1} \leq \frac{x}{x^2+1}.$$

La integral de $\frac{1}{x+1}$ diverge, por comparación también diverge I .

Criterio de comparación al límite

Teorema 8.1.10 Sean $f(x), g(x)$ funciones continuas, positivas. Entonces, para $x \geq a$ tenemos que :

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K; K \neq 0$, entonces ambas integrales impropias sobre $[a, +\infty[$

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad , \quad \int_a^{+\infty} g(x) dx$$

convergen o ambas divergen.

- Si $K = 0$, entonces la convergencia de $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ implica la convergencia de $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.
- Si $K = +\infty$, entonces la divergencia de $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ implica la divergencia de $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

Ejemplo 8.1.11 Si $n \in \mathbb{N}$, $\int_1^{+\infty} e^{-x} x^n dx$ converge.

En efecto, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge y

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} x^n}{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} x^n \cdot x^2) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} x^{n+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{n+2}}{e^x}. \end{aligned}$$

Este último límite, si es evaluado en forma directa, da lugar a una forma indeterminada del tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$, por lo cual aplicamos L'Hôpital, y obtenemos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{n+2}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)x^{n+1}}{e^x}.$$

Que vuelve a dar lugar a una forma indeterminada del tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$, por tanto, si aplicamos sucesivamente L'Hôpital, obtenemos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{n+2}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)(n+1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{e^x} = 0$$

Así, la convergencia de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ implica la convergencia de $\int_1^{+\infty} e^{-x} x^n dx$.

Ejemplo 8.1.12 Si $p, q > 0$ la convergencia de la integral

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^q} dx,$$

se puede estudiar usando comparación al límite con la función $\frac{1}{x^{q-p}}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^p}{1+x^q} : \frac{1}{x^{q-p}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^q}{1+x^q} = 1.$$

Entonces, como $k = 1$, ambas integrales convergen o ambas divergen. Luego, como sabemos que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{q-p}}$ converge si $q - p > 1$ y diverge si $q - p \leq 1$, tenemos que:

- I converge cuando $q - p > 1$.
- I diverge cuando $q - p \leq 1$.

Ejemplo 8.1.13 Ahora haremos una aplicación del ejemplo anterior.

- a) La integral $I = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx$ diverge como consecuencia del ejemplo anterior, ya que: $p = \frac{1}{2}$ y $q = \frac{1}{3}$ implican que $q - p = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} < 1$.
- b) En cambio la integral $J = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$ converge. En este caso $p = \frac{1}{2}$ y $q = 2$ implican que $q - p = \frac{3}{2} > 1$.

Ejemplo 8.1.14 Ejemplo de aplicación del teorema 8.1.10 cuando $K = 0$

- a) La convergencia de $I = \int_1^{+\infty} \exp(-x^2) dx$ puede obtenerse por comparación al límite con $g(x) = \frac{1}{x^2}$. En efecto.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{e^{x^2}} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

En este caso $K = 0$ y la función con la cual comparamos tiene integral impropia convergente, por tanto la integral I es convergente.

- b) Para ilustrar que en el caso de $K = 0$ la divergencia de g no implica la divergencia de la integral de f , nos inspiraremos en el ejemplo anterior.

Sea $I = \int_1^{+\infty} \exp(-x^2) dx$ y aplicaremos el teorema 8.1.10 con $g(x) = \frac{1}{x}$, cuya integral sobre $[1, +\infty[$ diverge.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{e^{x^2}} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Pero, como ya sabemos, la integral de f converge y la de g diverge.

Ejemplo de aplicación del teorema 8.1.10 cuando $K = +\infty$

- a) La divergencia de $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ puede obtenerse por comparación al límite con $g(x) = \frac{1}{x}$. En efecto.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{\sqrt{x}} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

En este caso $K = +\infty$ y la función con la cual comparamos tiene integral impropia divergente, por tanto la integral I es divergente.

- b) Para ilustrar que en el caso de $K = +\infty$ la convergencia de g no implica la convergencia de la integral de f , nos inspiraremos en el ejemplo anterior.

Sea $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ y aplicaremos el teorema 8.1.10 con $g(x) = \frac{1}{x^2}$, cuya integral sobre $[1, +\infty[$ converge.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = x \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

Pero, como ya sabemos, la integral de f diverge y la de g converge.

8.1.3. Integrales impropias de segunda clase

Estas integrales impropias corresponden al caso en que la función no es acotada en el intervalo de integración.

Definición 8.1.15 1. Si $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que, para todo $c \in]a, b[$, f es integrable en $[c, b]$, entonces se define

$$\int_{a^+}^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx,$$

cuando este límite existe.

2. Si $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que, para todo $c \in]a, b[$, f es integrable en $[a, c]$, entonces se define

$$\int_a^{b^-} f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx,$$

cuando este límite existe.

Ejemplo 8.1.16 La función $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, no está definida para $x = 0$. Calculamos la integral impropia:

$$\begin{aligned}\int_{0+}^1 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx &= \lim_{c \rightarrow 0+} \int_c^1 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \lim_{c \rightarrow 0+} \sqrt{x} \Big|_c^1 \\ &= \lim_{c \rightarrow 0+} (\sqrt{1} - \sqrt{c}) = 1\end{aligned}$$

Definición 8.1.17 Si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ es una función tal que, para todo $c_1 < c_2 \in]a, b[$, f es integrable en $[c_1, c_2[$ entonces se define

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c_1 \rightarrow a} \int_{c_1}^{x_0} f(x) dx + \lim_{c_2 \rightarrow b} \int_{x_0}^{c_2} f(x) dx,$$

para cualquier $x_0 \in]a, b[$, si los límites existen.

Ejemplo 8.1.18 1. Sea $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

Esta función no es acotada en el intervalo $[-1, 1]$, debido a que entorno a cero tiende a $\mp\infty$. Usaremos la definición 8.1.17.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x) dx &= \lim_{c \rightarrow 0-} \int_{-1}^c \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx + \lim_{c \rightarrow 0+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \\ &= \lim_{c \rightarrow 0-} \frac{3}{2} x^{2/3} \Big|_{-1}^c + \lim_{c \rightarrow 0+} \frac{3}{2} x^{2/3} \Big|_c^1 \\ &= \lim_{c \rightarrow 0-} \frac{3}{2} (c^{2/3} - (-1)^{2/3}) + \lim_{c \rightarrow 0+} \frac{3}{2} (1^{2/3} - c^{2/3}) \\ &= -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0.\end{aligned}$$

2. Sea f definida por: $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

Como en el caso anterior esta función no es acotada en torno del cero. Veamos si existe la integral impropia $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \lim_{c \rightarrow 0^-} \int_{-1}^c \frac{1}{x^2} dx + \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^2} dx = I_1 + I_2$$

Según la definición 8.1.17, para que la integral converga deben converger ambas integrales. Veámoslas por separado.

$$I_1 = \lim_{c \rightarrow 0^-} -x^{-1} \Big|_{-1}^c = \lim_{c \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{c} - 1 \right) = +\infty.$$

Por lo tanto, la integral diverge.

Observación 8.1.19 También se pueden aplicar estas definiciones cuando hay varios puntos conflictivos $a < c_1 < c_2 < \dots < c_n < b$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \dots + \int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x)dx + \int_{c_n}^b f(x)dx,$$

donde cada integral de la derecha se ha obtenido como un límite.

Integral de referencia

Ejemplo 8.1.20 El ejemplo que veremos ahora constituye una integral de referencia para aplicar distintos criterios de convergencia.

Si $b > 0$ y $p \in \mathbb{R}$, la integral impropia de segunda clase:

$$\int_{0^+}^b x^{-p} dx = \begin{cases} \frac{b^{1-p}}{1-p} & \text{si } p < 1 \\ +\infty & \text{si } p \geq 1. \end{cases}$$

En efecto, si $\varepsilon > 0$ tenemos

$$\int_{\varepsilon}^b x^{-p} dx = \frac{b^{1-p} - \varepsilon^{1-p}}{1-p}; \quad p \neq 1.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} I = \int_0^b x^{-p} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^b x^{-p} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{\varepsilon^{1-p}}{1-p} \right) \\ &= \frac{b^{1-p}}{1-p} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(\varepsilon^{1-p})}{1-p}. \end{aligned}$$

Cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ tenemos:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{1-p} = \begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon^{p-1}} ; 1-p < 0 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{1-p} ; 1-p > 0 \end{cases}$$

Por tanto,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{1-p} = \begin{cases} +\infty & \text{si } 1-p < 0 \\ 0 & \text{si } 1-p > 0 \end{cases}$$

Si $p = 1$, entonces

$$\int_0^b \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln x \Big|_{\varepsilon}^b = +\infty.$$

En particular, tenemos que

- $\int_{0^+}^{1/2} \frac{1}{x^{1/2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2}}.$
- $\int_{0^+}^2 \frac{1}{x^{1/2}} dx = 2\sqrt{2}.$
- $\int_{0^+}^{1/3} \frac{1}{x^{3/2}} dx$ es divergente, pues el exponente de x es mayor que 1.

Propiedades de las integrales impropias de segunda clase

Las propiedades de la integral de Riemann se extienden, mediante procesos de paso al límite, a las integrales impropias. Por ejemplo:

1. **Linealidad:** Si f y g son integrables en $[a, b[$ y si sus respectivas integrales impropias son convergentes, entonces también existe, es decir, es convergente la integral impropia de $cf + dg$ sobre $[a, b[$; cualesquiera sea $c, d \in \mathbb{R}$ y se tiene:

$$\int_a^{b^-} (cf(x) + dg(x)) dx = c \int_a^{b^-} f(x) dx + d \int_a^{b^-} g(x) dx$$

2. **Regla de Barrow:** Si $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a, b[$, si $F : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ es una función primitiva de f en $[a, b[$ y si existe el límite:

$$\int_a^{b^-} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} (F(t) - F(a)).$$

Entonces este límite es el valor de $\int_a^{b^-} f(x)dx$ lo cual lo podemos abreviar como:

$$F(x) \Big|_a^{b^-}$$

3. Cambio de variable

- Si $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$.
- Si $\varphi : [\alpha, \beta[\rightarrow \mathbb{R}$ tiene derivada continua en su dominio, $-\infty < \alpha < \beta \leq +\infty$ tal que $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) \rightarrow b^-$ cuando $t \rightarrow \beta^-$ y si
- $\varphi([\alpha, \beta]) = [a, b]$

entonces

$$\int_a^{b^-} f(x) dx = \int_\alpha^{\beta^-} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

Si una de las integrales es convergente (divergente) la otra también lo es.

4. **Integración por partes:** Si u y v son funciones con derivada continua en $[a, b[$ y son convergentes dos de los tres términos de la ecuación 8.2, entonces el tercero también lo es y se tienen la igualdad:

$$\int_a^{b^-} u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^{b^-} - \int_a^{b^-} u'(x)v(x) dx \quad (8.2)$$

Observación 8.1.21 Todas las propiedades son validas para integrales sobre intervalos de la forma $]a, b]$, cambiando a por a^+ y b^- por b .

Criterios de convergencia para integrales de segunda clase

Criterio de Comparación

Si f y g son funciones positivas, integrables en $[x, b]$, para todo $x \in]a, b[$ tales que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in]a, b[$. Entonces:

- Si $\int_a^b g(x) dx$ converge, entonces $\int_a^b f(x) dx$ converge. además se cumple que

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

- Si $\int_a^b f(x) dx$ diverge, entonces $\int_a^b g(x) dx$ diverge.

Observación 8.1.22 La demostración del criterio de comparación está basado en las propiedades de la integral de Riemann y de los límites. En particular de la propiedad siguiente: Si $h :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ es creciente y acotada superiormente, entonces $\lim_{x \rightarrow b^-} h(x)$ existe.

Criterio de comparación en el límite

Si las funciones f, g son positivas e integrables en $[x, b]$ para todo $x \in]a, b[$, tales que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = k$$

- Si $k \neq 0$, entonces las integrales impropias $\int_a^b f(x) dx$ y $\int_a^b g(x) dx$ ambas convergen o ambas divergen.
- Si $k = 0$, entonces la convergencia de $\int_a^b g(x) dx$ implica la convergencia de $\int_a^b f(x) dx$.
- Si $k = +\infty$, entonces la divergencia de $\int_a^b g(x) dx$ implica la divergencia de $\int_a^b f(x) dx$.

Ejemplo 8.1.23 1. La integral $I = \int_1^2 \frac{dx}{x^3 - x^2 + 4x - 4}$ diverge. En efecto, como el integrando tiene una discontinuidad en $x = 1$ y usando el criterio de comparación al límite, escogeremos como g la función $\frac{1}{x-1}$.

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\frac{1}{x^3 - x^2 + 4x - 4}}{\frac{1}{x-1}} \\ &= \frac{x-1}{x^3 - x^2 + 4x - 4} \\ &= \frac{x-1}{(x-1)(x^2 + 4)} \\ &= \frac{1}{x^2 + 4}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 + 4} = \frac{1}{5} \neq 0.$$

Como $\int_1^2 \frac{1}{x-1} dx$ diverge, la integral dada inicialmente también diverge.

2. La integral $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ es convergente ya que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{\sin x}} : \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{x}{\sin x}} = 1.$$

Así, como el cociente es 1, sabemos que ambas integrales convergen, o ambas integrales divergen. Por lo tanto, usando la convergencia de $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{x}}$, podemos concluir

que $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ converge.

3. La integral $\int_0^\infty \frac{e^x}{\sqrt{x^3}}$ diverge. Ya que,

$$\frac{e^x}{\sqrt{x^3}} : \frac{1}{x^{3/2}} = e^x,$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{e^x}{\sqrt{x^3}}}{\frac{1}{x^{3/2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1,$$

Implica que el límite del cociente cuando $x \rightarrow 0$ es 1, por tanto, ambas integrales convergen, o ambas divergen; y como la integral $\int_0^1 \frac{1}{x^{3/2}}$ es divergente, pues el exponente de x es mayor que 1, podemos concluir que $\int_0^\infty \frac{e^x}{\sqrt{x^3}}$ diverge. Notemos que como ya hemos estudiado la convergencia en un intervalo del tipo $\mathcal{S} =]0, a[$; $a \in \mathbb{R}$, y hemos concluido que la integral allí es divergente, no es necesario estudiar que ocurre en todo $\mathbb{R}^+$, por cuanto si diverge en $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^+$, diverge en todo $\mathbb{R}^+$.

8.1.4. Convergencia absoluta

Los criterios de convergencia vistos son válidos cuando las funciones son no negativas, una manera de estudiar convergencia de integrales de funciones con cambio de signo en los casos en que la definición sea difícil de aplicar, es la convergencia absoluta.

Definición 8.1.24 Si $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, la integral impropia $\int_a^b f(x) dx$ se dice absolutamente convergente si la integral $\int_a^b |f(x)| dx$ es convergente.

Ejemplo 8.1.25 La integral impropia de primera especie $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^3} dx$ es absolutamente convergente. En efecto, usando criterio de comparación con $g(x) = \frac{1}{x^3}$ tenemos:

$$\left| \frac{\cos x}{x^3} \right| \leq \frac{1}{x^3}, \quad x \in [1, +\infty[.$$

8.1.5. Otros criterios

Los criterios generales estudiados anteriormente no son suficientes para todas las distintas posibilidades que pueden darse, por ejemplo la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx,$$

no puede ser estudiada con dichos criterios. Para ello se necesitan teoremas más específicos como el siguiente.

Teorema 8.1.26 Si f y g son funciones tales que:

1. f es continua en $[a, \infty[$.
2. g' es continua en $[a, \infty[$, $g'(x) \leq 0$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.
3. $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ es acotada para $x \geq a$,

entonces

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx,$$

es convergente.

Ejemplo 8.1.27 La integral $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$ converge.

En efecto, consideremos:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx.$$

Notemos que esta integral no es impropia en 0, por cuanto existe $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$; así, en $x = 0$ el integrando no diverge a $\pm\infty$, y por tanto podemos separar el dominio de integración en dos intervalos de la forma $[0, a[$ y $[a, +\infty[$. Por simplicidad, consideraremos $a = 1$, así:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$$

En el capítulo 3, vimos que dos funciones integrables que difieren en un punto, tienen la misma integral. Sea:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & ; x \neq 0 \\ 1 & ; x = 0 \end{cases}$$

Entonces:

$$\int_0^1 h(x) dx = \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx.$$

Luego $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$ existe.

En cuanto a $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, sean: $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \frac{1}{x}$. Esto implica que $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Por tanto:

- Como $f(x) = \operatorname{sen} x$ es continua en $\mathbb{R}$, en particular lo es en $[1, +\infty[$
- $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$ es continua en $[1, +\infty[$ y es negativa en dicho intervalo, además:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

- $F(x) = \int_1^x f(t) dt = \int_1^x \operatorname{sen} t dt = -\cos t \Big|_1^x = \cos 1 - \cos x$, y como:

$$|F(x)| \leq |\cos 1 - \cos x| \leq |\cos 1| + |\cos x| \leq 2.$$

Por lo tanto, $F(x)$ es acotada, para todo $x \geq 1$

Así, se cumplen las hipótesis del teorema 8.1.26, y por tanto:

$$\int_1^{+\infty} f(x)g(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \quad \text{converge.}$$

Lo que implica:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx \quad \text{converge.}$$

8.1.6. La función Gama

Dado $p > 0$, no necesariamente un entero, definimos la función llamada Gama, mediante la integral

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx.$$

Esta función cumple las siguientes propiedades:

1. $\Gamma(p)$ está bien definida para todo $p > 0$. (i.e. $\Gamma(p) \in \mathbb{R}$).
Para ello divida el intervalo de integración en dos partes: desde $x = 0$ hasta 1 y desde 1 hasta $x = \infty$ y analice la convergencia de ambas integrales impropias.

2. $\Gamma(1) = 1$.

3. $\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1)$.

4. Si $p \in \mathbb{N}$, entonces

$$\Gamma(p) = (p-1)!.$$

5. Si $p = n + r$ con $n \in \mathbb{N}$ y $r \in (0, 1)$, entonces

$$\Gamma(p) = (p-1)(p-2)\dots(p-n)\Gamma(r).$$

Esto nos dice que basta tabularla en $(0, 1)$.

6. Mediante el cambio de variable $x = y^2$ se tiene

$$\Gamma(p) = 2 \int_0^{+\infty} y^{2p-1} e^{-y^2} dy.$$

A partir de lo cual podemos deducir que:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} y^0 e^{-y^2} dy = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

$$\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx.$$

7. Si $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\Gamma(n/2) = 2 \int_0^{+\infty} y^{n-1} e^{-y^2} dy.$$

8. Si $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\Gamma(n/2) = (n-2) \int_0^{+\infty} y^{n-3} e^{-y^2} dy.$$

8.1.7. La función Beta

Dado $p > 0$ y $q > 0$ no necesariamente enteros, definimos la función llamada Beta, mediante la integral

$$\beta(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx.$$

La cuál cumple las siguientes propiedades:

1. $\beta(p, q)$ está bien definida para todo $p > 0, q > 0$ (i.e. $\beta(p, q) \in \mathbb{R}$)

- 2.

$$\beta(p, 1) = \frac{1}{p}.$$

3. (Simetría)

$$\beta(p, q) = \beta(q, p).$$

4. $\beta(p, q) = \frac{q-1}{p} \beta(p+1, q-1).$

5. Si $q \in \mathbb{N}$, entonces

$$\beta(p, q) = \frac{(q-1)!}{p(p+1)\dots(p+q-1)},$$

y análogamente si p es entero.

6. Si $q \in \mathbb{N}$, entonces multiplicando numerador y denominador por $\Gamma(p)$ se tiene

$$\beta(p, q) = \frac{\Gamma(q)\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)}.$$

7. Haciendo el cambio $x = \sin^2(t)$, se tiene

$$\beta(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}(t) \cos^{2q-1}(t) dt.$$

- 8.

$$\beta(1/2, 1/2) = \pi.$$

9. Suponiendo que la fórmula (6) es cierta siempre, podemos demostrar que

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

y

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ejercicios resueltos

1. Dos amigos deciden ir a ver una película al cine, pero no logran decidir cuál. El primero propone “El Mosquito Asesino”, y el segundo “La Lagartija Sinvergüenza”. Para dirimir el problema, el primer amigo propone al segundo que resuelva la siguiente integral:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$$

Si la solución es correcta, verán “La Lagartija Sinvergüenza”, sino, verán “El Mosquito Asesino”. Considerando el segundo amigo que el problema es bastante fácil, acepta el desafío, y resuelve:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} = \int_{-1}^1 x^{-2} dx = \left. \frac{x^{-1}}{-1} \right|_{-1}^1 = -1 - 1 = -2$$

El primero dice entonces: “Creo que iremos a ver mi película”.

- ¿Cómo pudo el primer amigo, sin resolver la integral, saber que el otro se equivocó?
- ¿Cuál fue el error del segundo amigo?. ¿Cuál es el verdadero valor del problema propuesto?

Solución:

- Sin resolver la integral, el primer amigo notó que como $x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $\frac{1}{x^2} > 0$, para todo $x \in [-1, 1]$; Luego, necesariamente, según la teoría, $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} > 0$. Así, sin resolver la integral, detectó que la solución era incorrecta.
- El error fue el siguiente: Si $f(x) = \frac{1}{x^2}$; Con $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$; entonces $0 \notin \text{Dom}(f)$, por tanto, la integral se debe separar en dos casos:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2};$$

En donde cada integral es impropia de segunda clase. No obstante, usando el ejemplo 8.1.20, podemos decir que la integral $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$, diverge, por tanto $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}$ diverge.

2. Resolver:

$$a) \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

$$b) \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

Solución:

a) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dx$ Es una integral impropia de primera clase. Usando la definición:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dx = \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_0^l \frac{x^2}{1+x^2} dx;$$

Sumando y restando 1 en el numerador, obtenemos:

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \int_0^l \frac{x^2 + 1 - 1}{1+x^2} dx = \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_0^l \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \lim_{l \rightarrow +\infty} \left\{ \int_0^l dx - \int_0^l \frac{1}{1+x^2} dx \right\}.$$

Como $\arctan x$ es una primitiva de $\frac{1}{1+x^2}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow +\infty} \left\{ \int_0^l dx - \int_0^l \frac{1}{1+x^2} dx \right\} &= \lim_{l \rightarrow +\infty} \left\{ x \Big|_0^l - \arctan x \Big|_0^l \right\} \\ \lim_{l \rightarrow +\infty} (l - \arctan l + \arctan 0) &= \lim_{l \rightarrow +\infty} (l - \arctan l) \end{aligned}$$

Aplicando límite obtenemos:

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} (l - \arctan l) = +\infty - \frac{\pi}{2} = +\infty.$$

Por lo tanto: $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dx = +\infty$, Por lo cuál la integral diverge.

b) Notemos que:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

Podemos escribir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{x^2}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

Como la segunda integral diverge, por lo calculado en 2a, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dx$ diverge

3. Utilice el Teorema 8.1.26 para demostrar la convergencia de:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} dx.$$

Solución: Como:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

Al igual que el ejemplo 8.1.27, la integral:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} dx$$

no es impropia, y por lo tanto:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} dx \in \mathbb{R}.$$

Para analizar la convergencia de $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} dx$, aplicamos el teorema 8.1.26, con:

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen} x \\ g(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

- f es continua en $[1, +\infty[$
- $g'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$ es continua y negativa en $[1, +\infty[$. Además, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) =$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

$$\blacksquare F(x) = \int_1^x \sin t dt = -\cos t + \cos 1 \text{ es acotada para } x \geq a.$$

Por lo tanto, se cumplen las hipótesis del teorema 8.1.26, y entonces $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ converge.

4. Demuestre que:

$$\int_0^1 \ln^n x = (-1)^n n!; \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Notación: $\ln^n x = (\ln x)^n$

Solución: Consideremos:

$$\int_0^1 \ln^n x$$

Notemos que $0 \notin \text{Dom}(\ln x)$, por lo tanto debemos calcular:

$$\int_{0+}^1 \ln^n x$$

Así, en virtud de la definición de integral impropia de segunda clase:

$$\int_{0+}^1 \ln^n x = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^1 \ln^n x$$

Sea:

$$\begin{aligned} x &= e^p, \text{ entonces:} \\ dx &= e^p dp \end{aligned}$$

Y por tanto:

■ Si $x = 1$, entonces:

$$\begin{aligned} e^p &= 1 \iff \\ p &= \ln 1 \iff \\ p &= 0 \end{aligned}$$

■ Si $x = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} e^p &= \varepsilon \iff \\ p &= \ln \varepsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \ln^n x &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\ln \varepsilon}^0 e^p \cdot \ln^n e^p dp \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\ln \varepsilon}^0 p^n e^p dp\end{aligned}$$

Notemos que si $\varepsilon \rightarrow 0^+$, entonces $\ln \varepsilon \rightarrow -\infty$. Sea $\mu = \ln \varepsilon$; entonces,

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\ln \varepsilon}^0 p^n e^p dp &= \lim_{\mu \rightarrow -\infty} \int_{\mu}^0 p^n e^p dp \\ &= - \lim_{\mu \rightarrow -\infty} \int_0^{\mu} p^n e^p dp\end{aligned}$$

Sea:

$$\begin{aligned}p &= -t; \text{ entonces:} \\ dp &= -dt\end{aligned}$$

- Si $p = 0$, entonces $-t = 0$, lo cuál implica que $t = 0$
- Si $p = \mu$, entonces $-t = \mu$, lo cuál implica que $t = -\mu$.

Y por tanto:

$$\begin{aligned}- \lim_{\mu \rightarrow -\infty} \int_0^{\mu} p^n e^p dp &= - \lim_{\mu \rightarrow -\infty} \int_0^{-\mu} -(-t)^n e^{-t} dt \\ &= \lim_{\mu \rightarrow -\infty} \int_0^{-\mu} (-t)^n e^{-t} dt \\ &= (-1)^n \lim_{\mu \rightarrow -\infty} \int_0^{-\mu} t^n e^{-t} dt\end{aligned}$$

Notemos que cuando $\mu \rightarrow -\infty$, tenemos que $-\mu \rightarrow +\infty$. Sea $\beta = -\mu$, entonces:

$$(-1)^n \lim_{\mu \rightarrow -\infty} \int_0^{-\mu} t^n e^{-t} dt = (-1)^n \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_0^{\beta} t^n e^{-t} dt$$

Lo cual, por definición de integral impropia de primera clase es:

$$(-1)^n \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$$

Y por tanto, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt &= (-1)^n \int_0^{+\infty} t^{(n+1)-1} e^{-t} dt \\ &= (-1)^n \Gamma(n+1); \text{ como } n \in \mathbb{N} \\ &= (-1)^n n! \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\int_0^1 \ln^n x = (-1)^n n!; \quad n \in \mathbb{N}_0$$

5. Para $f(x) = \frac{x+1}{x^3}$

a) Determine $\int_0^{+\infty} f(x) dx$

b) Determine $\int_2^{+\infty} f(x) dx$

c) Calcule:

$$\int_L f(x) dx; \text{ Donde: } L = \{x \in \mathbb{R} : |x| > 2\}$$

Solución:

a) En este caso, la integral es impropia tanto de primera clase como de segunda clase, por cuanto, por un lado estamos trabajando sobre un dominio no acotado $[0, +\infty[$, y además $0 \notin \text{Dom}(f)$; luego nos conviene separar el dominio de integración en dos partes, de la forma $[0, +\infty[= [0, a[\cup [a, +\infty[$. pero como sabemos que f está definida para todo $a \in \mathbb{R}^+$, escogemos $a = 1$, Así:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^3} dx = \int_0^1 \frac{x+1}{x^3} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^3} dx.$$

Y ocupando la definición, esto es igual a:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \frac{x+1}{x^3} dx + \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_1^l \frac{x+1}{x^3} dx.$$

Notemos que:

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^3} dx &= \int \left(\frac{x}{x^3} + \frac{1}{x^3} \right) dx \\ &= \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) dx \\ &= -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C.\end{aligned}$$

luego:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \frac{x+1}{x^3} dx + \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_1^l \frac{x+1}{x^3} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} \right) \Big|_{\epsilon}^1 + \lim_{l \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^l$$

Evaluable obtenemos:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ (-2-1) - \left(-\frac{1}{2\epsilon^2} - \frac{1}{\epsilon} \right) \right\} + \lim_{l \rightarrow +\infty} \left\{ \left(-\frac{1}{2l^2} - \frac{1}{l} \right) - (-2-1) \right\};$$

Lo cual es simplemente:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(-3 + \frac{1}{2\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} \right) + \lim_{l \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2l^2} - \frac{1}{l} + 3 \right)$$

Aplicando límite obtenemos:

$$(-3 + \infty + \infty) + (0 - 0 + 3) = +\infty + 3 = +\infty.$$

Por lo tanto, la integral diverge.

- b) $\int_2^{+\infty} f(x) dx = \int_2^{+\infty} \frac{x+1}{x^3} dx$ Esta es una integral impropia de primera clase, pues esta sobre un dominio de integración no acotado, pero f está definida para todo valor en el intervalo $[2, +\infty[$. Así, aplicando la definición obtenemos que:

$$\int_2^{+\infty} \frac{x+1}{x^3} dx = \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_2^p \frac{x+1}{x^3} dx$$

Usando los resultados del ítem anterior, concluimos que:

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty} \frac{x+1}{x^3} dx &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} \right) \Big|_2^p \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \left\{ \left(-\frac{1}{2p^2} - \frac{1}{p} \right) - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \right\} \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2p^2} - \frac{1}{p} + 1 \right)\end{aligned}$$

Aplicando límite obtenemos:

$$0 - 0 + 1 = 1.$$

Por lo tanto:

$$\int_2^{+\infty} \frac{x+1}{x^3} dx = 1$$

c)

$$\begin{aligned} \int_L f(x) dx &= \int_{-\infty}^{-2} f(x) dx + \int_2^{+\infty} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^2} dx + \int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^3} dx + \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx + \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx \end{aligned}$$

las integrales de la forma $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$, con $p > 1$, $a > 0$ convergen. Además, como $\frac{1}{x^2}$ es par y $\frac{1}{x^3}$ es impar, entonces claramente:

$$\begin{aligned} \int_L \frac{1}{x^2} dx &= 2 \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \\ \int_L \frac{1}{x^3} dx &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int_L f(x) dx &= 2 \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \\ &= 2 \lim_{c \rightarrow +\infty} \left(\int_2^c \frac{1}{x^2} \right) \\ &= 2 \lim_{c \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_2^c \\ &= 2 \lim_{c \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{c} + \frac{1}{2} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

6. Dada:

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}; \quad x \in \mathbb{R}$$

- a) Calcule, si es que existe, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$
- b) Si $F(x) = \int_{-\infty}^x f(u)du$, Sin resolver la integral, determine:
- 1) Dominio de f .
 - 2) Signo de f .
- c) Responda la pregunta anterior, resolviendo la integral.
- d) Generalice el Teorema Fundamental del Cálculo, para calcular $F'(x)$. Analice la existencia de puntos críticos y el crecimiento de F .
- e) Calcule $F''(x)$. Analice la curvatura de F .
- f) Determine, si existen, asíntotas horizontales y verticales de F
- g) ¿Cuál es el recorrido de F ? Deduzca que $0 \leq F(x) \leq 1$
- h) Calcule, si es que existen:
- $\int_{\mathbb{R}} xf(x)dx$
 - $\int_{\mathbb{R}} x^2f(x)dx$
- i) Determine $M \in \mathbb{R}$, tal que $F(M) = \frac{1}{2}$
- j) Determine $P \in \mathbb{R}$, tal que $F(P) = \alpha$

Solución:

- a) Si estudiamos que ocurre en $\mathbb{R}^+$, Como sobre $[0, +\infty[$, $|x| = x$, podemos escribir simplemente:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-|x|}dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x}dx,$$

Sea $I = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx$. Esta integral puede ser resuelta por dos caminos posibles.

- 1) Usando la definición:

$$\begin{aligned} I = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^p e^{-x}dx \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} -e^{-x} \Big|_0^p \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} (-e^{-p} + 1) \end{aligned}$$

Como $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^p} = 0$; se tiene que:

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} (-e^{-p} + 1) = 0 + 1 = 1.$$

Luego:

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1,$$

luego, el resultado es: $\frac{1}{2} \cdot I = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

2) Usando la función gamma:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

Colocaremos la integral a resolver bajo esta forma; así:

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^0 e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^{1-1} e^{-x} dx = \Gamma(1)$$

Como $1 \in \mathbb{N}$; tenemos $\Gamma(1) = 0! = 1$.

luego, el resultado es: $\frac{1}{2} \cdot I = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

Como $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ es una función par, entonces podemos decir que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-|x|} dx.$$

así:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

b) Si $F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$, entonces:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2} e^{-|u|} du.$$

Como el integrando, $f(u) = \frac{1}{2}e^{-|u|}$, es continuo para todo $u \in \mathbb{R}$, y sabemos que la integral de esta función converge en $\mathbb{R}$, entonces F siempre existe, así

$Dom(F) = \mathbb{R}$. Por otra parte, como la función exponencial es siempre positiva, entonces: $\frac{1}{2}e^{-|u|} \geq 0$, para todo $u \in \mathbb{R}$, luego: $\int_{\mathcal{A}} \frac{1}{2}e^{-|u|} du \geq 0$, para todo $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}$; en particular si $\mathcal{A} =]-\infty, x]$; $x \in \mathbb{R}$, por lo tanto:

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 f(u) du \geq 0; \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Luego, F es siempre positiva.

c) Resolviendo la integral:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2}e^{-|u|} du.$$

Notemos, que como hay un valor absoluto en el integrando, debemos distinguir entre los casos $x > 0, x \leq 0$.

Sea $\mathcal{B} =]-\infty, x]$

- Si $x \leq 0$, entonces $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^-$, por tanto $|u| = -u$, para todo $u \in \mathcal{B}$. Así:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2}e^{-|u|} du \\ &= \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2}e^{-(-u)} du \end{aligned}$$

Luego, el problema se reduce a calcular:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2}e^u du.$$

Ocupando la definición tenemos que:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2}e^u du = \lim_{p \rightarrow -\infty} \int_p^x \frac{1}{2}e^u du$$

Calculando la primitiva, y evaluando en los límites de integración, obtenemos:

$$F(x) = \lim_{p \rightarrow -\infty} \left. \frac{1}{2}e^u \right|_p^x = \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow -\infty} (e^x - e^p)$$

Como sabemos que si $p \rightarrow -\infty$, entonces $e^p \rightarrow 0$ nos queda que:

$$\frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow -\infty} (e^x - e^p) = \frac{1}{2}e^x$$

Luego, podemos concluir que:

$$F(x) = \frac{1}{2}e^x; \quad x \geq 0$$

- Si $x > 0$, entonces $\mathcal{B} = \mathbb{R}_0^- \cup \mathcal{L}$, donde $\mathcal{L} =]0, x] \subseteq \mathbb{R}^+$, Así:

$$F(x) = \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} e^{-|u|} du = \int_{\mathbb{R}_0^- \cup \mathcal{L}} \frac{1}{2} e^{-|u|} du.$$

Como los conjuntos son disjuntos, obtenemos simplemente:

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}_0^- \cup \mathcal{L}} \frac{1}{2} e^{-|u|} du = \int_{\mathbb{R}_0^-} \frac{1}{2} e^{-|u|} du + \int_{\mathcal{L}} \frac{1}{2} e^{-|u|} du$$

Claramente $|u| = u$, para todo $u \in \mathcal{L}$, y $|u| = -u$, para todo $u \in \mathbb{R}_0^-$, luego:

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}_0^-} \frac{1}{2} e^u du + \int_{\mathcal{L}} \frac{1}{2} e^{-u} du$$

Lo que en terminos más simples puede ser escrito como:

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} e^u du + \int_0^x \frac{1}{2} e^{-u} du$$

Claramente el primer miembro de la suma es $F(0)$. Así,

$$F(x) = F(0) + \int_0^x \frac{1}{2} e^{-u} du = \frac{1}{2} + \int_0^x \frac{1}{2} e^{-u} du$$

Resolviendo la integral involucrada, obtenemos que:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (-e^{-u}) \Big|_0^x = \frac{1}{2} (1 - e^{-x}) + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} e^{-x}$$

Por lo tanto:

$$F(x) = 1 - \frac{1}{2} e^{-x}; \quad x > 0$$

Así:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^x & \text{Si } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-x} & \text{Si } x > 0 \end{cases}$$

Donde claramente se aprecia que $\text{Dom}(F) = \mathbb{R}$, además, como la función exponencial es siempre positiva, vemos que la primera rama de la función lo es, en cuanto a la segunda rama, notemos que e^{-x} es una función decreciente, cuyo máximo valor en $\mathbb{R}_0^+$ se alcanza en el 0, y este valor es 1, a partir de ahí la función siempre decrece y por tanto la tercera rama es siempre positiva.

- d) Recordemos que el Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que si:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt; \quad a \in \mathbb{R}; \text{ entonces:}$$

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

Como este teorema es válido para integrales de Riemann, que no son impropias, escribimos:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2} e^{-|u|} du = \int_{-\infty}^a \frac{1}{2} e^{-|u|} du + \int_a^x \frac{1}{2} e^{-|u|} du; \text{ con } a \in \mathbb{R}$$

luego:

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_{-\infty}^a \frac{1}{2} e^{-|u|} du + \int_a^x \frac{1}{2} e^{-|u|} du \right)$$

Como $\int_{-\infty}^a \frac{1}{2} e^{-|u|} du$ existe, y es constante, su derivada es 0. En cuanto a $\int_a^x \frac{1}{2} e^{-|u|} du$, como $a \in \mathbb{R}$, es una integral de Riemann, y por tanto, podemos aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo, Así:

$$F'(x) = 0 + \frac{1}{2} e^{-|x|} = \frac{1}{2} e^{-|x|} = f(x).$$

Luego:

$$F'(x) = 0, \text{ si y solo si, } \frac{1}{2} e^{-|x|} = 0.$$

Lo cual jamás ocurre ;así, F carece de puntos críticos. Por otro lado, como $F'(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, F es siempre creciente.

$$e) \quad F''(x) = \frac{d}{dx}(F'(x)) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} e^{-|x|} \right)$$

Notemos que:

$$F'(x) = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^x; & x < 0 \\ \frac{1}{2} e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Luego:

■ Si $x < 0$:

$$\frac{d}{dx}(F'(x)) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} e^x \right) = \frac{1}{2} e^x$$

■ Si $x > 0$:

$$\frac{d}{dx}(F'(x)) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} e^{-x} \right) = -\frac{1}{2} e^{-x}$$

- Si $x = 0$:

Como en este punto se produce un cambio de definición de F' , debemos estudiar la existencia de $F''(0) = f'(0)$, Usando la definición de derivada:

$$F''(0) = f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

o simplemente

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

Notemos que si $h \rightarrow 0^+$, entonces $f(h) = \frac{1}{2}e^{-h}$, pero si en cambio $h \rightarrow 0^-$, tenemos que $f(h) = \frac{1}{2}e^h$; por tanto deben separarse los casos:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}e^{-h} - \frac{1}{2}}{h}$$

factorizando

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}(e^{-h} - 1)}{h} = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(e^{-h} - 1)}{h}$$

Recordemos que:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{b^u - 1}{u} = \ln b$$

haciendo un cambio de variable de la forma $h = -u$, notamos que si $h \rightarrow 0^+$, entonces $u \rightarrow 0^-$, y podemos reescribir nuestro límite como:

$$\frac{1}{2} \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{e^u - 1}{-u} = -\frac{1}{2} \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{e^u - 1}{u} = -\frac{1}{2} \ln e = -\frac{1}{2}$$

Notemos que como el límite que hemos usado de referencia existe para $u \rightarrow 0$, significa que en particular existe por derecha y por izquierda, y obviamente converge al mismo valor.

Por otro lado, si $h \rightarrow 0^-$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{2}e^h - \frac{1}{2}}{h}$$

factorizando

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{2}(e^h - 1)}{h} = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(e^h - 1)}{h}$$

En este caso, aplicamos en forma directa el límite de referencia y vemos que:

$$\frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(e^h - 1)}{h} = \frac{1}{2} \ln e = \frac{1}{2}$$

Así, vemos que no existe el límite cuando h tiende a 0, y por ende, no existe $F''(0)$

Luego:

$$F''(x) = f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x; & x < 0 \\ -\frac{1}{2}e^{-x}; & x > 0 \end{cases}$$

o lo que es lo mismo:

$$F''(x) = -\frac{1}{2} \text{Signo}(x)e^{-|x|}; \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Observando la forma de F'' , vemos que $F'' > 0$, si $x < 0$, y $F'' < 0$, si $x > 0$, luego la función F es:

- Convexa sobre $] -\infty, 0[$
- Concava sobre $]0, +\infty[$

Es interesante notar que el 0 es un punto de inflexión para F , pese a que $F''(0)$ no está definida; la razón, es que en $x = 0$, hay un punto de cambio de curvatura, recuerde que $F(0)$ si está definida.

f) 1) Asintotas Verticales: Como F es continua, carece de asintotas verticales.

2) Asintotas Horizontales:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^x \frac{1}{2}e^{-|x|}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-|x|}dx = 1$, por lo visto en 6a. Luego la recta $y = 1$ es una asintota horizontal
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^x \frac{1}{2}e^{-|x|}dx = \int_{-\infty}^{-\infty} \frac{1}{2}e^{-|x|}dx = 0$, pues la integral $\int_{-\infty}^u \frac{1}{2}e^{-|x|}dx$ es convergente para todo $u \in \mathbb{R}$. Luego la recta $y = 0$ es otra asintota horizontal

g) Como F es derivable en todo $\mathbb{R}$, entonces F es continua en todo $\mathbb{R}$; además, como F es siempre creciente y positiva, y tiene por asintotas horizontales las rectas $y = 0$ e $y = 1$, entonces $\text{Rec}(f) =] -1, 1[$; luego $0 \leq F(x) \leq 1$

h) h-1 Para analizar la existencia de la integral $\int_{\mathbb{R}} xf(x) dx = \int_{\mathbb{R}} x \cdot \frac{1}{2}e^{-|x|} dx$

Analizaremos la existencia de la integral sobre $\mathbb{R}^+$. Usando integración por partes tenemos

$$\int_0^c xe^{-x} dx = (-xe^{-x} + \int e^{-x} dx) \Big|_0^c.$$

Tomando el límite cuando $c \rightarrow +\infty$, obtenemos que dicha integral converge. Ahora podemos usar que f es par y x es impar, y por lo tanto, su producto es impar. Así, la integral sobre $\mathbb{R}$ vale cero.

Observación: Este problema puede ser resuelto usando la función Γ . Se recomienda al estudiante que, como ejercicio, lo resuelva por esta vía que es mucha más rápida.

h-2 Nuevamente analizaremos la existencia de la integral impropia sobre $\mathbb{R}^+$. Esto puede ser hecho usando la definición o la función Γ . Presentaremos ambos métodos.

Usando la definición tenemos,

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = .$$

Integrando por partes:

$$\begin{cases} u = x^2 & \implies du = 2x dx \\ dv = e^{-x} dx & \implies v = -e^{-x}. \end{cases}$$

Así, tenemos que

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_0^c x^2 e^{-x} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \left(-e^{-x} x^2 \Big|_0^c + 2 \int_0^c x e^{-x} dx \right).$$

Aplicando la propiedad de límites,

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \left(-e^{-x} x^2 \Big|_0^c \right) + 2 \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_0^c x e^{-x} dx.$$

Aplicando nuevamente integración por partes:

$$\begin{cases} u = x & \implies du = dx \\ dv = e^{-x} dx & \implies v = -e^{-x}. \end{cases}$$

Así, obtenemos

$$\begin{aligned} & \lim_{c \rightarrow +\infty} \left(-e^{-x} x^2 \right) \Big|_0^c + 2 \lim_{c \rightarrow +\infty} \left(-e^{-x} x \right) \Big|_0^c + \int_0^c e^{-x} dx \\ & \lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{-c^2}{e^c} + 2 \lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{-c}{e^c} + 2 \lim_{c \rightarrow +\infty} (-e^{-x}) \Big|_0^c \\ & - \lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{-c^2}{e^c} - 2 \lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{c}{e^c} - 2 \lim_{c \rightarrow +\infty} (e^{-c} - 1) \\ & = (**) \end{aligned}$$

El primer y segundo límite dan origen a formas indeterminadas de tipo $\frac{\infty}{\infty}$, para los cuales usaremos regla de L' Hopital. el tercer límite es directo. Así, la expresión (**) queda como:

$$\begin{aligned} (**) &= - \lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{2c}{e^c} - 2 \lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^c} - 2(0 - 1) \\ &= - \lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^c} + 2 = 2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = 2.$$

Usando la función Gamma

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^{3-1} e^{-x} dx = \Gamma(3).$$

Como $3 \in \mathbb{N}$, entonces $\Gamma(3) = 2! = 2$.

i)

$$F(M) = \frac{1}{2} \iff \int_{-\infty}^M \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = \frac{1}{2}.$$

Pero,

$$F(M) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^M, & M < 0 \\ 1 - e^{-M/2}, & M \geq 0. \end{cases}$$

■ Si $M < 0$

$$F(M) = \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2} e^M = \frac{1}{2} \iff e^M = 1 \iff M = \ln 1 \iff M = 0.$$

- Si $M \geq 0$

$$F(M) = 1 - \frac{e^{-M}}{2} = \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{2}e^{-M} = -\frac{1}{2} \iff e^{-M} = 1 \iff M = 0.$$

Luego,

$$F(M) = \frac{1}{2} \iff M = 0.$$

j)

$$F(P) = \alpha \iff \int_{-\infty}^P \frac{1}{2}e^{-|x|} dx = \alpha.$$

Notemos que si $\alpha = \frac{1}{2}$, entonces $P = 0$ por lo visto en 6i. Como F es creciente,

si $\alpha < \frac{1}{2} \implies P < 0$ y se busca con la definición de F sobre $\mathbb{R}^-$, y si

$\alpha > \frac{1}{2} \implies P > 0$ y se busca usando la definición de F sobre $\mathbb{R}^+$.

- Si $\alpha < \frac{1}{2}$

$$F(P) = \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2}e^P = \alpha \iff e^P = 2\alpha \iff P = \ln 2\alpha.$$

- Si $\alpha < \frac{1}{2}$

$$F(P) = \frac{1}{2} \iff 1 - \frac{1}{2}e^P = \alpha \iff 2 - e^P = 2\alpha \iff 2 - 2\alpha = e^P \iff P = \ln(2 - 2\alpha).$$

Así,

$$P = \begin{cases} \ln 2\alpha & \alpha < \frac{1}{2} \\ 0 & \alpha = \frac{1}{2} \\ \ln(2 - 2\alpha) & \alpha > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ejercicios propuestos

1. Demuestre que las siguientes integrales convergen e interprete geoméricamente .

a) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx$

c) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx$

$$d) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

$$e) \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$$

$$f) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$$

$$g) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 4)^2} dx$$

$$h) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$$

$$i) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)(1-x)}} dx$$

Indicación: Usar comparación al límite con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

$$j) \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1+x^2)}} dx$$

$$k) \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin x}} dx$$

$$l) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} dx$$

$$m) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

2. Demuestre que las siguientes integrales divergen e interprete geométricamente .

$$a) \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

$$b) \int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$$

$$c) \int_0^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$$

$$d) \int_0^{+\infty} \frac{x+3}{(x+1)(x+2)} dx$$

$$e) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+\sqrt{x})} dx$$

$$f) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$$

$$g) \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$h) \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x^3}} dx$$

$$i) \int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x dx$$

$$j) \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x^3} dx$$

3. Demuestre que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = n! \text{ Indicación: Use fórmulas de reducción o Función Gama.}$$

4. Demuestre que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(\alpha x) dx = \frac{1}{1 + \alpha^2}$$

5. Demuestre que

$$a) \int \frac{1}{x^4 + 1} dx = \frac{\sqrt{2}}{8} \left[\ln \frac{1 + x\sqrt{2} + x^2}{1 - x\sqrt{2} + x^2} + 2 \arctan(x\sqrt{2} + 1) + 2 \arctan(x\sqrt{2} - 1) + c \right].$$

Indicación:

$$\begin{aligned} 1 + x^4 &= 1 + x^4 + 2x^2 - 2x^2 \\ &= (1 + x^2)^2 - 2x^2 \\ &= (1 - x\sqrt{2} + x^2)(1 + x\sqrt{2} + x^2). \end{aligned}$$

$$b) \text{ Encuentre el valor de } \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx$$

6. Demuestre que

$$a) \int \frac{x^2}{x^4 + 1} dx = \frac{\sqrt{2}}{8} \left[\ln \frac{1 - x\sqrt{2} + x^2}{1 + x\sqrt{2} + x^2} + 2 \arctan(x\sqrt{2} + 1) + 2 \arctan(x\sqrt{2} - 1) + c \right].$$

$$b) \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$$

7. Demuestre que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x^2 + x^4 + x^6} dx = \frac{\pi}{4}$$

Indicación: Observe que

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 = (1 + x^2)(1 + x^4) \text{ y use los ejercicios 1a, 5b, 6b.}$$

8. Demuestre que

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} dx = \pi$$

Indicación: Use el cambio de variable $u = x - a$ y a continuación use una nueva variable v de modo que

$$u - \frac{1}{2}(b-a) = \frac{1}{2}(b-a)v.$$

No se olvide que al cambiar de variable debe cambiar los límites de integración.

9. a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$. ¿Qué puede decir de la integral $\int_0^\pi \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$?

b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}}$.

c) Demuestre que $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$

converge usando criterio de comparación al límite con $g(x) = \frac{1}{x^p}$, eligiendo un p apropiado.

10. a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$.

b) Demuestre que $\int_0^\pi \frac{dx}{1 - \cos x}$ diverge.

11. Demuestre que las siguientes integrales convergen:

a) $\int_0^\pi \ln(\sin x) dx$

b) $\int_0^{\pi/2} \ln(\tan x) dx$

c) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$

12. Demuestre que la integral $\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) dx$, converge.

Use el cambio de variable: $y = \frac{1}{1-x}$.

13. Dada la curva $y = xe^x$, demuestre que el área A acotada asintóticamente por la parte negativa del eje X y la curva vale 1.

14. Demuestre que el volumen del sólido de revolución que resulta al girar en torno al eje X la región acotada por dos semiejes positivos, la recta $y = 1$ y la curva $y = \coth x - 1$, vale $\pi(1 + 2 \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 3)$.
15. Utilice el Teorema 8.1.26 para demostrar que las siguientes integrales convergen:

a) $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$. Use el cambio de variable $u = \sqrt{x}$.

b) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$, si $0 < p < 2$.

8.2. Series Numéricas

Intuitivamente una serie es una suma infinita de números. Como aritméticamente no se puede sumar una cantidad infinita, estas sumas deben ser tratadas con el concepto de límite.

8.2.1. Conceptos generales

Definición 8.2.1 Una **serie de término general** a_n , $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ se denota

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

y se define :

1. La sucesión de **sumas parciales** de la serie como aquella cuyo término general es

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + \dots + a_n = \sum_{i=0}^n a_i. \quad (8.3)$$

2. La **suma de la serie** como el límite de la sucesión de sus sumas parciales, es decir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S. \quad (8.4)$$

Si tal límite existe, diremos que la serie **converge** hacia S , si el límite es $\pm\infty$ diremos que la serie **diverge** a $\pm\infty$. Si las sumas parciales oscilan, diremos que la suma de la serie **oscila**.

Nuestro objetivo es estudiar métodos que permitan analizar la convergencia de series. En primera instancia debemos tener presente todo lo estudiado en la sección de sucesiones 2.1. Por ejemplo, aplicando **la propiedad de las sucesiones monótonas** estudiada en la sección 2.1.3, toda sucesión monótona y acotada es convergente, así obtenemos el más elemental de los criterios de convergencia para series.

Teorema 8.2.2 Si la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ es de términos positivos, es decir, $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y si la sucesión de sus sumas parciales es:

1. Acotada superiormente, entonces la serie es convergente.
2. No es acotada superiormente, entonces la serie diverge a $+\infty$.

Teorema 8.2.3 Criterio de divergencia

1. Si la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ es convergente entonces la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiende a cero.
2. Si la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no tiende a cero, entonces la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ es divergente.

Demostración:

1. Si la serie es convergente entonces, la sucesión de sus sumas parciales converge. Además, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = S$. Como el término general de la serie se puede escribir en función de los S_n , tenemos:

$$a_n = S_n - S_{n-1},$$

luego,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

2. Si una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ es tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq 0,$$

entonces no puede ser convergente. Pues, si lo fuera, por el ítem anterior tendríamos $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. Y esto contradice la hipótesis. $\square$

Recordaremos una serie estudiada en la sección 2.1, la **serie geométrica** que es una de las series de referencia.

Una serie de referencia: la serie geométrica La serie geométrica de razón r , $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n$ es tal que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + r + r^2 + \cdots + r^n) = \begin{cases} \frac{1}{1-r} & ; \text{ si } |r| < 1 \\ +\infty & , \text{ si } r \geq 1 \\ \text{no existe} & , \text{ si } r \leq -1 \end{cases}$$

8.2.2. Series de términos positivos

Criterios básicos de convergencia de series

En esta sección supondremos que las series son de término general positivo, es decir, $a_n \geq 0$.

Teorema 8.2.4 Criterio de la integral.

Si $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es una serie de términos no negativos y si $f : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ es una función no negativa, decreciente e integrable, tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ y $f(n) = a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces,

- (i) $0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ S_n - \int_1^n f(x) dx \right\} \leq a_1$.
- (ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge si y sólo si $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge.

Demostración:

- (i) En efecto, para cada $k \in \mathbb{N}$ y $x \in [k, k+1]$ y usando que f es decreciente, se tiene la desigualdad:

$$f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$$

Por las propiedades de integral, podemos escribir:

$$\int_k^{k+1} f(k) dx \geq \int_k^{k+1} f(x) dx \geq \int_k^{k+1} f(k+1) dx$$

Como

$$\int_k^{k+1} f(k) dx = f(k)$$

Se tiene que,

$$a_k = f(k) = \int_k^{k+1} f(k) dx \geq \int_k^{k+1} f(x) dx \geq \int_k^{k+1} f(k+1) dx = a_{k+1}.$$

Sumando estas desigualdades desde $k = 1$ hasta $k = n - 1$ Obtenemos,

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \geq \int_1^n f(x) dx \geq a_2 + a_3 + \cdots + a_n = S_n - a_1.$$

Luego,

$$-S_{n-1} = a_n - S_n \leq -\int_1^n f(x) dx \leq a_1 - S_n.$$

Consecuentemente,

$$a_n \leq S_n - \int_1^n f(x)dx \leq a_1.$$

Tomando límite cuando n tiende a infinito, tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(S_n - \int_1^n f(x)dx \right) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_1.$$

Así, por hipótesis:

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(S_n - \int_1^n f(x)dx \right) \leq a_1,$$

- (ii) Ahora demostraremos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(S_n - \int_1^n f(x)dx \right)$ existe. Para ello demostraremos que la sucesión:

$$B_n = S_n - \int_1^n f(x)dx$$

es decreciente, y por el resultado anterior, sabemos que es acotada inferiormente por cero.

En efecto,

$$\begin{aligned} B_n - B_{n+1} &= \left(S_n - \int_1^n f(x)dx \right) - \left(S_{n+1} - \int_1^{n+1} f(x)dx \right) \\ &= \int_n^{n+1} (f(x) - f(n+1)) dx \geq 0, \text{ pues } f \text{ es decreciente.} \end{aligned}$$

Considerando la propiedad de las sucesiones monótonas, la sucesión B_n tiene límite, es decir:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n \in \mathbb{R}$$

Como consecuencia de la existencia del límite de B_n , tenemos:

- Si la integral impropia $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, ya que esta se puede escribir como:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} B_n + \int_1^{+\infty} f(x) dx$$

- Si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, entonces la integral impropia $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge, ya que esta se puede escribir como:

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} B_n$$

- Para la divergencia se razona de forma similar, ya que es la diferencia la que siempre converge, lo que no implica necesariamente que cada una de ellas converja siempre por separado.

□

Ejemplo 8.2.5 Ejemplo de referencia: la serie hiperarmónica La siguiente serie, llamada **hiperarmónica**, es muy usada como serie de referencia en los criterios de comparación. Su comportamiento se obtiene como aplicación del criterio de la integral.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \quad \text{es} \quad \begin{cases} \text{convergente si} & p > 1 \\ \text{divergente si} & p \leq 1 \end{cases}$$

Teorema 8.2.6 Criterio de Comparación: Si $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ son series de términos positivos tales que para algún $K \in \mathbb{R}$ y algún $N \in \mathbb{N}$ se cumple que:

- (i) $a_n \leq K b_n$ para todo $n \geq N$, entonces, la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ implica la

convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

- (ii) $a_n \geq K b_n$ para todo $n \geq N$ entonces, la divergencia de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ implica la

divergencia de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Demostración: Si la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge, entonces sus sumas parciales son acotadas,

lo que a su vez implica que las sumas parciales de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ también lo son. Por lo tanto, converge.

Teorema 8.2.7 Criterio de comparación al límite Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ son series de términos positivos y si además se cumple que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = K,$$

entonces,

- (i) Si $K \in \mathbb{R}^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.
- (ii) Si $K = 0$, entonces la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ implica la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- (iii) Si $K = +\infty$, entonces la divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ implica la divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Demostración: Para simplificar podemos suponer $K = 1$. De la definición de límite con $K = 1$ y $\varepsilon = \frac{1}{2}$ podemos deducir la existencia de un $n \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces,

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - 1 \right| < \frac{1}{2}$$

Si y solo si,

$$\frac{1}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}.$$

El resultado se obtiene aplicando el teorema 8.2.6 dos veces.

Teorema 8.2.8 Criterio de D'Alembert o de la razón o del cociente.

Si

$$\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

entonces la serie de términos positivos,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ es } \begin{cases} \text{convergente si} & \rho < 1 \\ \text{divergente si} & \rho > 1 \\ \text{no se puede concluir nada si} & \rho = 1. \end{cases}$$

Demostración:

- Si $\rho < 1$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $N = N(\varepsilon)$ tal que $n \geq N(\varepsilon)$ implica que

$$\rho - \varepsilon \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \rho + \varepsilon.$$

Además, podemos suponer que $\rho + \varepsilon < 1$. En este caso :

$$a_{n+1} \leq (\rho + \varepsilon)a_n, a_{n+2} \leq (\rho + \varepsilon)a_{n+1} \leq (\rho + \varepsilon)(\rho + \varepsilon)a_n = (\rho + \varepsilon)^2 a_n$$

y sucesivamente

$$a_{n+p} \leq (\rho + \varepsilon)^p a_n.$$

De esta forma,

$$\sum_{n=N}^{N+p} a_n \leq a_N \sum_{j=0}^p (\rho + \varepsilon)^j.$$

La última serie es una serie geométrica de razón menor que uno. Por lo tanto, es convergente. Luego,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^N a_n + \sum_{n=N}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^N a_n + \sum_{j=0}^{+\infty} (\rho + \varepsilon)^j.$$

Por lo tanto, la serie converge.

- Si $\rho > 1$, asumiendo que $(\rho - \varepsilon) > 1$ se prueba la divergencia de la serie. □

Ejemplo 8.2.9 Si $\lambda \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, x \in]0, \infty[$, consideremos la serie de término general:

$$a_n = n^\lambda x^n.$$

Aplicando el criterio de la razón tenemos,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^\lambda x^{n+1}}{n^\lambda x^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\lambda x.$$

Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = x.$$

Luego, la serie es convergente para $0 < x < 1$ y divergente para $x > 1$.

Teorema 8.2.10 Criterio de la raíz o de Cauchy.

Si

$$\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}},$$

entonces la serie de términos positivos,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ es } \begin{cases} \text{convergente si} & \rho < 1 \\ \text{divergente si} & \rho > 1 \\ \text{no se puede concluir nada si} & \rho = 1. \end{cases}$$

Demostración: La demostración de este resultado es similar a la demostración del criterio de la razón y se deja de ejercicio. $\square$

Ejemplo 8.2.11 Consideremos la serie de término general $a_n = 2^{-n-(-1)^n}$. Aplicando criterio de la raíz, tenemos,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^{1/n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2^{-n-(-1)^n} \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{\frac{-n-(-1)^n}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-1} 2^{\frac{(-1) \cdot (-1)^n}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-1} 2^{\frac{(-1)^{n+1}}{n}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Usando la continuidad de la función } 2^x \\ &= 2^{-1} \cdot 2^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}} \\ &= 2^{-1} \cdot 2^0 = \frac{1}{2} < 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la serie es convergente.

Observe que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$, pues, por el teorema de acotamiento:

$$-1 \leq (-1)^{n+1} \leq 1$$

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$-\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}$$

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \leq 0$$

Teorema 8.2.12 Relación entre el criterio de la raíz y de la razón.

Si el límite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ existe entonces, también existe $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$ y son iguales.

Observación 8.2.13 El teorema 8.2.12 dice que si uno obtiene la convergencia de una serie mediante el criterio de la razón, el criterio de la raíz da la misma información. Pero, el recíproco no es verdad, es decir existen casos en que el criterio de la raíz da la convergencia de una serie y el del cociente no. Este es el caso de la serie dada en el ejemplo 8.2.11, para la cual $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ no existe. Ya que:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{2^{-(n+1)-(-1)^{n+1}}}{2^{-n-(-1)^n}} = \frac{2^{-n-1-(-1)^{n+1}}}{2^{-n-(-1)^n}} \\ &= 2^{-n-1-(-1)^{n+1}+n+(-1)^n} = 2^{-1-(-1)^n \cdot (-1)+(-1)^n} \\ &= 2^{-1+2(-1)^n}. \end{aligned}$$

La sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ no tiene límite pues,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2^{-1+2(-1)^n} = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

8.2.3. Series de términos alternados: criterio de Leibniz

Definición 8.2.14 Si a_n es positivo para cada n , la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ se llama serie alternada.

Teorema 8.2.15 Si la sucesión $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente que converge a cero, entonces la serie alternada $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ converge. Además, si S denota su suma y S_n es su n -ésima suma parcial, se tiene la desigualdad:

$$0 < (-1)^n (S - S_n) < a_{n+1}.$$

Demostración:

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1.$$

Por otra parte,

$$S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} > 0.$$

Por lo tanto, la sucesión $\{S_{2n}\}$ es una sucesión acotada creciente y por el teorema de las sucesiones monótonas, ella converge. Similarmente, $\{S_{2n-1}\}$, por ser una sucesión acotada decreciente, también es convergente. Estas sucesiones tienen el mismo límite, ya que

$$S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \rightarrow 0.$$

La convergencia de las sumas parciales $\{S_n\}$ se sigue del hecho que, para cada n existe m tal que

$$S_{2m} < S_n < S_{2m+1}.$$

La desigualdad del enunciado se sigue de las dos desigualdades siguientes:

$$\begin{aligned} (-1)^n (S - S_n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} a_{n+k} = \sum_{k=1}^{+\infty} (a_{n+2k-1} - a_{n+2k}) > 0. \\ (-1)^n (S - S_n) &= a_{n+1} - \sum_{k=1}^{+\infty} (a_{n+2k} - a_{n+2k-1}) < a_{n+1}. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 8.2.16 ■ La serie alternada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ es convergente como consecuencia del criterio de Leibniz.

En cambio, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ es divergente, como caso particular del ejemplo 8.2.5.

- La serie alternada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ es convergente como consecuencia del criterio de Leibniz.

En este caso, la serie de los valores absolutos $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente, como caso particular también del ejemplo 8.2.5.

8.2.4. Convergencia absoluta y condicional de series

Definición 8.2.17 ■ Diremos que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **converge absolutamente** si la

serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge.

- Si una serie converge y la la serie de sus valores absolutos diverge, diremos que es **condicionalmente convergente**.

Ejemplo 8.2.18 La serie alternada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} \quad \text{es} \quad \begin{cases} \text{absolutamente convergente si} & p > 1 \\ \text{condicionalmente convergente} & 0 < p \leq 1 \end{cases}$$

Teorema 8.2.19 Si $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

Criterios para convergencia condicional

Los criterios para la convergencia absoluta son los mismos que vimos para la convergencia de series de términos positivos. A seguir estableceremos algunos criterios para la convergencia condicional.

Teorema 8.2.20 Si $\{b_n\}$ es una sucesión decreciente y $\{A_n\}$ una sucesión acotada, entonces la serie $\sum_{b=1}^{\infty} A_n(b_n - b_{n+1})$ es absolutamente convergente.

Demostración:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^P |A_n(b_n - b_{n+1})| &\leq \sum_{n=1}^P K|b_n - b_{n+1}| = \\
&= K \cdot (b_1 - b_2) + K(b_2 - b_3) + \cdots + K(b_p - b_{p+1}) = \\
&= K(b_1 - b_{p+1}) \leq Kb_1.
\end{aligned}$$

Esto es, la sucesión de sumas parciales $S_p = \sum_{n=1}^P |A_n(b_n - b_{n+1})|$ es acotada. Como se trata de una serie de términos positivos debe ser convergente. $\square$

Teorema 8.2.21 Criterio de Abel: Sea (b_n) una sucesión positiva, monótona decreciente y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente. Se cumple que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n$ es convergente.

Demostración:

$$C_p = \sum_{n=1}^P b_n a_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_p b_p =$$

Consideramos a las sumas parciales

$$= A_1 b_1 + (A_2 - A_1) b_2 + \cdots + (A_p - A_{p-1}) b_p$$

donde $A_J = \sum_{n=1}^J a_n$ es una sucesión acotada.

Así :

$$C_p = A_1(b_1 - b_2) + A_2(b_2 - b_3) + \cdots + A_{p-1}(b_{p-1} - b_p) + A_p b_p$$

i.e.

$$C_p - A_p b_p = \sum_{n=1}^{p-1} A_n(b_n - b_{n+1}).$$

El resultado anterior asegura que la serie del lado derecho es convergente. Como $\lim_{p \rightarrow \infty} A_p = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\lim_{p \rightarrow \infty} b_p = b \geq 0$ se tiene que la sucesión de sumas parciales, $(C_p)_{p \in \mathbb{N}}$, es una sucesión convergente. $\square$

Teorema 8.2.22 Criterio de Dirichlet Sea $\{b_n\}$ una sucesión de términos positivos, monótona decreciente y tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$. Sea $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie cuyas sumas parciales

están acotadas y que no es necesariamente convergente. Entonces la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ es convergente.

Ejemplo 8.2.23 Si $a_n = (-1)^n$ entonces $A_J = 1$ ó 0 . Así, para cualquier sucesión positiva, monótona decreciente b_n , con límite igual a cero, se cumple que

$$-b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - \cdots, \text{ es convergente.}$$

En particular, para todo $\alpha > 0$, se tiene que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \in \mathbb{R}; \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(1+n)} \in \mathbb{R}.$$

Observación 8.2.24 La importancia de la convergencia absoluta y su gran diferencia con la convergencia condicional es mucho más profunda de lo que podríamos pensar en primera instancia. La convergencia absoluta de una serie implica la convergencia a la misma suma de cualquier arreglo entre los términos de la serie. Si la serie sólo converge condicionalmente, siempre existe un arreglo de sus términos de modo que la suma del arreglo converge a un número dado a priori. Esto lo establece el **teorema de Riemann**, cuya inclusión en este texto es sólo con fines de cultura matemática.

Definición 8.2.25 Sea $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una aplicación biyectiva y sean $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ dos series tales que

$$b_n = a_{\varphi(n)}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (8.5)$$

Entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ se llama una **reordenación** de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Teorema 8.2.26 Teorema de Riemann Sea $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie condicionalmente convergente. Dado $\Gamma \in \mathbb{R}$ existe una reordenación de ella que converge a Γ .

Demostración:

Definamos las sucesiones b_n y c_n por:

$$b_n = \begin{cases} a_n & \text{si } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{si } a_n < 0 \end{cases} \quad c_n = \begin{cases} 0 & \text{si } a_n \geq 0 \\ -a_n & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$

Tenemos que $a_n = b_n - c_n$ y $|a_n| = b_n + c_n$. Denotemos por A_n^* , B_n y C_n la n -ésima suma parcial de la serie de término general $|a_n|$, b_n y c_n , respectivamente.

Claro que $B_n = \frac{1}{2}(A_n + A_n^*)$ y $C_n = \frac{1}{2}(A_n - A_n^*)$.

De acuerdo a nuestra hipótesis A_n converge hacia un número y A_n^* crece hacia infinito, luego debe ser que $\sum b_n$ y $\sum c_n$ son series divergentes (caso contrario A_n^* debería tener límite).

Formemos ahora la serie, $\sum w_n$, de la siguiente forma :Se definen $w_1, w_2, \dots, w_{n_1}$ con la propiedad de que $w_i = b_i$ para $i = 1, 2, \dots, n_1$, donde n_1 es el primer índice para el cual $\sum_{i=1}^{n_1-1} b_i \leq \Gamma \leq \sum_{i=1}^{n_1} b_i$. Enseguida, definimos $w_{n_1+i} = c_i$ para $i = 1, 2, \dots, n_2$ donde n_2 es el primer índice para el cual se cumple $\sum_{i=1}^{n_1+n_2} w_i \leq \Gamma \leq \sum_{i=1}^{n_1+n_2+1} w_i$. Luego, definimos $w_{n_1+n_2+i} = b_{n_1+i}$ para $i = 1, 2, \dots, n_3$ donde n_3 es el primer índice para el cual se cumple $\sum_{i=1}^{n_1+n_2+n_3} w_i \leq \Gamma \leq \sum_{i=1}^{n_1+n_2+n_3+1} w_i$, y así sucesivamente.

Sea $W_n = \sum_{i=1}^n w_i$, la n -ésima suma parcial de la serie. Se cumplen las siguientes propiedades : $\Gamma \leq W_{n_1}$, $W_{n_1+n_2} \leq \Gamma$, $\Gamma \leq W_{n_1+n_2+n_3}$, $\dots$. Además, claramente, se cumple que: $|W_{n_1} - \Gamma| \leq |w_{n_1}|$, $|W_{n_1+n_2} - \Gamma| \leq |w_{n_1+n_2}|$, $|W_{n_1+n_2+n_3} - \Gamma| \leq |w_{n_1+n_2+n_3}|$ y, sucesivamente $|W_{n_1+n_2+n_3+\dots+n_i} - \Gamma| \leq |w_{n_1+n_2+n_3+\dots+n_i}|$. Observamos que entre un índice n_i y n_{i+1} se tiene $|W_{n_1+n_2+n_3+\dots+n_i} - \Gamma| \leq |W_{n_1+\dots+n_i+j} - \Gamma| \leq |W_{n_1+n_2+n_3+\dots+n_{i+1}} - \Gamma|$, para cada j con esta propiedad. Por lo tanto, tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = \Gamma$.

Como la serie, $\sum w_n$, contiene los términos de $\sum a_n$ y ceros, concluimos que constituyen una reordenación de a_n y, en consecuencia, tenemos el resultado anunciado. $\square$

8.2.5. Multiplicación de series de términos positivos

Sean $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ dos series cualesquiera. Si quisieramos hacer una multiplicación del tipo $(a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_k)(b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_p)$, procederíamos de la siguiente forma :

$$\begin{aligned} & (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_k)(b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_p) = \\ & = a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_0 b_2 + \dots + a_0 b_p + a_1 b_0 + \dots + a_1 b_p + \dots + a_k b_0 + \dots + a_k b_p \\ & = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \dots + (a_{k-1} b_p + a_k b_{p-1}) + a_k b_p \end{aligned}$$

Esto inspira la siguiente definición.

Definición 8.2.27 Llamaremos **serie producto (de Cauchy)** de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$

a la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, cuyo término general c_n está definido por la ecuación:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

Teorema 8.2.28 Si $a_n \geq 0$ y $b_n \geq 0$ y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \alpha$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \beta$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \alpha\beta$.

Demostración: Consideremos el siguiente cuadro:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_0 b_0 & a_1 b_0 & a_2 b_0 & a_3 b_0 & a_4 b_0 & \dots & & & \\ a_0 b_1 & a_1 b_1 & a_2 b_1 & a_3 b_1 & a_4 b_1 & \dots & & & \\ a_0 b_2 & a_1 b_2 & a_2 b_2 & a_3 b_2 & a_4 b_2 & \dots & & & \\ a_0 b_3 & a_1 b_3 & a_2 b_3 & a_3 b_3 & a_4 b_3 & \dots & & & \end{array}$$

Sea d_n la suma de todos los términos ubicados en el n -ésimo cuadrado y no los que son parte del cuadrado $(n-1)$.

$$\begin{aligned} d_0 &= a_0 b_0, \quad d_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \\ d_2 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \end{aligned}$$

Observamos que :

$$\begin{aligned} d_0 &= A_0 B_0 \\ d_1 &= (a_0 + a_1)(b_0 + b_1) - a_0 b_0 = A_1 B_1 - A_0 B_0 \\ d_2 &= (a_0 + a_1 + a_2)(b_0 + b_1) - A_1 B_1 = A_2 B_2 - A_1 B_1 \\ &\vdots \\ d_n &= A_n B_n - A_{n-1} B_{n-1} \end{aligned}$$

Haciendo la suma

$$d_0 + d_1 + \dots + d_n = A_n B_n$$

puesto que $A_n \rightarrow \alpha$, $B_n \rightarrow \beta$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} d_n = \alpha\beta$

□

8.2.6. Multiplicación de series en general

La multiplicación de series convergentes no es necesariamente convergente. Como ya hemos demostrado que si las series son de términos positivos, entonces su producto es convergente. La convergencia del producto falla cuando las series tienen términos que cambian de signo. A continuación veremos un caso.

Ejemplo 8.2.29 El producto de series condicionalmente convergentes no es necesariamente convergente Sean las series $\sum a_n, \sum b_n$ dadas por: $a_0 = a_1 = b_0 = b_1 = 0$, $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\log(n)}$, $n \geq 2$.

Si $d_n = \frac{1}{\log(n)}$, ella es monótona, decreciente con límite cero.

Para $c_n = (-1)^n$ la suma parcial $c_k = \sum_{j=2}^k c_j$ está acotada y luego, por el criterio de

Dirichlet, la serie $\sum_{n=2}^{\infty} c_n d_n$ es convergente, es decir,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n)} = \sum_{n \geq 2} a_n = \sum_{n \geq 2} b_n \in \mathbb{R}.$$

Vamos a considerar ahora la serie producto $\sum_{n \geq 0} c_n$, definida a partir de las series dadas.

$$\begin{aligned} c_n &= a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_{n-2} b_2 + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 \\ &= \frac{(-1)^2}{\log(2)} \frac{(-1)^{n-2}}{\log(n-2)} + \frac{(-1)^3}{\log(3)} \frac{(-1)^{n-3}}{\log(n-3)} + \dots + \frac{(-1)^{n-2}}{\log(n-2)} \frac{(-1)^2}{\log(2)} \\ &= (-1)^n \left[\frac{1}{\log(2) \log(n-2)} + \frac{1}{\log(3) \log(n-3)} + \dots + \frac{1}{\log(n-3) \log(3)} + \frac{1}{\log(2) \log(n-2)} \right] \end{aligned}$$

De forma que si n es par

$$c_n \geq \frac{n-3}{(\log(\frac{n}{2}))^2} \rightarrow \infty$$

y si n es impar, entonces

$$c_n \leq -\frac{n-3}{[\log(\frac{1}{2}(n-1))][\log(\frac{1}{2}(n+1))]} \rightarrow -\infty$$

Por lo tanto concluimos que la serie producto no converge, a pesar de que cada una de las series es convergente.

Así la convergencia de $\sum a_n$ y $\sum b_n$ no garantiza la convergencia de $\sum c_n$. Como vimos, en la sección anterior, la limitación $a_n \geq 0$ y $b_n \geq 0$ garantiza la convergencia de la serie producto.

Teorema 8.2.30 Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen absolutamente hacia α y β entonces $\sum c_n$ convergen absolutamente hacia $\alpha\beta$.

Demostración: Al igual que antes la suma

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1 + a_2b_0) + \dots$$

converge hacia el producto $\alpha\beta$.

Por otro lado como $\sum |a_n|$ y $\sum |b_n|$ convergen, se tiene que

$$|a_0b_0| + (|a_0b_1| + |a_1b_1| + |a_1b_0|) + (|a_0b_2| + |a_1b_2| + |a_2b_2| + |a_2b_1| + |a_2b_0|) + \dots$$

es convergente

Sean

$$\begin{aligned}\overline{d_0} &= |a_0b_0| \\ \overline{d_1} &= |a_0b_1| + |a_1b_1| + |a_1b_0| \\ \overline{d_2} &= |a_0b_2| + |a_1b_2| + |a_2b_2| + |a_2b_1| + |a_2b_0| \\ &\vdots\end{aligned}$$

Claro que $|d_i| \leq \overline{d_i}$.

Por lo tanto $\sum |d_i| \leq \sum \overline{d_i} \in \mathbb{R}$.

Así que $\sum d_i$ es absolutamente convergente (y luego $\sum d_i$ converge), es decir,

1. $a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1 + a_2b_0) + \dots$ converge absolutamente y luego
2. $a_0b_0 + a_0b_1 + a_1b_1 + a_1b_0 + a_0b_2 + a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1 + a_2b_0 + \dots$ converge absolutamente.

Sea σ esta suma. Como la expresión en (2) se obtiene de la expresión en (1) eliminando paréntesis tenemos $\sigma = \alpha\beta$.

Por otro lado

$$|c_n| \leq |a_0b_n| + |a_1b_{n-1}| + \dots + |a_nb_0|$$

y luego

$$\sum |c_n| \leq \overline{d_0} + \overline{d_1} + \overline{d_2} + \dots \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto $\sum c_n$ es absolutamente convergente. □

Ejemplo 8.2.31 Si a y b son números reales cualesquiera, fijos, se definen las series $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ y $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!}$. Calcularemos el producto de ambas series.

Solución:

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n,$$

donde

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^{k=n} a_k b_{n-k} = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + a_{n-2} b_2 + \dots + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n \\ &= \frac{a^n}{n!} + \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \frac{b^1}{1!} + \frac{a^{n-2}}{(n-2)!} \frac{b^2}{2!} + \dots + \dots + \frac{b^n}{n!} \end{aligned}$$

amplificando por $n!$, obtenemos:

$$c_n = \frac{(a+b)^n}{n!},$$

Por lo tanto la serie producto es

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a+b)^n}{n!}.$$

Teorema 8.2.32 Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen a α y β y si $\sum c_n$ converge a γ entonces $\gamma = \alpha\beta$.

Ejemplo 8.2.33 (a) Sea $\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\beta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ con $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \in \mathbb{R}$. En este caso $\alpha(x) \in \mathbb{R}$ y $\beta(x) \in \mathbb{R}$ para $|x| < 1$. Como $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \in \mathbb{R}$ entonces $c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \in \mathbb{R}$ para $|x| < 1$ y claro que $c(x) = \alpha(x)\beta(x)$. Para $x \rightarrow 1$, $c(1) = \gamma = \alpha\beta$.

(b) Probar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{1}{(n-1) \cdot 1} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{1 \cdot (n+1)} \right\} = (\log(2))^2$$

Solución: $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{n+1}, n \geq 0$

$$\sum a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \log(2)$$

$$\sum b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \log(2)$$

$$c_n = (-1)^n \left\{ \frac{1}{(n-1) \cdot 1} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{1 \cdot (n+1)} \right\}$$

Para n par

$$\begin{aligned} c_n &\leq 2 \left\{ \frac{1}{(n+1) \cdot 1} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{(\frac{1}{2}n+1)^2} \right\} \\ &= \int_1^{\frac{1}{2}n+1} \frac{dx}{x(n+2-x)} + \sigma\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{2}{n+2} \int_1^{\frac{1}{2}n+1} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{n+2-x} \right] dx + \sigma\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{2}{n+2} \log(n+1) + \sigma\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$c_n \leq \sigma(1) = K = \text{constante}$$

Análogamente para n impar $c_n = \sigma(1) \leq K$.

Sea $d_n = |c_n|$ entonces $d_{n-1} \geq d_n$

$$\begin{aligned} |c_{n-1}| - |c_n| &= \frac{1}{n-1} + \frac{1}{(n-1) \cdot 2} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{(n+1) \cdot 1} - \frac{1}{n-2} - \dots - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{n} \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right] + \frac{1}{n-1} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] + \dots + \frac{1}{1} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right] - \frac{1}{n+1} \\ &\geq \frac{1}{n} \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right] - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n+1} = 0 \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$|c_{n-1}| \geq |c_n|$$

Como $|c_n|$ es monótona decreciente, positiva y con límite cero, entonces

$$\begin{aligned} & |c_1| - |c_2| + |c_3| - |c_4| + \dots \\ \text{o} & -|c_1| + |c_2| - |c_3| + |c_4| - \dots \end{aligned}$$

convergen, esto es $\sum c_n \in \mathbb{R}$ por lo tanto

$$\sum c_n = \alpha\beta = (\log(2))^2$$

8.2.7. Criterios más específicos

Teorema 8.2.34 Criterio de Kummer: Supongamos que $b_n > 0, a_n > 0$ y que $\sum_{n=0}^{\infty} b_n =$

∞ (i.e. $\forall A \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=0}^N b_j \geq A$). Sea

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b_n} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \right).$$

Si $\alpha > 0$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge y si $\alpha < 0$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

Demostración: Supongamos que $\alpha > 0$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica que $\left(\frac{1}{b_n} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) > \frac{\alpha}{3}$. Multiplicando por a_{n+1} y dividiendo por $\frac{\alpha}{3}$, tenemos

$$a_{n+1} < \frac{3}{\alpha} \left[\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right],$$

luego $\sum_{j=N+1}^{N+p+1} a_j \leq \frac{3}{\alpha} \sum_{j=N}^{N+p} \left[\frac{a_j}{b_j} - \frac{a_{j+1}}{b_{j+1}} \right] = \frac{a_N}{b_N} - \frac{a_{N+p+1}}{b_{N+p+1}}$. Así la suma, $\sum_{j=N+1}^{N+p+1} a_j$, es acotada y como es creciente, tienen límite, que es lo que deseábamos probar. $\square$

Observación 8.2.35 ■ El criterio de la razón es un caso particular del criterio del Kummer cuando $b_n = 1, n \in \mathbb{N}$.

■ La forma general del criterio de Kummer es la siguiente: Sean

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b_n} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) \quad \text{y}$$

$$\beta = \overline{\lim}_n \left(\frac{1}{b_n} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \right)$$

Si $\alpha > 0$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente y si $\beta < 0$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es divergente.

Un caso particular del criterio de Kummer es el siguiente teorema.

Teorema 8.2.36 Criterio de Raabe Supongamos que $a_n > 0$ y

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\sigma}{n} + F(n); \quad \text{con} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot F(n) = 0.$$

Entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge si $\sigma > 1$ y diverge si $\sigma < 1$. En efecto; basta considerar $b_n = \frac{1}{n}$ y aplicar el criterio de Kummer.

Ejemplo 8.2.37 Analizar la convergencia de la serie de término general

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \frac{1}{n}.$$

Solución: En este caso:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(2n+2)(n+1)}{(2n+1)n} = 1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{4n(n+1/2)}.$$

De acuerdo al criterio de Raabe (en este caso $\sigma = 3/2$) la serie converge. Observe que el criterio de la razón no da ninguna información.

Observación 8.2.38 El Criterio de Raabe no otorga ninguna información cuando $\sigma = 1$. Para avanzar un poco más en estos casos se tiene el Criterio de Gauss.

Teorema 8.2.39 Criterio de Gauss Sea $a_n > 0$ y $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{t_n}{n \cdot \ln n}$.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n > 1$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente y si ocurre que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n < 1$ entonces la serie es divergente.

Otra consecuencia del criterio de Raabe y del criterio de Gauss es:

Teorema 8.2.40 Si $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\sigma}{n} + F(n)$, donde $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1+\delta} F(n) = 0$, para algún $\delta > 0$ entonces la serie converge si $\sigma > 1$ y diverge si $\sigma \leq 1$.

El caso $\sigma \neq 1$, es consecuencia de Raabe y el caso $\sigma = 1$ es consecuencia de Gauss.

Ejercicios resueltos

1. Calcule las siguientes sumas, si es que existen. Si no existen justifique por qué.

$$a) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{9}\right)^n$$

Solución: La serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge para $|r| < 1$ y $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{9}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{5}{9}} = \frac{9}{9-5} = \frac{9}{4}.$$

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{9}\right)^n$$

Solución: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{9}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{9}\right)^n - 1 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}.$

$$c) \sum_{n=5}^{+\infty} \left(\frac{5}{9}\right)^n$$

Solución:

$$\begin{aligned} \sum_{n=5}^{\infty} \left(\frac{5}{9}\right)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{9}\right)^n - \left(1 + \frac{5}{9} + \left(\frac{5}{9}\right)^2 + \left(\frac{5}{9}\right)^3 + \left(\frac{5}{9}\right)^4\right) \\ &= \frac{1}{1 - \frac{5}{9}} - \left[\frac{1 - \left(\frac{5}{9}\right)^5}{1 - \frac{5}{9}} \right] = \frac{1}{1 - \frac{5}{9}} - \frac{1}{1 - \frac{5}{9}} + \frac{\left(\frac{5}{9}\right)^5}{1 - \frac{5}{9}} \\ &= \frac{\left(\frac{5}{9}\right)^5}{1 - \frac{5}{9}} = \frac{5^5}{9^4} = \frac{5^5}{4 \cdot 9^4}. \end{aligned}$$

$$d) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{5}{9}\right)^n$$

Solución: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{5}{9}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{5}{9}\right)^n = \frac{1}{1 - \left(-\frac{5}{9}\right)} = \frac{9}{14}.$

$$e) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{5}{9}\right)^n$$

Solución: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{5}{9}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{5}{9}\right)^n - 1 = \frac{9}{14} - 1 = -\frac{5}{14}.$

f) $\sum_{n=5}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{5}{9}\right)^n$

Solución:

$$\begin{aligned} \sum_{n=5}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{5}{9}\right)^n &= \sum_{n=5}^{\infty} \left(-\frac{5}{9}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{5}{9}\right)^n - \left[1 - \frac{5}{9} + \left(\frac{5}{9}\right)^2 - \left(\frac{5}{9}\right)^3 + \left(\frac{5}{9}\right)^4\right] \\ &= \frac{1}{1 - \left(-\frac{5}{9}\right)} - \left[\frac{1 - \left(-\frac{5}{9}\right)^5}{1 - \left(-\frac{5}{9}\right)}\right] = \frac{1}{1 + \frac{5}{9}} - \frac{1}{1 + \frac{5}{9}} - \frac{\left(\frac{5}{9}\right)^5}{1 + \frac{5}{9}} \\ &= -\frac{\frac{5^5}{9^4}}{14} = -\frac{5^5}{14 \cdot 94}. \end{aligned}$$

2. Verifique que el número decimal $0,9999\dots$, con infinitos decimales iguales a 9 es 1.

Solución:

$$\begin{aligned} 0,9999\dots &= 0,9 + 0,09 + 0,009 + \dots \\ &= 9 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,01 + 9 \cdot 0,001 + 9 \cdot 0,0001 + \dots \\ &= 9[0,1 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 + \dots] \\ &= 9 \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots\right) = 9 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n\right) \\ &= 9 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n - 1\right) = 9 \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1\right) = 9 \left(\frac{10}{9} - 1\right) = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1. \end{aligned}$$

3. Generalice el ejercicio anterior para demostrar que el número:

$$[x],9999\dots = [x] + 1.$$

Solución: Usando el resultado anterior, tenemos: $[x], 999 \dots = [x] + 0, 9999 \dots = [x] + 1$.

4. Calcule las sumas parciales de las siguientes series y demuestre que:

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} (\arctan n - \arctan(n-1)) = \frac{\pi}{2}.$$

Solución: Esta es una serie telescópica, así:

$$\begin{aligned} v_k &= \sum_{n=1}^k (\arctan n - \arctan(n-1)) \\ &= (\arctan 1 - \arctan 0) + (\arctan 2 - \arctan 1) + \dots \\ &\quad + (\arctan k - \arctan(k-1)) \\ &= \arctan k - \arctan 0 = \arctan k. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\arctan n - \arctan(n-1)) = \lim_{k \rightarrow +\infty} v_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \arctan k = \pi/2.$$

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} (ne^{-nx^2} - (n-1)e^{-(n-1)x^2}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ +\infty & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Solución:

■ Si $x \neq 0$:

$$\sum_{n=1}^k (ne^{-nx^2} - (n-1)e^{-(n-1)x^2}) = ke^{-kx^2}$$

Como

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k}{e^{kx^2}} = 0.$$

$$\text{Entonces, } \sum_{n=1}^{\infty} (ne^{-nx^2} - (n-1)e^{-(n-1)x^2}) = 0$$

- Si $x = 0$, tenemos que:

$$\sum_{n=1}^k (n - (n-1)) = \sum_{n=1}^k 1 = k.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k (n - (n-1)) = +\infty.$$

5. Use el **criterio de la integral** para demostrar que las siguientes series convergen.

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$

Solución: Sea $a_n = \frac{1}{1+n^2}$ y $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \geq 0$, entonces $f(n) = a_n$ y f es monótona decreciente. El criterio de la integral asegura que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

si y sólo si $\int_1^{\infty} f(t)dt$ converge .

$$\int_1^n f(t)dt = \int_1^n \frac{dt}{1+t^2} = (\arctan t)_1^n = \arctan n - \arctan 1.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \arctan n = \frac{\pi}{2}$ entonces, $\int_1^{\infty} f(t)dt = \frac{\pi}{2} - 1$.

Como el criterio de la integral establece que si

$s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ y $I_n = \int_1^n f(t)dt$ entonces, $0 \leq s_n - I_n \leq a_1$. Se cumple que

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} s_n - \int_1^{\infty} f(t)dt \leq a_1.$$

Esto nos permite obtener una acotación para la suma de la serie:

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} - \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \leq \frac{1}{2}.$$

Esto es:

$$\frac{\pi}{2} - 1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \leq \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}.$$

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4 + 1}$$

$$c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n^4 + 1}$$

Solución: Sean $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$, $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Es inmediato que :
 $f(x) \leq g(x)$, para todo $x \geq 1$. Luego,

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx \leq \int_1^{+\infty} g(x)dx.$$

Luego, por criterio de comparacion la integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$ es convergente.

De esta forma, aplicando el criterio de la integral, se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^4} \text{ es convergente.}$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}.$$

Solución: Sea $f(x) = xe^{-x^2}$. para aplicar el criterio de la integral debemos demostrar que f es monotóna decreciente y positiva para $x \geq 1$. En efecto,

$$f'(x) = e^{-x^2} + xe^{-x^2}(-2x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2).$$

El signo de f' es el signo de $(1 - 2x^2)$. en particular, f' es negativa para $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Analicemos ahora la convergencia de la integral. Si $u = -x^2$, entonces $du = -2xdx$, entonces:

$$\begin{aligned} \int_1^n xe^{-x^2} dx &= -\frac{1}{2} \int_{-1}^{-n^2} e^u du = -\frac{1}{2} e^u \Big|_{-1}^{-n^2} \\ &= -\frac{1}{2} (e^{-n^2} - e^{-1}) = \frac{1}{2} (e^{-1} - e^{-n^2}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} e^{-1}$.

Por lo tanto, la integral converge.

6. Use el **criterio de la integral** para demostrar que las siguientes series divergen.

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$$

Solución: Sea $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. se deja como ejercicio verificar que esta función es positiva y monótona decreciente para $x \geq 1$. Para analizar la convergencia de la integral, hacemos el cambio de variable:

$$u = x^2 + 1, \quad du = 2x dx.$$

$$\begin{aligned} \int_1^n \frac{x}{x^2 + 1} dx &= \frac{1}{2} \int_2^{1+n^2} \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln u \Big|_2^{1+n^2} \\ &= \frac{1}{2} [\ln(1+n^2) - \ln 2]. \end{aligned}$$

Así, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{x}{1+x^2} dx = +\infty$. Por lo tanto la serie dada diverge, es decir:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{n}{r^2 + 1} = +\infty.$$

$$b) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

Solución: Sea $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$. se deja al estudiante el trabajo de verificar que f satisface las hipótesis del criterio de la integral. Usando el cambio de variable $u = \ln x, du = \frac{dx}{x}$.

$$\int_2^n \frac{dx}{x \ln x} = \int_{\ln 2}^{\ln n} \frac{du}{u} = \ln u \Big|_{\ln 2}^{\ln n} = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2).$$

Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_2^n \frac{dx}{x \ln x} = +\infty.$$

Lo que implica que la serie diverge, es decir: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} = +\infty$.

$$c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1 + \sqrt{n})}.$$

Solución: Sean $f(x) = (1 + \sqrt{x})^{-1}$, $g(x) = (1 + x)^{-1}$. Es inmediato que $g(x) \leq f(x)$.

$$\int_1^n \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) \Big|_1^n = \ln(1+n) + \ln(2).$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{dx}{1+x} = +\infty.$$

Así,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = +\infty.$$

Luego, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ diverge.

7. Use el **criterio de comparación** para demostrar que las siguientes series convergen.

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

Solución: Como $n^2 \leq 1 + n^2$ entonces, $\frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$.

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es una serie convergente, tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \in \mathbb{R}$.

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$$

Solución: Para todo $n \geq 1$,

$\frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{n^2}$. Por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \in \mathbb{R}$.

$$c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ne^{-n}}{n^2 + 1}.$$

Solución: Como $\frac{ne^{-n^2}}{n^2+1} \leq ne^{-n^2}$ y, en virtud del ejercicio resuelto 5d sabemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ es convergente. Por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ne^{-n^2}}{1+n^2} \in \mathbb{R}$.

8. Use el **criterio de comparación** para demostrar que las siguientes series divergen.

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}.$$

Solución: Para todo $n \geq 1$, $\sqrt{n} \geq 1$. Luego, $\frac{\sqrt{n}}{n+1} \geq \frac{1}{n+1}$.

Como $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$ es divergente, se tiene que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = +\infty$.

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3n+1}.$$

Solución: $\frac{1}{3n+1} = \frac{1}{3(n+1/3)}$ implica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1} =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3(n+1/3)} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1/3}.$$

Como $n+1/3 \leq n+1$ se tiene $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+1/3}$.

Usando que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty$, concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1/3} = +\infty$.

9. Use el **criterio de comparación al límite** para demostrar que las siguientes series convergen.

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 \exp(-2n)}{n^2+1}$$

Solución: Sea $a_n = \exp(-2n)$. Entonces la siguiente es una serie geométrica convergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-2})^n = \frac{1}{1-e^{-2}} - 1 = \frac{1}{e^2-1}.$$

Sea $b_n = \frac{n^2}{1+n^2}a_n$ entonces, $\frac{b_n}{a_n} = \frac{n^2}{1+n^2}$. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{1+n^2} = 1$.

Luego, por comparación al límite, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(n^2+1)^{3/2}}$$

Solución: Consideremos $a_n = \frac{4}{n^3}$ y $b_n = \frac{1}{(1+1/n^2)^{2/2}}$.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{n^3(1+n^{-2})^{3/2}} = \frac{4}{(n^2)^{3/2}(1+n^{-2})^{3/2}} \\ &= \frac{4}{(n^2(1+n^{-2}))^{3/2}} = \frac{4}{(n^2+1)^{3/2}}. \\ \frac{b_n}{a_n} &= \frac{1}{(1+1/n^2)^{3/2}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} &= 1. \end{aligned}$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^3} \in \mathbb{R}$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \in \mathbb{R}$.

$$c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n(n^2-3)^{3/2}}.$$

Solución: Sea $a_n = \frac{1}{(n^2-3)^{3/2}} = \frac{1}{(n^2)^{3/2}(1-3/n^2)^{3/2}} = \frac{1}{n^3(1-3/n^2)^{3/2}}$.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}$.

Sea $b_n = a_n \cdot \frac{2n+1}{n}$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n} = 2$ se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \in \mathbb{R}$.

10. Si $\lambda \geq 0$ y $a_n = \frac{1}{n^\lambda}$, analizar la convergencia de la serie de término general a_n .

Solución: Para esto consideramos la función $f(x) = (x)^{-\lambda}$, definida para $x \geq 1$. Esta función es monótona decreciente, no negativa y $f(n) = a_n$. Tenemos que

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \frac{x^{-\lambda+1}}{-\lambda+1} \Big|_1^{\infty},$$

caso $\lambda \neq 1$ y la integral es igual a $\log |x|_1^\infty$, caso $\lambda = 1$. De acuerdo con el criterio de la integral concluimos que la serie es convergente si $\lambda > 1$ y divergente en otro caso.

11. Para $\lambda > 0$, analizar la convergencia de la serie de término general

$$a_n = \frac{1}{n \cdot (\log n)^\lambda}.$$

Solución: Sea $f(x) = x^{-1}(\log x)^{-\lambda}$. Para $\lambda \geq 0$ y $x > 1$ se cumple que f es integrable, monótona decreciente y no negativa.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x(\log x)^\lambda} = \begin{cases} \log(\log x)|_{\log 2}^\infty, & \lambda = 1 \\ \frac{u^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}|_{\log 2}^\infty, & 0 \leq \lambda < 1, \lambda > 1; \end{cases} = \begin{cases} \infty, & 0 \leq \lambda < 1 \\ \frac{(\log 2)^{1-\lambda}}{\lambda-1}, & \lambda > 1 \end{cases}$$

De esta forma, la serie de término general $a_n = \frac{1}{n(\log n)^\lambda}$ diverge para $0 \leq \lambda \leq 1$. y converge para $\lambda > 1$.

12. Para $\lambda < 0$, demuestre la divergencia de las series de términos generales :

$$\begin{aligned} & \blacksquare \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\log n)^\lambda}. \\ & \blacksquare \sum_{n=3}^\infty \frac{1}{n \log n (\log(\log n))^\lambda}. \\ & \blacksquare \sum_{n=16}^\infty \frac{1}{n \log(n) \log(\log n) (\log(\log(\log n)))^\lambda}. \end{aligned}$$

Solución: En efecto; sea $a_n = \frac{1}{n \log n (\log(\log n))^\lambda}$; $b_n = \frac{1}{n \log n}$. Como $a_n \geq b_n$ por criterio de comparación tenemos que $\sum_{n=3}^\infty a_n$ diverge.

Sucesivamente se hacen comparaciones para probar la divergencia de estas series. Es posible probar(ejercicio) que estas series son convergentes para $\lambda > 1$ y son divergentes para $\lambda \leq 1$.

13. Analizar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + n^{-\lambda}).$$

Solución: Si $\lambda < 0$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \log(1 + n^{-\lambda}) = \infty$ y la serie es divergente.

Para $\lambda \geq 0$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + n^{-\lambda})}{n^{-\lambda}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(1 + n^{-\lambda} \right)^{\frac{1}{n^{-\lambda}}} = 1$.

Así, $a_n = \log(1 + n^{-\lambda})$ y $b_n = n^{-\lambda}$ son comparable.

Concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + n^{-\lambda})$ diverge para $\lambda \leq 1$ y converge para $\lambda > 1$.

14. Sean α, β y γ números reales positivos, analizar la convergencia de la serie.

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2\gamma \cdot (\gamma+1)} + \dots$$

Solución: En este caso se tiene : $a_0 = 1, a_1 = \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma}$,

$$a_2 = \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)}, \dots, a_n = \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)\beta(\beta+1) \cdots (\beta+n-1)}{1 \cdot 1 \cdots n\gamma(\gamma+1) \cdots (\gamma+n-1)}.$$

Así,

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)\beta(\beta+1) \cdots (\beta+n-1)}{1 \cdots n\gamma(\gamma+1) \cdots (\alpha+n-1)} \cdots \frac{1 \cdot 2 \cdots (n+1)\gamma(\gamma+1) \cdots (\gamma+n)}{\alpha \cdots (\alpha+n)\beta \cdots (\beta+n)} = \\ &= \frac{(n+1)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)} = \frac{n^2 + (\gamma+1)n + \gamma}{n^2 + (\alpha+\beta)n + \alpha\beta} = \\ &= \frac{n^2 + (\alpha+\beta)n + \alpha\beta}{n^2 + (\alpha+\beta)n + \alpha\beta} + \frac{(\gamma+1 - (\alpha+\beta))n}{n^2 + (\alpha+\beta)n + \alpha\beta} + \frac{\gamma - \alpha \cdot \beta}{n^2 + (\alpha+\beta)n + \alpha\beta} \end{aligned}$$

Sea $F(n) = \frac{\gamma - \alpha \cdot \beta}{n^2 + (\alpha+\beta)n + \alpha\beta}$. Es claro que $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1+\delta} F(n) = 0$ para $0 < \delta < 1$

así que usando el colorario al criterio de Gauss tenemos que si $\gamma - (\alpha + \beta) \leq 0$ entonces la serie es divergente (i.e. si $\gamma \leq \alpha + \beta$). Si la relación $\gamma - (\alpha + \beta) > 0$ se cumple entonces la serie es convergente (i.e. si $\gamma > \alpha + \beta$).

Ejercicios propuestos

1. Calcule las siguientes sumas, si es que existen. Si no existen justifique por qué.

$$a) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{9}{5}\right)^n$$

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{9}{5}\right)^n$$

$$c) \sum_{n=5}^{+\infty} \left(\frac{9}{5}\right)^n$$

$$d) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{9}{5}\right)^n$$

$$e) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{9}{5}\right)^n$$

$$f) \sum_{n=5}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{9}{5}\right)^n$$

2. Calcule las sumas parciales de las siguientes series y demuestre que:

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Indicación: Use fracciones parciales.

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+3)} = \frac{7}{36}$$

Indicación: Use fracciones parciales.

3. Use el **criterio de la integral** para demostrar que las siguientes series convergen.

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n^2}$$

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n^2+4)^2}$$

4. Use el **criterio de la integral** para demostrar que las siguientes series divergen.

$$a) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$$

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+3}{(n+1)(n+2)}$$

$$c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+\sqrt{n})}.$$

5. Use el **criterio de comparación** para demostrar que las siguientes series convergen.

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(n^2+1)^{3/2}}$$

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}.$$

6. Use el **criterio de comparación** para demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ diverge.

7. Use el **criterio de comparación al límite** para demostrar que las siguientes series convergen.

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)^{1/2}}$$

$$b) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(8n^2+1)^{2/3}}.$$

8. Un corolario útil del criterio de comparación al límite es el siguiente teorema que se suele llamar **criterio polinomial**:

Si $P(n)$ es un polinomio de grado p y $Q(n)$ es un polinomio de grado q , la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$$

- Converge si $q > p + 1$.
- Diverge si $q \leq p + 1$.

a) Demuestre el criterio polinomial

b) Use el criterio polinomial para analizar la convergencia de las siguientes series:

$$\begin{aligned} & \blacksquare \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3 + 1} \\ & \blacksquare \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7n^2 - 5n}{n^2 + 1} \\ & \blacksquare \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + n - 1}{n^3 + 1} \\ & \blacksquare \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 + 1}{(n^2 - 1)^3} \\ & \blacksquare \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n^2 - 1)^3}{n^3 + 1} \end{aligned}$$

9. Demuestre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{n+n} \right) = \ln 2$. Para ello:

a) Escriba $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{n+n}$ como una suma de Riemann de $f(x) = \frac{1}{x}$ en $[1, 2]$.

b) Justifique porqué dicha suma converge a $\int_1^2 f(x) dx$.

10. Usando el mismo razonamiento del ejercicio anterior demuestre que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \frac{n}{n^2 + 3^2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

11. Usando el mismo razonamiento de los ejercicios anteriores demuestre que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sin \frac{k\pi}{n} \right) = \frac{2}{\pi}.$$

8.3. Series de potencias

8.3.1. Series de Funciones

Para $x \in \mathbb{R}$ consideremos la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. Esta serie puede converger para algunos valores de x y diverger para otros. En general, la convergencia se da en intervalos. Si la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge para todo x en algún intervalo cerrado $[a, b]$, entonces se puede definir una función con dominio $[a, b]$ tal que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

En estos casos podemos deducir propiedades de la función f a partir de las propiedades de la serie o viceversa. A veces, al resolver ecuaciones diferenciales lineales usando series de potencias, surge el problema de estudiar propiedades de la función definida mediante una serie. Otras veces, dada una función f se quiere desarrollarla en serie, este es el caso de las series de Taylor y de Fourier.

Para el estudio de las propiedades de funciones definidas mediante series, es importante observar el tipo de convergencia.

En las series numéricas tenemos dos tipos de convergencia: convergencia absoluta y convergencia condicional o simple.

Para el caso de las series o sucesiones de funciones tenemos convergencia puntual o simple y convergencia uniforme. La convergencia puntual, es cuando la propiedad de ser convergente depende del “ x ” considerado.

Definición 8.3.1 Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función real. Diremos que la sucesión de funciones $\{f_n\}$ **converge puntualmente o simplemente** a la función f si para cada $x \in [a, b]$ y cada $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$, $N_0 = N_0(\varepsilon, x)$, tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para $n \geq n_0(\varepsilon, x)$.

Lo importante de esta definición es notar que el N_0 a partir del cual la definición de convergencia se realiza depende de ε y de x como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8.3.2 Consideremos la sucesión de funciones $\{f_n\}$, donde cada $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por $f_n(x) = x^n$. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, la función definida por $f(x) = 0$ si $0 \leq x < 1$ y $f(1) = 1$.

Demostraremos que la sucesión $\{f_n\}$, converge puntualmente a la función f . Para ello debemos buscar un número natural N_0 tal que $|x^n| \leq \varepsilon$ si $n \geq N_0$, esto es,

$$n \log x \leq \log \varepsilon.$$

Despejando n tenemos que,

$$n \geq \frac{\log \varepsilon}{\log x}.$$

Así, si $n \geq \left\lceil \frac{\log \varepsilon}{\log x} \right\rceil$ = parte entera del número $\frac{\log \varepsilon}{\log x}$ entonces $|x^n| < \varepsilon$.

Observemos que, $N_0(\varepsilon, x) = \left\lceil \frac{\log \varepsilon}{\log x} \right\rceil$ depende claramente de ε y de x . Además, este N_0 vale para $x \neq 0$ y $x \neq 1$.

Para analizar la convergencia de la sucesión en $x = 1$, observemos que $f_n(1) = 1^n = 1$, para cualquier n . es decir en este caso tenemos la sucesión constante 1, la cual es trivialmente convergente a 1. Por lo tanto, en este caso, $N_0(\varepsilon, 1) = 1$. De manera análoga, tenemos que para $x = 0$, la sucesión es la sucesión constante 0, entonces también podemos escoger $N_0(\varepsilon, 0) = 1$. En síntesis,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x), \quad \text{donde}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Definición 8.3.3 Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función real. Diremos que la sucesión de funciones $\{f_n\}$ **converge uniformemente** a la función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$, $N_0 = N_0(\varepsilon)$, tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para cada $n \geq N_0$ y $x \in [a, b]$.

Para la convergencia uniforme el N_0 depende solamente de ε y es el mismo para todo punto x , de ahí el nombre **uniforme**. De esto, podemos concluir que el concepto de convergencia uniforme es más fuerte que el de convergencia puntual. Así, tenemos que:

$$\begin{array}{lll} \text{convergencia uniforme} & \implies & \text{convergencia puntual} \\ \text{convergencia puntual} & \not\implies & \text{convergencia uniforme} \end{array}$$

Ejemplo 8.3.4 La sucesión de funciones del ejemplo 8.3.2 converge puntualmente, pero no uniformemente. La convergencia no puede ser uniforme ya que si $\varepsilon < 1/2$ entonces siempre existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_1$ implica $x^n > \varepsilon$ para algún $x \in]0, 1[$. En efecto, basta que se cumpla que $x^n \geq 1/2$ i.e. $n \log x \geq -\log 2$.

Las definiciones 8.3.1 y 8.3.3 pueden aplicarse a las series de funciones, procediendo como en el caso de las series numéricas, a considerar la sucesión de las sumas parciales de la serie.

Sea, $S_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la sucesión de sumas parciales asociada a la serie de funciones de término general f_n . Esta sucesión está dada por : $S_n(x) = \sum_{j=1}^n f_j(x)$. Para cada n se tiene que S_n es una función de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$.

Definición 8.3.5 Diremos que la serie de funciones término general f_n **converge**

- **puntualmente** a la función $S(x)$ si la sucesión de sus sumas parciales converge puntualmente a $S(x)$.
- **uniformemente** a la función $S(x)$ si la sucesión de sus sumas parciales converge uniformemente a $S(x)$.

En ambos casos escribiremos $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = S(x)$, especificando en palabras el tipo de convergencia.

Teorema 8.3.6 Criterio de Cauchy La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ es uniformemente convergente si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N(\varepsilon)$ tal que $\left| \sum_{j=n+1}^{n+p} f_j(x) \right| < \varepsilon$ para cada $n \geq N(\varepsilon)$, cada $p \in \mathbb{N}$ y cada $x \in [a, b]$.

Un segundo criterio para la convergencia uniforme es

Teorema 8.3.7 Criterio de Weierstrass Si existe una serie numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ convergente, tal que

$$|f_n(x)| \leq M_n, \quad \text{para todo } x \in [a, b], \quad n \in \mathbb{N},$$

entonces la serie de funciones $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ es uniformemente y absolutamente convergente.

Ejemplo 8.3.8 La serie de término general $f_n(x) = \frac{x^n}{n^3}$ es uniformemente convergente para $|x| \leq 1$. En efecto,

$$|f_n(x)| = \left| \frac{x^n}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3} \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 8.3.9 1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$ converge absoluta y uniformemente en $[a, b]$.

Pues, $\left| \frac{1}{n^2 + x^2} \right| = \frac{1}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n^2}$, ya que $x^2 \geq 0$ y la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente.

2. $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}$ converge absoluta y uniformemente en $[a, b]$.

Como $\frac{\pi^2}{3}$ no depende de x , basta aplicar el criterio a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}$ comparándola con $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Otros criterios para la convergencia uniforme son los siguientes:

Teorema 8.3.10 Supongamos que :

1. La sucesión de funciones $b_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ satisface:

- Para cada $x \in [a, b]$ la sucesión $\{b_n(x)\}$ es monótona decreciente,
- $b_n(x) \leq K$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x \in [a, b]$.

2. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ es uniformemente convergente en $[a, b]$.

Entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x)$ es uniformemente convergente.

Ejemplo 8.3.11 Consideremos $b_n(x) = |x|^n$, $-1 \leq x \leq 1$ y $a_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$. La sucesión $b_n(x)$ satisface las hipótesis del teorema 8.3.10 y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ es uniformemente convergente. Por lo tanto, podemos concluir que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ es uniformemente convergente para $-1 \leq x \leq 1$.

Teorema 8.3.12 Supongamos que :

1. la sucesión de funciones $b_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ satisface:

- Para cada $x \in [a, b]$ la sucesión $\{b_n(x)\}$ es monótona decreciente,
- La sucesión $\{b_n(x)\}$ converge uniformemente a la función nula en $[a, b]$.

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in [a, b]$ se cumple que $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)| \leq C$, para algún $C \in \mathbb{R}$

entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)b_n(x)$ converge uniformemente en $[a, b]$.

Ejemplo 8.3.13 La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\log n + 1}\right)^x \frac{x^n}{n^2}$ es uniformemente convergente en $[\theta, 1]$.

para cada $0 < \theta < 1$.

En efecto,

$$\left(\frac{1}{\log n + 1}\right)^x \leq [\log(n + 1)]^{-\theta},$$

para cada $\theta \in]0, 1[$ y $x \in [\theta, 1]$. Por lo tanto, es una sucesión monótona decreciente que converge a la función nula y se tiene

$$\left|\sum_{n=1}^N \frac{x^n}{n^2}\right| \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \leq C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

8.3.2. Propiedades de las series uniformemente convergentes

La convergencia uniforme tiene algunas propiedades que la hacen especialmente útil en el cálculo diferencial e integral. Estas son:

Si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en $[a, b]$ a la función $f(x)$, entonces se tiene:

1. Continuidad de la función suma

Si para cada $n \in \mathbb{N}$, f_n es continua en $x = x_0$ entonces. f es continua en $x = x_0$.

2. Integración término a término

Si cada f_n es continua en $[a, b]$ y $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$, entonces

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx \text{ converge uniformemente al número } \int_a^b f(x) dx.$$

3. Diferenciación término a término

Si cada f_n tiene derivada continua en $[a, b]$, $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ converge uniformemente en $[a, b]$, y $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ entonces, f es derivable en x y

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x).$$

Ejemplo 8.3.14 Para $-1 < x < 1$ vamos a calcular el valor de la serie.

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \frac{8x^7}{1+x^8} + \cdots$$

Consideramos la serie

$$\log(1-x) + \log(1+x) + \log(1+x^2) + \log(1+x^4) + \cdots$$

Su suma enésima es

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \log \left((1-x) \cdot (1+x)(1+x^2) \cdots (1+x^{2^{n-1}}) \right) \\ &= \log \left((1-x^2)(1+x^2) \cdots (1+x^{2^{n-1}}) \right) \\ &= \log(1-x^{2^n}) \end{aligned}$$

Es inmediato que esta suma tiende a cero para $|x| < 1$.

Así, $\log(1+x^2) + \log(1+x^4) + \cdots$ converge uniformemente a $-\log(1-x) - \log(1+x)$. De acuerdo al resultado anterior la serie de derivadas de esta serie de logaritmos converge a la derivada de la función límite, es decir:

$$\frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \cdots = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}.$$

Concluimos entonces que

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

8.3.3. Series de potencias

Un caso especial de series de funciones es el que se obtiene al considerar las aplicaciones,

$$f_n(x) = a_n(x - x_0)^n, \quad a_n \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

Aquí usaremos la convención $(x - x_0)^0 = 1$ y estudiaremos las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n,$$

en que algunos términos a_n pueden ser cero.

Con respecto a estas series surgen dos problemas fundamentales:

1. Si la serie converge para todos los x en algún intervalo, entonces podemos definir la función suma $S(x)$.
En este caso, quisiéramos conocer las propiedades de esta función a partir de las propiedades de la serie.
2. También enfrentaremos el problema recíproco. Dada una función con ciertas propiedades, quisiéramos desarrollar la función en una serie de potencias de modo que ésta converja para algunos valores de x hacia la función dada.

Existen algunas funciones no elementales que se definen mediante series, como la función hipergeométrica y la función de Bessel.

Convergencia de una serie de potencias Una serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$$

tiene tres alternativas en cuanto a su convergencia:

1. Converge sólo para $x = x_0$.
2. Converge para todo $x \in \mathbb{R}$.
3. Converge en algún intervalo simétrico en torno al punto $x = x_0$.

Teorema 8.3.15 Si la serie de potencias $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge en $x-x_0 = b, b \neq 0$ la serie es absolutamente convergente para todo x en $|x-a| < |x_0|$ y converge uniformemente en $|x-x_0| \leq M|b|$, para todo M tal que $0 < M < 1$.

Demostración: Si $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge en $b = x-x_0$, entonces $a_nb^n \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow +\infty$.

Como la sucesión $\{a_nb^n\}$ es convergente, ella es acotada. Entonces, existe $M > 0$ tal que

$$|a_nb^n| \leq M,$$

para cualquier x en el intervalo,

$$|x-x_0| < |b|.$$

Así, existe un r tal que,

$$\left| \frac{x-x_0}{b} \right| \leq r < 1$$

Usando criterio de comparación entre,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n(x-x_0)^n| \text{ y } \sum_{n=0}^{+\infty} Mr^n \text{ que es una serie geométrica, tenemos}$$

$$|a_n(x-x_0)^n| = |a_nb^n| \cdot \left| \frac{x-x_0}{b} \right|^n \leq Mr^n.$$

Como $0 < r < 1$, la serie geométrica converge y por criterio de Weierstrass la convergencia de la serie de potencias es uniforme y absolutamente en el intervalo,

$$|z-x_0| \leq r|b|.$$

□

Observación 8.3.16 Si la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge al menos para un $x \neq x_0$, entonces para algun $b = x-x_0 \neq 0$. Por el teorema anterior, existe al menos un intervalo abierto

$$|x-x_0| < |b|,$$

en el cual la serie converge absolutamente.

Es obvio, por criterio de comparación, que converge absolutamente para todos los x t.q. $|x - x_0|$ es menor que $|x - c|$ si se sabe que $\sum a_n(x - c)^n$ es convergente.

Por lo tanto, podemos pensar en el supremo R de los números r que satisfacen la condición:

$$|x - x_0| < r \quad \text{es absolutamente convergente.}$$

Obviamente, la serie diverge para los x tales que

$$|x - x_0| > R.$$

A este R , se le llama **radio de convergencia** de la serie de potencias.

Definición 8.3.17 Dada la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$,

- Se llama **radio de convergencia** de la serie al número R tal que

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

- Se llama **intervalo de convergencia** de la serie al intervalo centrado en x_0 y de radio R , es decir, al conjunto:

$$|x - x_0| < R.$$

Observación 8.3.18 La forma más fácil de calcular el radio de convergencia de la serie

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ es usando el criterio de la razón. Es decir:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Alternativamente, se puede calcular el intervalo de convergencia calculando $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x - x_0)^{n+1}}{a_n(x - x_0)^n} \right|$ e imponiendo a esta expresión la condición de convergencia del criterio de la raíz. En los ejercicios resueltos se usará este método.

Teorema 8.3.19 La serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$$

cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones:

1. La serie converge solamente para $x = x_0$
2. Converge absolutamente y uniformemente en cualquier intervalo cerrado y acotado.
3. Existe $R > 0$ tal que la serie es absolutamente convergente para todo x tal que $|x - x_0| < R$, y divergente para todo $|x - x_0| > R$, y es uniformemente convergente en cualquier intervalo cerrado contenido en $|x - x_0| < R$, es decir, en intervalos $|x - x_0| \leq M < R$.

Ejemplo 8.3.20 Consideramos la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n+1} (x-3)^n$.

Para obtener el radio de convergencia usamos la expresión anterior:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-2)^{n+1}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{(-2)^n} \right| = 2.$$

Así, la serie converge para $|x - 3| < 1/2$ o lo que es lo mismo converge para

$$\frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}.$$

Ahora debemos analizar separadamente los extremos del intervalo.

Para $x = 5/2$, tenemos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n+1} \left(\frac{5}{2} - 3 \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Esta es la serie armónica y, consecuentemente, diverge.

Si $x = 7/2$ tenemos,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n+1} \left(\frac{1}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Esta es la serie armónica alternada y, luego, converge. De esta forma concluimos que la serie dada converge para

$$\frac{5}{2} < x \leq \frac{7}{2}$$

y su radio de convergencia es $\frac{1}{2}$.

Ejemplo 8.3.21 La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} n!(x-x_0)^n$ converge solamente para $x = x_0$. en efecto:

Si $x \neq x_0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)!(x-x_0)^{n+1}}{n!(x-x_0)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| (n+1)(x-x_0) \right| \\ &= |x-x_0| \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el radio de convergencia R vale 0, lo que significa que la serie converge solamente para $x = x_0$.

Ejemplo 8.3.22 La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!}$ tiene radio de convergencia $R = +\infty$.

En efecto, si $x \neq x_0$, tenemos:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{(x-x_0)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x-x_0}{n+1} \right| = 0.$$

La serie converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$, es decir $R = +\infty$. En particular, converge uniformemente en todo intervalo cerrado y acotado.

Ejemplo 8.3.23 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^n}{3n+1}$

Si $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} 2^{n+1}}{3n+4} \cdot \frac{3n+1}{(-1)^n 2^n} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left| \frac{3n+1}{3n+4} \right| = 2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $R = \frac{1}{2}$.

Ahora debemos analizar que sucede en los extremos del intervalo centrado en 0 y de radio $\frac{1}{2}$. es decir, para $|x| = \frac{1}{2}$.

- Si $x = \frac{1}{2}$, la serie es $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ la cual converge por criterio de series alternadas.

- Si $x = -\frac{1}{2}$, la serie diverge $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3n+1}$

Ejemplo 8.3.24 Encuentre el intervalo de convergencia y estudie separadamente lo que sucede en sus extremos para la serie,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n y^n}{(2n+1)^2 3^{n+1}}.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{[2(n+1)+1]^2 3^{n+2}} \cdot \frac{(2n+1)^2 3^{n+1}}{(1)^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(-1) \cdot (2n+1)^2}{3[2n+3]^2} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{4n^2 + 4n + 1}{4n^2 + 12n + 9} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{4n^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^2}\right)}{4n^2 \left(1 + \frac{3}{n} + \frac{9}{4n^2}\right)} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

La serie converge absolutamente en el intervalo $] -3, 3[$. El estudio en los extremos se deja de ejercicio.

Ejemplo 8.3.25 Encontrar el intervalo de convergencia sin analizar lo que pasa en los extremos para la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n x^n}{n!}.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \left[\frac{n+1}{n} \right] \cdot \frac{(n+1)n!}{(n+1)!} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e. \end{aligned}$$

Así vemos que, la serie converge absolutamente cuando x es tal que

$$|x| < \frac{1}{e}.$$

Ejemplo 8.3.26 Observemos que si $R = 1$ y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}$ entonces $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ es una función bien definida en $|x - x_0| \leq 1$.

Consideremos la serie $1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 \dots$ cuya suma, para $|t| < 1$, es $(1 + t^2)^{-1}$.

Integrando término a término obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \end{aligned}$$

Por otro lado, como $\frac{d}{dt} \arctan t = \frac{1}{1+t^2}$, tenemos $\int_0^x \frac{d}{dt}(\arctan t) dt = \arctan x - \arctan 0 = \arctan x$. Luego,

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \pm \dots$$

Como $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, tenemos :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Despejando π , nos queda,

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \dots$$

que puede ser considerada como una definición del número π y permite calcular valores aproximados de él con el grado de exactitud que uno quiera.

Operaciones con series de potencias

Teorema 8.3.27 Si

- $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - a)^n$, en $|x - a| < R_1$,
- $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x - a)^n$, en $|x - a| < R_2$,

entonces:

$$f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n)(x-a)^n, \quad \text{en } |x-a| < R$$

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) (x-a)^n, \quad \text{en } |x-a| < R,$$

donde $R = \min\{R_1, R_2\}$.

Ejercicios resueltos

1. Para cada una de las siguientes series de potencias, determine su intervalo y radio de convergencia:

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

Solución: Sea $a_n = x^n$, entonces $a_{n+1} = x^{n+1}$. Usando el criterio de la razón tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} |x| \\ &= |x| \end{aligned}$$

Luego, la serie converge si:

$$|x| < 1 \iff -1 < x < 1$$

Luego, el radio de convergencia es $R = 1$. En cuanto al intervalo de convergencia, estudiemos que ocurre en los valores extremos de $] -1, 1[$.

- Si $x = 1$, la serie es,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 1^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 = +\infty$$

Luego, en $x = 1$ la serie diverge.

- Si $x = -1$, la serie es,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$$

La cual, en virtud del criterio de divergencia (ver 1f), es divergente; luego en $x = -1$ la serie diverge.

Así, el intervalo de convergencia de la serie es $] - 1, 1[$

$$b) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$$

Solución: Sea $a_n = (-1)^n x^n$, entonces $a_{n+1} = (-1)^{n+1} x^{n+1}$. Usando el criterio de la razón tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{(-1)^n x^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} |-x| \\ &= |x| \end{aligned}$$

Luego, la serie converge si:

$$|x| < 1 \iff -1 < x < 1$$

Luego, el radio de convergencia es $R = 1$. En cuanto al intervalo de convergencia, estudiemos que ocurre en los valores extremos de $] - 1, 1[$.

- Si $x = 1$, la serie es,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n 1^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$$

La cual, en virtud del criterio de divergencia (ver 1f), es divergente; luego en $x = 1$ la serie diverge.

- Si $x = -1$, la serie es,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (-1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 = +\infty$$

Luego, en $x = -1$ la serie diverge.

Así, el intervalo de convergencia de la serie es $] - 1, 1[$

$$c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

Solución: Sea $a_n = \frac{x^n}{n}$, entonces $a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Usando el criterio de la razón tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{n+1}{n} \cdot x \right| \\ &= |x| \end{aligned}$$

Luego, la serie converge si:

$$|x| < 1 \iff -1 < x < 1$$

Luego, el radio de convergencia es $R = 1$. En cuanto al intervalo de convergencia, estudiemos que ocurre en los valores extremos de $] -1, 1[$.

- Si $x = 1$, la serie es,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

La cual, en virtud del ejemplo 8.2.5 es divergente; luego en $x = 1$ la serie diverge.

- Si $x = -1$, la serie es,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

La cual, en virtud del criterio de Leibniz es convergente; luego, en $x = -1$ la serie converge

Así, el intervalo de convergencia de la serie es $[-1, 1[$

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

Solución: Sea $a_n = \frac{x^n}{\sqrt{n}}$, entonces $a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$. Usando el criterio de la razón tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\frac{x^n}{\sqrt{n}}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{x^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot x \right| \\ &= |x| \end{aligned}$$

Luego, la serie converge si:

$$|x| < 1 \iff -1 < x < 1$$

Luego, el radio de convergencia es $R = 1$. En cuanto al intervalo de convergencia, estudiemos que ocurre en los valores extremos de $] -1, 1[$.

- Si $x = 1$, la serie es,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$$

La cual, en virtud del ejemplo 8.2.5 es divergente; luego en $x = 1$ la serie diverge.

- Si $x = -1$, la serie es,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

La cual, en virtud del criterio de Leibniz es convergente; luego, en $x = -1$ la serie converge

Así, el intervalo de convergencia de la serie es $[-1, 1[$

$$e) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n+1)^2 \cdot 3^{n+1}}$$

Solución: Sea $a_n = \frac{(-1)^n x^n}{(2n+1)^2 \cdot 3^{n+1}}$, entonces $a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{(2n+3)^2 \cdot 3^{n+2}}$. Usando el criterio de la razón tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{(2n+3)^2 \cdot 3^{n+2}}}{\frac{(-1)^n x^n}{(2n+1)^2 \cdot 3^{n+1}}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{(2n+3)^2 \cdot 3^{n+2}} \cdot \frac{(2n+1)^2 \cdot 3^{n+1}}{(-1)^n x^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(-1)x(2n+1)^2}{3(2n+3)^2} \right| \\ &= \left| \frac{x}{3} \right| \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(2n+1)^2}{(2n+3)^2} \right| \\ &= \left| \frac{x}{3} \right| \end{aligned}$$

Luego, la serie converge si:

$$\left| \frac{x}{3} \right| < 1 \iff -3 < x < 3$$

Luego, el radio de convergencia es $R = 3$. En cuanto al intervalo de convergencia, estudiemos que ocurre en los valores extremos de $] -3, 3[$.

- Si $x = 3$, la serie es,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{(2n+1)^2 \cdot 3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

La cual, en virtud del criterio de Leibniz, es convergente; luego en $x = 3$ la serie converge.

- Si $x = -3$, la serie es,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (-3)^n}{(2n+1)^2 \cdot 3^{n+1}} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n \cdot 3^n}{(2n+1)^2 \cdot 3^{n+1}} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 \cdot 3} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \end{aligned}$$

La cual, en virtud de la serie de referencia 8.2.5 es convergente; luego, en $x = -3$ la serie converge

Así, el intervalo de convergencia de la serie es $[-3, 3]$

$$f) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2(x+2)^n}{n+1}$$

Solución: Sea $a_n = \frac{n^2(x+2)^n}{n+1}$, entonces $a_{n+1} = \frac{(n+1)^2(x+2)^{n+1}}{n+2}$.

Usando el criterio de la razón tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^2(x+2)^{n+1}}{n+2}}{\frac{n^2(x+2)^n}{n+1}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)^2(x+2)^{n+1}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n^2(x+2)^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| (x+2) \cdot \frac{(n+1)^3}{n^2(n+3)} \right| \\ &= |x+2| \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)^3}{n^2(n+3)} \right| \\ &= |x+2| \end{aligned}$$

Luego, la serie converge si:

$$|x+2| < 1 \iff -3 < x < -1$$

Luego, el radio de convergencia es $R = 1$. En cuanto al intervalo de convergencia, estudiemos que ocurre en los valores extremos de $] -3, -1[$.

- Si $x = -1$, la serie es,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 \cdot 1^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n+1}$$

Notemos que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n+1} = +\infty \neq 0$$

Luego, en virtud del criterio de divergencia, esta serie diverge; luego en $x = -1$ la serie diverge.

- Si $x = -3$, la serie es,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 \cdot (-1)^n}{n+1}$$

La cual, en virtud del criterio de divergencia, es divergente; luego en $x = -3$ la serie diverge.

Así, el intervalo de convergencia de la serie es $] -3, -1[$

$$g) \sum_{n=0}^{+\infty} n^2(x+1)^n$$

Solución: Sea $a_n = n^2(x+1)^n$, entonces $a_{n+1} = (n+1)^2(x+1)^{n+1}$.

Usando el criterio de la razón tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)^2(x+1)^{n+1}}{n^2(x+1)^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| (x+1) \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2} \right| \\ &= |x+1| \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)^2}{n^2} \right| \\ &= |x+1| \end{aligned}$$

Luego, la serie converge si:

$$|x+1| < 1 \iff -2 < x < 0$$

Luego, el radio de convergencia es $R = 1$. En cuanto al intervalo de convergencia, estudiemos que ocurre en los valores extremos de $] -2, 0[$.

- Si $x = -2$, la serie es,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2(-2+1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2(-1)^n$$

La cual, en virtud del criterio de divergencia (ver 1f), es divergente; luego en $x = -2$ la serie diverge.

- Si $x = 0$, la serie es,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2(0+1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2$$

Luego, en virtud del criterio de divergencia (ver 1f), esta serie diverge; luego en $x = 0$ la serie diverge.

Así, el intervalo de convergencia de la serie es $] - 2, 0 [$

2. Una función importante definida mediante series es la función de Bessel de orden n , donde n es un entero no negativo, definida mediante,

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+n}}{k! \cdot \Gamma(k+n+1) \cdot 2^{2k+n}}$$

- a) Demuestre que el dominio de J_n es $\mathbb{R}$
- b) Derivando la serie $x^n J_n(x)$ y usando una propiedad apropiada de la función Gama, demuestre que:

$$\frac{d}{dx} (x^n J_n(x)) = x^n J_{n-1}(x)$$

- c) Usando la derivada de un producto y posteriormente dividiendo por x^{n-1} , verifique que:

$$x J'_n(x) = x J_{n-1}(x) - n J_n(x)$$

Solución:

a)

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+n}}{k! \cdot \Gamma(k+n+1) \cdot 2^{2k+n}}$$

$$\text{Sea } b_k = \frac{(-1)^k x^{2k+n}}{k! \cdot \Gamma(k+n+1) \cdot 2^{2k+n}}, \quad b_{k+1} = \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+2+n}}{(k+1)! \cdot \Gamma(k+n+2) \cdot 2^{2k+2+n}}.$$

Aplicando el criterio de la razón tenemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{b_{k+1}}{b_k} \right| &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{k+1} x^{2k+2+n}}{(k+1)! \cdot \Gamma(k+n+2) \cdot 2^{2k+2+n}}}{\frac{(-1)^k x^{2k+n}}{k! \cdot \Gamma(k+n+1) \cdot 2^{2k+n}}} \right| \\
&= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+2+n}}{(k+1)! \cdot \Gamma(k+n+2) \cdot 2^{2k+2+n}} \cdot \frac{k! \cdot \Gamma(k+n+1) \cdot 2^{2k+n}}{(-1)^k x^{2k+n}} \right| \\
&= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{(-1)x^2}{(k+1)(k+n)} \right| \\
&= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^2}{(k+1)(k+n)} \right| \\
&= 0 < 1.
\end{aligned}$$

Luego, el radio de convergencia es $R = +\infty$, por lo tanto, $\text{Dom}(J_n(x)) = \mathbb{R}$

b) Notemos que:

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \cdot \Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x^2}{2^2}\right)^k$$

Entonces:

$$x^n J_n(x) = \frac{x^{2n}}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \cdot \Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x^2}{2^2}\right)^k$$

Luego:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}(x^n J_n(x)) &= \frac{2nx^{2n-1}}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \cdot \Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x^2}{2^2}\right)^k \\
 &\quad + \frac{x^{2n}}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \cdot \Gamma(k+n+1)} \cdot k \cdot \left(\frac{x^2}{2^2}\right)^{k-1} \cdot \frac{2x}{2^2} \\
 &= x^n \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \cdot \Gamma(k+n+1)} \cdot (n+k) \cdot \left(\frac{x^2}{2^2}\right)^k \\
 &= x^n \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \cdot \Gamma(k+n)} \cdot \left(\frac{x^2}{2^2}\right)^k \\
 &= x^n \cdot J_{n-1}(x).
 \end{aligned}$$

c) Ya que:

$$(x^n J_n(x))' = nx^{n-1} J_n(x) + x^n J_n'(x) = x^n J_{n-1}(x)$$

Se tiene que:

$$nx^{n-1} J_n(x) + x^n J_n'(x) = x^n J_{n-1}(x)$$

La igualdad vale para $n \geq 1$ y $x = 0$.

Si $x \neq 0$ entonces:

$$nJ_n(x) + xJ_n'(x) = xJ_{n-1}(x)$$

Y así:

$$xJ_n'(x) = xJ_{n-1}(x) - nJ_n(x)$$

Ejercicios Propuestos

1. a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$
- b) $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$
- c) $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \sqrt{n}$
- d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\ln(n+1)}$

$$\begin{aligned}
e) & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)x^{2n}}{5^n} \\
f) & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!x^n}{(2n+1)!} \\
g) & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(x-4)^{n+1}}{(n+1)^3} \\
h) & \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)2^{3n}x^{3n+1} \\
i) & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^2(x-2)^n}{n!} \\
j) & - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+2^n)x^n}{n}
\end{aligned}$$

2. En base a la definición de la función de Bessel del ejercicio resuelto 2, y los resultados allí obtenidos:

a) Verifique, usando la definición de J_n , que:

$$x^{-n}J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k! \cdot \Gamma(k+n+1) \cdot 2^{2k+n}}$$

b) Demuestre, derivando la serie, que:

$$\frac{d}{dx} (x^{-n}J_n(x)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k-1}}{(k-1)! \cdot \Gamma(k+n+1) \cdot 2^{2k+n-1}}$$

c) Cambiando el índice de la sumatoria, verifique que:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} (x^{-n}J_n(x)) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+1}}{k! \cdot \Gamma(k+1+n+1) \cdot 2^{2k+n+1}} \\
&= -x^{-n} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1+n}}{k! \cdot \Gamma(k+n+1+1) \cdot 2^{2k+n+1}}
\end{aligned}$$

d) Observando la última serie con la que define $J_n(x)$, verifique que:

$$\frac{d}{dx} (x^{-n}J_n(x)) = -x^{-n}J_{n+1}(x)$$

e) Demuestre que:

$$xJ'_n(x) = -xJ_{n+1}(x) + nJ_n(x)$$

f) Demuestre que:

$$\begin{aligned} 2J'_n(x) &= J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) \\ 2nJ_n(x) &= x[J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)] \end{aligned}$$

g) Pruebe que:

$$J_{n-1}(x) = J'_n(x) + \frac{n}{x}J_n(x)$$

h) Pruebe que:

$$xJ'_{n-1}(x) = -xJ_n(x) + (n-1)J_{n-1}(x)$$

i) Demuestre que se cumple la siguiente ecuación:

$$x^2J''_n(x) + xJ'_n(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) = 0$$

Esta ecuación demuestra que la función de Bessel $J_n(x)$, es solución de la ecuación diferencial:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

De esto deriva su importancia.

8.4. Teorema de Taylor

La familia de funciones más simples son los polinomios ya que son muy fáciles de derivar y de integrar. El teorema de Taylor permite, bajo ciertas hipótesis, aproximar funciones mediante polinomios lo que facilita cálculos numéricos directos que pueden ser muy difíciles y, a veces, hasta imposibles.

Consideremos una función f definida en algún intervalo de $\mathbb{R}$, tal que la n -ésima derivada, $f^{(n)}(x)$, existe en un intervalo que contiene a un punto a fijo y si x es un punto cualquiera de dicho intervalo, entonces nuestro objetivo es buscar una serie de potencias que converja hacia f en algún intervalo.

Primero buscaremos polinomios usando de forma recursiva integración por partes.

Supongamos que f y f' son continuas en $[a, b]$. Entonces, para cualquier $x \in [a, b]$ se tiene, usando el Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\int_a^x f'(y)dy = f(x) - f(a). \quad (8.6)$$

Entonces,

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(y)dy \quad (8.7)$$

Suponiendo que f'' existe, podemos volver a integrar por partes la integral de la ecuación 8.7,

$$\begin{cases} u = f'(y) & \Rightarrow du = f''(y)dy \\ dv = dy & \Rightarrow v = y - x = -(x - y), \text{ tomando a } x \text{ como constante conveniente.} \end{cases}$$

Ahora f puede escribirse como:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) - (x - y)f'(y) \Big|_a^x + \int_a^x (x - y)f''(y)dy. \\ f(x) &= f(a) + (x - a)f'(a) + \int_a^x (x - y)f''(y)dy \end{aligned} \quad (8.8)$$

Nuevamente, integrando por partes la integral de la ecuación 8.8,

$$\begin{cases} u = f''(y) & \Rightarrow du = f'''(y)dy \\ dv = (x - y)dy & \Rightarrow v = -\frac{1}{2}(x - y)^2. \end{cases}$$

Entonces la ecuación 8.8 se transforma en:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) - \frac{1}{2}[(x-y)^2 f''(y)]_a^x + \frac{1}{2} \int_a^x (x-y)^2 f'''(y) dy.$$

El proceso puede continuar indefinidamente siempre que las derivadas de orden n de f existan y sean continuas, así todas las integrales existen. Aplicando n veces este procedimiento obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 8.4.1 Teorema de Taylor- Forma 1 Si $f(x)$ y sus primeras $(n+1)$ derivadas son continuas en $[b_1, b_2]$ y si $b_1 < a < b_2$, entonces para x en el intervalo dado se tiene:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + R_n(x, a), \quad (8.9)$$

donde,

$$R_n(x, a) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-y)^n f^{(n+1)}(y) dy.$$

Definición 8.4.2 ■ El término $R_n(x, a)$ se llama resto.

- $f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}$ se llama polinomio de Taylor de grado n y centrado en a de f .
- Si f tiene las derivadas continuas de todos los ordenes entonces los polinomios de Taylor se pueden transformar en una serie llamada **serie formal de Taylor** :

$$f(a) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}.$$

Le decimos formal porque no se sabe a priori si realmente esta serie converge a $f(x)$.

Del enunciado del teorema 8.9 podemos deducir que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$ converge a $f(x)$, en algún intervalo centrado en $x = a$ si y sólo si $R_n(x, a) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow +\infty$.

Para demostrar este teorema necesitamos darle una forma distinta al resto $R_n(x, a)$.

Teorema 8.4.3 Teorema de Taylor- Forma 2: Supongamos que $f(x)$ tiene sus primeras n derivadas continuas y la derivada $f^{(n+1)}(x)$ existe en un intervalo $[b_1, b_2]$. Sea a tal que $b_1 < a < b_2$. Entonces para todo x en $]b_1, b_2[$ se tiene:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + R_n(x, a), \quad (8.10)$$

donde $R_n(x, a) = \frac{(x-a)^{n+1}f^{(n+1)}(c^*)}{(n+1)!}$, para algún c^* tal que $a < c^* < x$.

Demostración: Sea $R_n(x, a)$ definido por:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + R_n(x, a)$$

Ahora consideraremos la función φ definida por

$$\varphi(y) = f(x) - f(y) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(y)(x-y)^k}{k!} - \frac{(x-y)^{n+1}r_n(x, a)}{(n+1)!}. \quad (8.11)$$

Demostraremos que φ satisface el Teorema de Rolle, en el intervalo $a \leq y \leq x$ con $b_1 < a < b_2$ y $b_1 < xb_2$.

Reemplazando $y = x$ en la ecuación 8.11, tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 0 \text{ y} \\ \varphi(a) &= f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} - \frac{(x-a)^{n+1}r_n(x, a)}{(n+1)!} \\ \varphi(a) &= 0 \Leftrightarrow R_n(x, a) = \frac{(x-a)^{n+1}r_n(x, a)}{(n+1)!} \end{aligned} \quad (8.12)$$

Por lo tanto, elegimos $r_n(x-a)$ de modo que se cumpla la igualdad 8.12).

La función φ satisface las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[a, x]$, por lo cual existe un punto c^* en $]a, x[$ donde $\varphi'(c^*) = 0$.

$$\varphi'(y) = -f'(y) - \sum_{k=1}^n f^{(k+1)}(y) \frac{(x-y)^k}{k!} + \sum_{k=1}^n f^{(k)}(y) \frac{(x-y)^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{(x-y)^n r_n(x, a)}{n!}$$

Desarrollando las sumatorias, queda finalmente,

$$\varphi'(y) = -\frac{f^{(n+1)}(y)(x-y)^n}{n!} + \frac{(x-y)^n r_n(x, a)}{n!}$$

Por Teorema de Rolle, existe $c^* \in]a, x[$ tal que

$$\varphi'(c^*) \Leftrightarrow -\frac{f^{(n+1)}(c^*)(x-c^*)^n}{n!} + \frac{(x-c^*)^n r_n(x, a)}{n!} = 0$$

$$\Leftrightarrow r_n(x, a) = -f^{(n+1)}(c^*); a < c^* < x$$

Reemplazando este valor de $r_n(x, a)$ en (2) obtenemos que $R_n(x, a) = \frac{(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c^*)}{(n+1)!}$, para algún c^* entre x y a . $\square$

Observación 8.4.4 1. Si $R_n(x, a) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow +\infty$, entonces $f(x)$ puede ser representada mediante la serie de Taylor centrada en a en algún intervalo que contiene al punto a .

2. Cuando $a = 0$, la serie resultante por esta vía se llama **serie de Maclaurin** y tiene la forma:

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}.$$

3. Otra forma equivalente de escribir el resto es

$$\frac{(1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(\theta x)}{(n-1)!} x^n, \text{ para algún } \theta \in (0, 1).$$

8.4.1. Cálculo de polinomios y series de Taylor para funciones elementales

1. **La serie exponencial:** es la serie de Taylor centrada en 0 o serie de Maclaurin de $f(x) = e^x$.

Los polinomios de Taylor de grado k y centrado en $a = 0$ lo denotamos por $T_k(0)$.

$$T_n(0) = f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}$$

$$T_0(0) = f(0) = e^0 = 1$$

$$T_1(0) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x = 1 + \frac{x}{1!}$$

$$T_2(0) = T_1(0) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

Considerando que $f^{(k)}(0) = e^x \Big|_{x=0} = e^0 = 1$; para todo $k \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$$T_n(0) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Ahora podemos estudiar la convergencia de la serie de potencias resultante cuando $x \neq 0$. Recordemos que toda serie de potencias converge para $x = a$.

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

$$\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \frac{|x|}{(n+1)}.$$

Por lo tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{(n+1)} = 0 < 1$; para todo $x \in \mathbb{R}$ y la serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

Para saber si esta serie convergente representa a la función $f(x) = e^x$, debemos analizar el resto dado por el Teorema de Taylor:

$$R_n(x, 0) = \frac{x^{n+1}e^{c^*}}{(n+1)!}; \text{ con } c^* \in]0, x[.$$

Si dejamos x fijo, $R_n(x, 0) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow +\infty$ pues $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$ por ser el término general de una serie convergente.

Para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que,

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

En particular si $x = 1$

$$e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

Esta fórmula permite calcular valor aproximados de e con el grado de exactitud que uno quiera. Por ejemplo, calculemos el número e con 4 decimales exactos.

Esto quiere decir que $R_n(1, 0) = \frac{e^{c^*}}{(n+1)!}$, con c^* entre 0 y 1, debe ser menor que 10^{-4} . Para facilitar los cálculos podemos usar acotaciones intermedias como mostraremos a continuación.

$$R_n(1, 0) = \frac{e}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-4}.$$

Para determinar la cantidad mínima de términos que debemos sumar para alcanzar el grado de exactitud que queremos, debemos resolver la inecuación:

$$\frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{10,000},$$

tomando a n como incógnita. La inecuación es equivalente a

$$3 \times 10^4 < (n+1)!.$$

Con una calculadora se puede encontrar que:

$$7! = 5,040$$

$$8! = 40,320$$

Por lo tanto basta tomar $n = 8$. Así, tenemos que:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} \approx 2,7183.$$

2. La serie de coseno:

Sea la función $f(x) = \cos x$, $a = 0$. Tenemos que:

- $f'(x) = -\operatorname{sen} x$
- $f''(x) = -\cos x$
- $f'''(x) = \operatorname{sen} x$
- $f^{(iv)}(x) = \cos x$
- $f^{(v)}(x) = -\operatorname{sen} x$
- $f^{(vi)}(x) = -\cos x$
- $f^{(vii)}(x) = \operatorname{sen} x$
- $f^{(viii)}(x) = \cos x$

En general:

- $f^{(4n+1)}(x) = \operatorname{sen} x$
- $f^{(4n+2)}(x) = -\cos x$
- $f^{(4n+3)}(x) = \operatorname{sen} x$

$$\blacksquare f^{(4n)}(x) = \cos x$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \blacksquare f^{(4n+1)}(0) &= 0 \\ \blacksquare f^{(4n+2)}(0) &= -1 \\ \blacksquare f^{(4n+3)}(0) &= 0 \\ \blacksquare f^{(4n)}(0) &= 1 \end{aligned}$$

Así, los coeficientes de Taylor $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ para la serie de $\cos x$ son:

$$\begin{aligned} \blacksquare a_{4n+1} &= a_{4n+3} = 0 \\ \blacksquare a_{4n+2} &= \frac{-1}{(4n+2)!} \\ \blacksquare a_{4n} &= \frac{1}{(4n)!} \end{aligned}$$

Luego la serie de Taylor de $f(x) = \cos x$ es

$$f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Esta serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$. Esto se deja para que el lector lo verifique.

3. La serie de seno

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4. La serie geométrica

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad |x| < 1.$$

$$5. \ln(1+x) = \sum \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \quad -1 < x \leq 1.$$

6. La serie binomial

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad |x| < 1.$$

Consideremos la función $f(x) = (1+x)^\alpha$, con $x > -1$, la que puede ser escrita como:

$$(1+x)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+x)}.$$

Así,

$$\frac{d}{dx} [(1+x)^\alpha] = e^{\alpha \ln(1+x)} \cdot \frac{\alpha}{1+x} = \alpha(1+x)^{\alpha-1} = \alpha(1+x)^{\alpha-1}.$$

$$\frac{d^2}{dx^2} ((1+x)^\alpha) = \frac{d}{dx} (\alpha(1+x)^{\alpha-1}) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}.$$

Sucesivamente obtenemos la expresión;

$$\frac{d^n}{dx^n} ((1+x)^\alpha) = \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

para $x=0$; $\frac{d^n}{dx^n} (\alpha(1+x)^\alpha) |_{x=0} = \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)$

Aplicando el teorema de Taylor podemos escribir:

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1} + \\ &+ \frac{(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1) \cdot (1+\theta)^{\alpha-n} \cdot x^n. \end{aligned}$$

Sea S_n la suma parcial de la serie de Taylor:

$$S_n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

$$\begin{aligned} |S_n - (1+x)^\alpha| &= \left| \frac{(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{(1+\theta x)^{n-\alpha}} - \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} \right| |x|^n \\ &= \left| \frac{(1-\theta)^{1-1}}{(n-1)!(1+\theta x)^{n-\alpha}} - \frac{1}{n!} \right| \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1) |x|^n \\ &= \left| \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^{n-1} \cdot \frac{(1+\theta x)^{n-1}}{(1+\theta x)^{n-\alpha}} - \frac{1}{n} \right| \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{(n-1)!} |x|^n \end{aligned}$$

No es difícil verificar que $\left| \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{(n-1)!} \right| \leq K$, para alguna constante K

Por otro lado,

$$\frac{(1+\theta x)^{n-1}}{(1+\theta x)^{n-\alpha}} = (1+\theta x)^{\alpha-1}$$

y

$$0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} < \frac{1-\theta}{1-\theta} = 1.$$

De esta forma, la cantidad

$$\left| \frac{(1-\theta)^{n-1}}{(1+\theta x)^{n-1}} \cdot (1+\theta x)^{\alpha-1} - \frac{1}{b} \right| \left| \frac{\alpha(\alpha-1) - (\alpha-n+1)}{(n-1)!} \right|,$$

es acotada y, en consecuencia,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n - (1+x)^\alpha| \rightarrow 0,$$

para todo $|x| < 1$. Así,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Se deja como ejercicio verificar que esta serie diverge para $x = 1$ y $x = -1$.

Dos casos particulares de la serie binomial son:

- Si $\alpha = 1$ en la serie binomial y tenemos,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)(-2)(-3) \cdots (-n)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

Reemplazando x por $-x$, tenemos

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

- Si $\alpha = -2$ y usando $-x$ en vez de x , tenemos

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots; \quad \text{para } -1 < x < 1.$$

Ejemplo 8.4.5 1. Usando la definición de $\cosh x$ y la serie exponencial, podemos obtener la serie que representa a entonces $\cosh x$.

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}; \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \cosh x &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1 + (-1)^n}{2} \right) \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

Observar que si n es impar, entonces los coeficientes son cero. Por lo cual, podemos reescribir la serie como:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}; \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}; \quad |x| < +\infty.$$

2. Encontrar la serie de potencias para

$$e^{-x} \ln(1 + 3x)$$

Usando el teorema de la aritmética de series.

Solución:

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}; \quad |x| < +\infty$$

$$\ln(1+y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} y^n}{n}; \quad |y| < 1. \quad (8.13)$$

Tomando $y = 3x$ en la ecuación 8.13 y cambiando el índice n por $n+1$ para poder comenzar a contar de cero, nos queda:

$$\ln(1+3x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 3^{n+1} x^{n+1}}{n+1}; \quad |x| < \frac{1}{3}$$

Recordemos el producto de Cauchy de series:

$$\left(\sum a_n \right) \left(\sum b_n \right) = \sum c_n;$$

$$\text{donde, } c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k}, \quad a_k = \frac{(-1)^k x^k}{k!}, \quad b_k = (-1)^k \frac{3^{k+1} x^{k+1}}{k+1}.$$

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} x^k \cdot \frac{(-1)^{n-k} 3^{n-(k+1)} x^{n-k+1}}{n-k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{3^{n-k-1}}{k!(n-k+1)} (-1)^n x^{n+1}; \quad |x| < \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Entonces:

$$e^{-x} \ln(1+3x) = \sum_{h=0}^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^n \frac{3^{n-k-1}}{(n-k+1)} \right] (-1)^n x^{n+1}$$

Recordemos que para que el producto de series converja al producto de sus respectivas sumas la convergencia debe ser absoluta.

Observación 8.4.6 Observemos además que la forma resultante “es una serie de potencias escrita en la normal”. A veces pueden suceder casos en que no es tan directo obtener la forma normal de una serie de potencias.

Por ejemplo:

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right).$$

En estos casos se tiene la fórmula:

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{[n/2]} a_k b_{n-2k}\right) x^n.$$

Ejemplo 8.4.7 No siempre se cumple que el valor de la función coincide con el valor de su serie formal de Taylor. Sea

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & , x > 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \geq 0$ y entonces $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k = 0 \neq e^{-1/x} = f(x)$, para $x > 0$.

Ejercicios resueltos

1. Escriba la función $f(x) = \sqrt{x}$ como el polinomio de Taylor de grado 6 centrado en $a = 3$, más el respectivo resto.

Solución: El polinomio de Taylor de grado n de $f(x)$ centrado en $x = a$ se escribe

$$f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

El resto en este caso es

$$R_n(x, \theta) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}; \quad \text{con } a < \theta < x.$$

Para $f(x) = \sqrt{x}$ tenemos

$$f'(x) = \frac{1}{2x^{1/2}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{x^{3/2}}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{2^3} \cdot \frac{1}{x^{5/2}}$$

$$f^{(iv)}(x) = -\frac{3 \cdot 5}{2^4} \cdot \frac{1}{x^{7/2}}$$

$$f^{(v)}(x) = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2^5} \cdot \frac{1}{x^{9/2}}$$

$$f^{(vi)}(x) = -\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2^6} \cdot \frac{1}{x^{11/2}}$$

$$f^{(vii)}(x) = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2^7} \cdot \frac{1}{x^{13/2}}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} \\ &= \sqrt{3} + \frac{1}{2 \cdot 3^{1/2}} \cdot (x-3) - \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{3^{3/2}} (x-3)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!} \cdot \frac{3}{2^3} \cdot \frac{1}{3^{5/2}} (x-3)^3 - \frac{1}{4!} \cdot \frac{3 \cdot 5}{2^4} \cdot \frac{1}{3^{3/2}} (x-3)^4 \\ &\quad + \frac{1}{5!} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2^5} \cdot \frac{1}{3^{9/2}} (x-3)^5 - \frac{1}{6!} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2^6} \cdot \frac{1}{3^{11/2}} (x-3)^6 \\ &\quad + \frac{1}{7!} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2^7} \cdot \frac{1}{(\theta)^{13/2}} (x-3)^7, \quad \text{con } 3 < \theta < x. \end{aligned}$$

2. Obtenga la serie de Taylor de $f(x) = \ln x$, centrada en $x = 4$, y calcule su intervalo y radio de convergencia:

Solución: Para $f(x) = \ln x$ tenemos,

- $f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$
- $f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}$
- $f^{(iv)}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{x^4}$
- $f^{(v)}(x) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5}$
Y en general
- $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n}$

Así, la serie de Taylor de $f(x) = \ln x$, centrado en $x = 4$ es:

$$\ln(4) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{4^n} \frac{1}{n!} (x-4)^n = \ln(4) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (x-4)^n}{n \cdot 4^n}$$

Para estudiar su intervalo y radio de convergencia, notemos que el termino general de la serie es de la forma:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1} (x-4)^n}{n \cdot 4^n}$$

y por ende,

$$a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2} (x-4)^{n+1}}{(n+1) \cdot 4^{n+1}}$$

Usando el criterio de la razón:

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+2}(x-4)^{n+1}}{(n+1) \cdot 4^{n+1}}}{\frac{(-1)^{n+1}(x-4)^n}{n \cdot 4^n}} \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(-1)^{n+2}(x-4)^{n+1}}{(n+1) \cdot 4^{n+1}} \cdot \frac{n \cdot 4^n}{(-1)^{n+1}(x-4)^n} \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(-1)(x-4)n}{4(n+1)} \right| \\
 &= \left| \frac{x-4}{4} \right| \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{n}{n+4} \right| \\
 &= \left| \frac{x-4}{4} \right| \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+4} \\
 &= \left| \frac{x-4}{4} \right| \cdot 1 \\
 &= \left| \frac{x-4}{4} \right|
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L = \left| \frac{x-4}{4} \right|$$

El Criterio de la razón dice que la serie es convergente si $L < 1$, luego, imponiendo esta condición tenemos que:

$$\left| \frac{x-4}{4} \right| < 1 \iff |x-4| < 4 \iff -4 < x-4 < 4 \iff 0 < x < 8.$$

Por lo tanto, la serie tiene radio de convergencia $R = 4$, estudiemos que ocurre en los extremos de $]0, 8[$.

■ Si $x = 0$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{(-1)^{n+1}(x-4)^n}{n \cdot 4^n} \\
 &= \frac{(-1)^{n+1}(-4)^n}{n4^n} = \frac{(-1)(-1)^n(-1)^n(4)^n}{n4^n} \\
 &= \frac{(-1)}{n}.
 \end{aligned}$$

Luego, la serie es:

$$\ln 4 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

Como la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ es divergente, la serie diverge para $x = 0$.

■ Si $x = 8$.

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}(x-4)^n}{n \cdot 4^n}$$

se transforma en

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Entonces la serie a estudiar es:

$$\ln 4 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

que es una serie alternada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

que según el criterio de Leibniz es convergente. Por lo tanto, la serie converge en $x = 8$.

Luego, el intervalo de convergencia de esta serie es $]0, 8]$.

3. Use la fórmula:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Para demostrar que:

$$\cos^2 x = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n-1} \cdot x^{2n}}{(2n)!}$$

Solución: Usando la serie correspondiente a la función $\cos x$ que converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$\cos x = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Reemplando en ella x por $2u$, obtenemos:

$$\cos(2u) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot 2^{2n} \cdot u^{2n}$$

$$\frac{1 + \cos 2u}{2} = \frac{1}{2} \left(2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 2^{2n} u^{2n} \right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 2^{2n-1} u^{2n}$$

Concluimos que:

$$\cos^2 u = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 2^{2n-1} u^{2n}$$

Lo cual es valido para todo $u \in \mathbb{R}$.

Ejercicios propuestos

Las series de las funciones: $\frac{1}{x-1}$, e^x , $\cos x$, $\sin x$, $\ln(x+1)$ y la serie binomial son consideradas series de referencias. Es decir, es lo mínimo que Ud. debe conocer y pueden ser usadas cada vez que sea necesario sin deducirlas, además, debe recordar su intervalo de convergencia.

1. Escriba las siguientes funciones como el polinomio de Taylor de grado 6 centrado en a mas el respectivo resto:

a) e^x , $a = 2$.

b) $\sin x$, $a = \frac{\pi}{4}$.

c) $\cosh x$, $a = 0$.

2. Obtenga las siguientes series usando la definición de la serie de Taylor. Calcule su intervalo de convergencia.

a) e^x en potencias de $(x-3)$.

b) e^x en potencias de $(x+2)$.

c) $\cos x$ en potencias de $(x + \pi/3)$.

d) $\ln x$ en potencias de $(x-4)$.

e) $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ en potencias de $(x-3)$.

3. en los siguientes ejercicios determine las series de las funciones dadas usando sustituciones apropiadas en las series de referencia

- a) e^{-x^2} .
- b) $\cos 2x$.
- c) $\cos x^2$.
- d) $\frac{1}{1+x^2}$.
- e) $\frac{1}{1+x^4}$.
- f) $\sqrt{1+\sin x^2}$.
- g) $\sin \sqrt{x}$.
- h) $\ln(1+4x^3)$.

4. Use la fórmula $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ para obtener la serie de $\sin^2 x$. Verifique la identidad fundamental de la trigonometría usando las series obtenidas en este ejercicio y el anterior.

5. Use el teorema de producto de series para calcular las series de :

- a) $x \cos x$.
- b) $\frac{x}{\sin x}$.
- c) $\frac{e^{3x}}{1+4x}$.
- d) $\ln(1-x) \cos x$.
- e) $\cos 3x(2+x^3)$.
- f) $\frac{1+x}{1-x}$.

6. Calcule la serie de $\arcsen x$ usando:

- a) El Teorema Fundamental del Cálculo para escribir arcoseno como una integral entre 0 y x .
- b) Use la serie binomial para $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.
- c) Use el teorema de integración de series para obtener la serie de arcoseno integrando la serie de $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.
- d) Determine el intervalo de convergencia de la serie obtenida.

7. Calcule la serie de $\arctan x$ usando el mismo procedimiento que el propuesto en el ejercicio (6).

8. a) Calcule el intervalo de convergencia de la serie de $\arctan x$ obtenida en (7).
 b) Analice la convergencia de la serie en los extremos del intervalo.
 c) Demuestre por continuidad que la serie obtenida en el ejercicio (7) representa también a $\arctan 1$.
 d) Calcule un valor aproximado de π usando la serie en $x = 1$.
9. Calcule un valor aproximado con tres decimales del área bajo la curva e^{-x^2} cuando x varía entre 0 y 1.
10. Calcule un valor aproximado con tres decimales del área bajo la curva $\frac{\sin x}{x}$ cuando x varía entre 0 y $\frac{\pi}{2}$.

11. Use la serie binomial para calcular un valor aproximado de la integral elíptica de segunda clase

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 x} \, dx.$$

Nota: Vea la guía de longitudes de curva para recordar lo que es una integral elíptica.

Respuesta : $\approx 1,22\dots$

12. Calcule un valor aproximado de la integral $I = \int_0^{\pi/6} (\cos x)^{5/4} \, dx$. Siga el siguiente camino:

- a) Escriba $I = \int_0^{\pi/6} \cos x \sqrt{1 - \sin^2 x}^{1/4} \, dx = \int_0^{1/2} (1 - u^2)^{1/8} \, dx$, donde $u = \sin x$.
 b) Use la serie binomial.

Respuesta: $\approx 0,494\dots$

Las series de Taylor también sirven para calcular algunos límites. En estos casos se necesitan sólo algunos términos de la serie, no es necesario conocer el término general.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x - \sin x}{x^3}.$ Respuesta: $\frac{1}{3}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x^2}.$ Respuesta: 1.

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{x^2}.$ Respuesta: $\frac{1}{2}.$

13. a) Calcule el polinomio de Taylor de grado n y centrado en $x_0 = 0$ de la función:

$$f(x) = \cosh x$$

- b)* Deduzca de (a) que $\cosh x$, en una vecindad del cero, puede ser aproximado por una parábola. Encuentre tal parábola.
- c)* Calcule $\cosh(0,7)$ usando el polinomio de Taylor de grado 4.
- d)* Un cable pesado, perfectamente flexible e inextensible, adopta en equilibrio la forma de una catenaria; haciendo abstracción de la escala, su ecuación es: $y = \cosh x$. Usando los resultados anteriores, esta curva puede ser sustituida, en una vecindad del origen, por una parábola. ¿Hasta qué abscisa el error que con ello se comete es inferior al uno por ciento?
14. *a)* Escriba - sin hacer los cálculos y diciendo a cuál serie de referencia corresponde - la serie de potencias de x de las funciones:

$$\frac{1}{1+x}, \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- b)* Obtenga la serie de potencias de x de $\frac{1-x}{1+x}$ y su intervalo de convergencia.
- c)* Obtenga la serie de potencias en (b) para calcular $\frac{1003}{997}$ con 6 decimales exactos.
- d)* Determine el desarrollo en serie de potencias de x de $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

Indicación: Amplifique la cantidad subradical por $(1-x)$ para escribir:

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = (1-x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Capítulo 9

Series de Fourier

“...nos vemos llevados a lanzar la idea de que el descubrimiento teórico mayor del siglo XIX, desde el punto de vista económico, sería el discurso matemático que permite una representación combinatoria de casi la totalidad de las relaciones funcionales, a saber las descomposiciones en serie de Fourier en 1800. En efecto, en la medida en que toda función se puede descomponer en polinomio, todo ruido se puede descomponer en sonidos elementales y recomponer en grandes conjuntos de instrumentos.”

Jacques Attali: Ruidos. Siglo Veintiuno Editores. Mexico, 1995.

9.1. Introducción

En la sección 8.4, hemos visto que una forma de simplificar el uso de las funciones trascendentes es poder expresarlas como polinomios o eventualmente como series de potencias.

En tal caso, cuando una función f es suficientemente regular,

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \text{Resto},$$

donde

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}; \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Según sea el campo de aplicación, puede ser necesario expresar ciertas funciones como combinaciones lineales de otros tipos de funciones elementales.

En particular, el estudio de fenómenos periódicos, llevan a considerar polinomios o series de funciones trigonométricas. Históricamente, las series de Fourier deben su nombre

al matemático francés Joseph Fourier (1768-1830), quien publicó en 1822 su famoso libro "Theorie analytique de la chaleur" donde desarrolla una teoría general sobre el método de las series trigonométricas. Este método había sido aplicado a situaciones particulares por Euler y Bernoulli para el caso de la cuerda vibrante.

La función sinusoidal, estudiada en la subsección 3.2.8, es el modelo matemático de un movimiento que oscila con respecto a un valor referencial. Supongamos que una partícula se mueve sobre el eje X bajo la acción de una fuerza elástica tal que su magnitud es proporcional a la distancia desde el origen y que está dirigida hacia el origen. Dicho movimiento está descrito por una función del tipo:

$$x(t) = a \operatorname{sen} \omega t + b \cos \omega t, \quad a \text{ y } b \text{ son constantes reales.}$$

Según lo visto en la sección citada, es equivalente a

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi),$$

donde: A es la amplitud de la senoide, ω es la frecuencia angular medida en radianes por segundo y φ es la fase en radianes. En lugar de ω , a menudo se utiliza la frecuencia F medida en ciclos por segundo o hercios. La relación entre ellas es $\omega = 2\pi F = \frac{1}{T}$, donde T es el período.

Estos tipos de movimientos son periódicos y se llaman sinusoidales o armónicos simples.

Existen fenómenos periódicos más complejos, como la vibración de una cuerda musical, cuyas oscilaciones están compuestas de distintas ondas armónicas, como las que describimos anteriormente. Fourier demostró que las ondas periódicas con formas complicadas pueden expresarse como suma de ondas armónicas, cuyas frecuencias son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental. Así, supongamos que $f(t)$ representa el desplazamiento periódico de una onda y si $f(t)$ y su derivada son continuas a tramos, puede demostrarse que dicha función puede representarse mediante una suma del tipo: $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(n\omega t + \varphi_n)$

El término "armónico" viene de la acústica donde la vibración fundamental de frecuencia angular ω corresponde a un tono de cierta altura y los armónicos primero, segundo,... corresponden a la primera octava, a la segunda octava, etc.

El proceso de determinación matemática de los coeficientes A_n y las constantes de fase φ_n , para una forma de onda dada y el estudio de las condiciones bajo las cuales la serie converge a f se llama Análisis de Fourier cuyas aplicaciones cubren una gama muy amplia de saberes como procesamiento de señales, telecomunicaciones, neurociencias entre otros.

9.2. Preliminares

9.2.1. Funciones pares e impares

Las funciones pares e impares fueron definidas en la sección 2.3.1, 118. Ahora veremos algunas propiedades de estas funciones que tienen relevancia en el tema que abordaremos en este capítulo.

Teorema 9.2.1 Cualquier función $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$, puede ser expresada como suma de una función par y una función impar.

Demostración: Es fácil comprobar que:

$$(i) \quad g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \text{ es una función par.}$$

$$(ii) \quad h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \text{ es una función impar.}$$

$$(iii) \quad f(x) = g(x) + h(x).$$

Por esta razón, a g se le llama la componente par de f y a h la componente impar de f . $\square$

Ejemplo 9.2.2 Si $f(x) = e^x$, su componente par es $g(x) = \cosh x$ y su componente impar es $h(x) = \sinh x$.

Teorema 9.2.3 Si $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$, es una función derivable, entonces:

1. Si f es par, su derivada f' es impar.
2. Si f es impar, su derivada f' es par.

Demostración: Del cálculo diferencial sabemos que:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ \blacksquare \quad \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) &= \lim_{h \rightarrow 0} g(x-h). \end{aligned}$$

De (9.2.1) y (9.2.1) se sigue que

$$f'(-x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x-h) - f(-x)}{-h}.$$

1. Si f es par, $f(-(x+h)) = f(x+h)$, $f(-x) = f(x)$ y por lo tanto,

$$f'(-x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{-h} = -f'(x).$$

Así, vemos que su derivada f' es impar.

2. Si f es impar, $f(-(x+h)) = -f(x+h)$, $f(-x) = -f(x)$ y por lo tanto,

$$f'(-x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f(x+h) + f(x)}{-h} = f'(x).$$

Así, obtenemos que su derivada f' es par. □

Teorema 9.2.4 Sea $f : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable.

1. Si f es impar, entonces $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$
2. Si f es par, entonces $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

Demostración:

- 1.

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$$

Haciendo el cambio de variable $u = -x$, la primera integral queda expresada como:

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-u) (-du) = \int_a^0 f(u) du = - \int_0^a f(u) du = - \int_0^a f(x) dx$$

Reemplazando este valor en la primera ecuación, obtenemos el resultado.

2. Haciendo el mismo cambio de variable que en el ítem anterior:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_a^0 f(-u) (-du) + \int_0^a f(x) dx \\ &= - \int_a^0 f(u) du + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(u) du + \int_0^a f(x) dx \\ &= 2 \int_0^a f(x) dx \end{aligned}$$

□

Definición 9.2.5 Dada una función continua $f :]0, a[\longrightarrow \mathbb{R}$, se llama:

- (i) **Extensión par de f** a la función extendida al intervalo $] - a, 0[$ de la forma $f(x) = f(-x)$, $x \in] - a, 0[$.
- (ii) **Extensión impar de f** a la función extendida al intervalo $] - a, 0[$ de la forma $f(x) = -f(-x)$, $x \in] - a, 0[$.

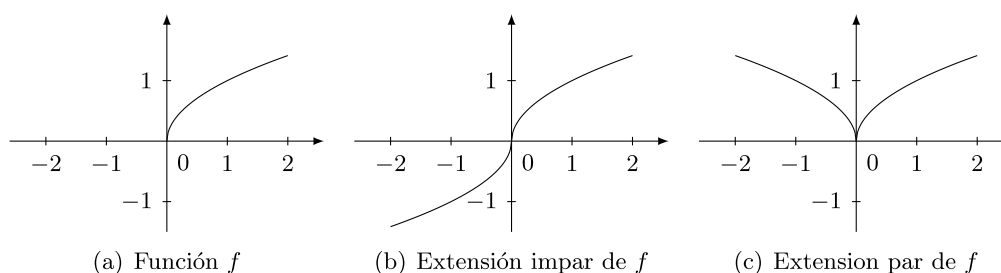


Figura 9.1:

Ejercicios propuestos

1. Demuestre las siguientes proposiciones:
 - a) Si f y g son funciones impares y si c_1 y c_2 son constantes, entonces $c_1f + c_2g$ es una función impar.
 - b) Si f y g son funciones pares y si c_1 y c_2 son constantes, entonces $c_1f + c_2g$ es una función par.
 - c) Si f y g son funciones impares, entonces fg es una función par.
 - d) Si f y g son funciones pares, entonces fg es una función par.
 - e) Si f es impar y g es par, entonces fg es impar.
2. Demuestre que la función $f(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, es la única función que es par e impar a la vez.
3. Demuestre que si $f(x)$ es par, entonces $g(x) = |f(x)|$ es par.
4. Dada una función f cualquiera con $D(f) = \mathbb{R}$:
 - a) Demuestre que $g(x) = \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)]$ es una función par.
 - b) Demuestre que $h(x) = \frac{1}{2} [f(x) - f(-x)]$ es una función impar.

c) Verifique que $f(x) = g(x) + h(x)$.

Por esta razón, a g se le llama la componente par de f y a h la componente impar de f .

d) Determine la componente par e impar de $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x \neq 1$.

5. ¿Es $f(x) = [x]$ impar? Si su respuesta es afirmativa, escriba la demostración. En caso contrario, dé un contraejemplo para mostrar que no es impar.

6. Analice la paridad o imparidad de las funciones $g(x) = [x] + [-x]$ y $h(x) = [x] - [-x]$. Gráfiquelas.

9.2.2. Funciones periódicas

Recordemos la definición de una función periódica y algunas propiedades.

Definición 9.2.6 Una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que tiene período T , si existe $T \neq 0$ tal que

$$f(x+T) = f(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}. \quad (9.1)$$

Donde T es el menor número real que satisface (9.1). En tal caso hablaremos de una función T -periódica.

Observación 9.2.7 Es fácil comprobar que si f es una función T -periódica, entonces se cumple que

$f(x+kT) = f(x)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Por esta razón, el período se define como el menor número real que satisface (9.1).

Teorema 9.2.8 Una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ puede ser extendida a $\mathbb{R}$ como una función T -periódica, donde $T = b - a$.

Demostración: :

Basta definir $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x+T) = f(x)$. La función F se llama extensión periódica de f . $\square$

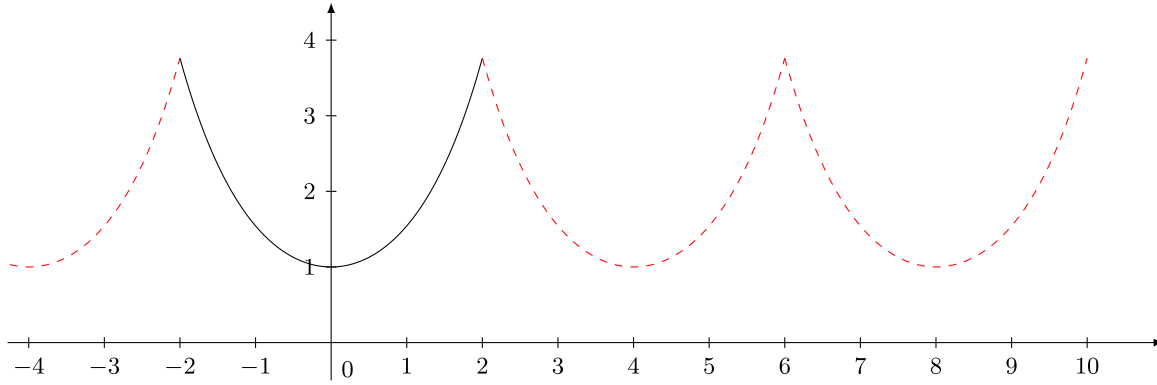


Figura 9.2: Extensión periódica a la recta real de $f(x) = \cosh x$ definido en el intervalo $[-2, 2]$.

Teorema 9.2.9 Si f es una función T -periódica, integrable sobre $\mathbb{R}$, entonces se cumple que:

$$(i) \int_{a-T/2}^{a+T/2} f(x) dx = \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx.$$

$$(ii) \int_T^{a+T} f(x) dx = \int_0^a f(x) dx.$$

Observación 9.2.10 Una función T -periódica sobre $\mathbb{R}$ está completamente determinada por sus valores en $]-T/2, T/2]$ o sobre $]0, T]$ y para que sea continua sobre $\mathbb{R}$, basta que lo sea sobre $]-T/2, T/2]$ o sobre $]0, T]$. En efecto, la continuidad sobre el intervalo abierto es fácil de verificar. Para obtener la continuidad en $T/2$, debemos verificar que $\lim_{x \rightarrow T/2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow T/2^+} f(x) = f(T/2)$. En principio, al calcular $\lim_{x \rightarrow T/2^+} f(x)$, estamos fuera del intervalo, pero usando la periodicidad obtenemos que $\lim_{x \rightarrow T/2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow T/2^+} f(x)$.

Aplicación del teorema 9.2.9 Si $f(x)$ es una función 2π -periódica, tomando en el ítem (i) $a=\pi$ y $T = 2\pi$, se tiene que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

Para cálculos concretos se elegirá la forma más cómoda según el caso.

9.2.3. Funciones continuas y derivables a tramos

Definición 9.2.11 Una función $f(x)$ definida en un intervalo $[a, b]$ se dice continua a tramos o seccionalmente continua si existe un número finito de puntos $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$ de modo que:

- f es continua en $]a_{i-1}, a_i[, i = 1, 2, \dots, n$.
- En cada a_i , la función f tiene límite a la derecha y a la izquierda. Es decir, $f(a_i^+)$ y $f(a_i^-)$ son números reales.

Se dice que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua a tramos en $\mathbb{R}$ si $f(x)$ es continua a tramos en cualquier intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Es importante observar de la definición que, no importa el valor de f en a_i . Además, estas funciones son integrables y se tiene que:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^{i=n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x) dx$$

Ejemplo 9.2.12 La siguiente función es un ejemplo de una función continua a tramos.

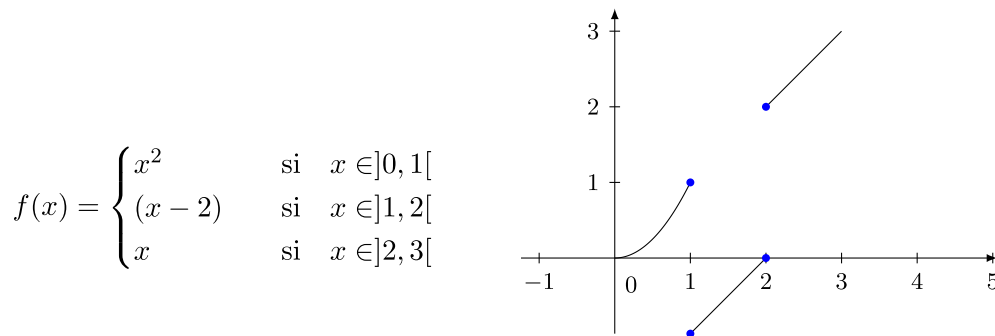
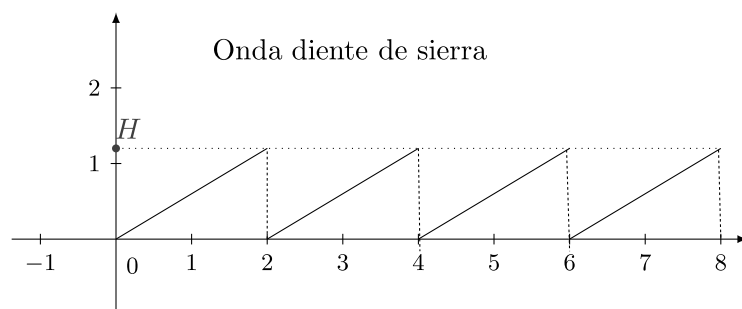


Figura 9.3: Una función continua a tramos

$$\int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (x - 2) dx + \int_2^3 x dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{7}{3}.$$

**Observación 9.2.13**

1. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y f es continua a tramos entonces λf es continua a tramos.
2. Si f_1, f_2 son dos funciones continuas a tramos $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ entonces $f_1(x) + f_2(x)$ es continua a tramos.

De la observación (9.2.13) concluimos que el conjunto de funciones $\{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ continua a tramos}\}$, es un espacio vectorial real.

Definición 9.2.14 Una función $f(x)$ definida en un intervalo $[a, b]$ se dice derivable a tramos o seccionalmente derivable si existe un número finito de puntos $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$ de modo que f es derivable en $]a_{i-1}, a_i[, i = 1, 2, \dots, n$ y f' tiene límites a la izquierda y a la derecha de cada a_i , es decir los límites :

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a_i^- + h) - f(a_i^-)}{h} \quad \text{y} \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a_i^+ + h) - f(a_i^+)}{h} \quad \text{existen.}$$

Se dice que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable a tramos en $\mathbb{R}$ si $f(x)$ es derivable a tramos en cualquier intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Definición 9.2.15 Una función $f(x)$ definida en un intervalo $[a, b]$ se dice k veces derivable a tramos o seccionalmente k veces derivable si existe un número finito de puntos $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$ y f es k veces derivable en $]a_{i-1}, a_i[, i = 1, 2, \dots, n$ y las funciones $f, f', f'', \dots, f^{(k)}$ tienen límites a la izquierda y a la derecha de cada a_i en el sentido de la ecuación 9.2

Se dice que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es k veces derivable a tramos en $\mathbb{R}$ si $f(x)$ es k veces derivable a tramos en cualquier intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Esta función es continua en su dominio y derivable a tramos, pues la derivada no existe en los puntos donde hay aristas. Del gráfico es evidente que en los puntos donde f' no existe, si existen los límites a izquierda y derecha de f' .

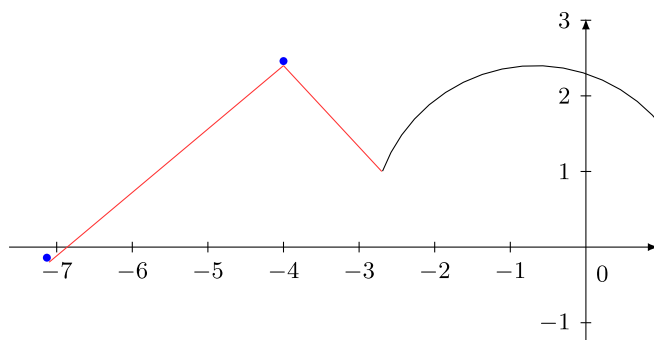


Figura 9.4:

9.2.4. Fórmulas trigonométricas

Recordemos las siguientes propiedades de las funciones seno y coseno.

1.

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) \quad (9.2)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta) \quad (9.3)$$

Sumando (9.2) y (9.3), obtenemos:

$$2 \cos(\alpha) \cos(\beta) = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta),$$

luego

$$\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}. \quad (9.4)$$

Usando esta fórmula se demuestra el siguiente resultado:

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n = m \neq 0 \\ 2\pi & \text{si } n = m = 0 \end{cases}} \quad (9.5)$$

2.

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta) \quad (9.6)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) \quad (9.7)$$

Restando (9.6) y (9.7) obtenemos:

$$2 \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta).$$

Aplicando esta fórmula tenemos el siguiente resultado:

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx) \operatorname{sen}(mx) dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & n = m \geq 1 \end{cases}} \quad (9.8)$$

3.

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\beta) + \operatorname{sen}(\beta) \cos(\alpha) \quad (9.9)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\beta) - \operatorname{sen}(\beta) \cos(\alpha) \quad (9.10)$$

Sumando (9.9) y (9.10), nos da:

$$2 \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\beta) = \operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta)$$

Luego,

$$\operatorname{sen}(\alpha) \cos(\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{2}.$$

Así, obtenemos que:

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx) \cos(mx) dx = 0, \quad \text{para todo } m, n \text{ enteros no negativos.}} \quad (9.11)$$

9.2.5. Funciones ortogonales y la serie de Fourier

Definición 9.2.16 Sea $\{\varphi_n\}$ una sucesión de funciones de continuas a tramos sobre un intervalo $[a, b]$. Diremos que la sucesión es ortogonal con respecto a la función peso $w(x)$ si y sólo si

$$\int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) w(x) dx \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \neq 0 & \text{si } n = m \end{cases} \quad (9.12)$$

Ejemplo 9.2.17 1. $\{1, \operatorname{sen}(nx), \cos(nx), n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto de funciones ortogonales con respecto a la función $w(x) = 1$.

2. Se definen los polinomios de Hermite mediante las siguientes propiedades:

H_1 : $P_n(x)$ es un polinomio de grado n .

H_2 : Si $n \neq m$ se cumple que $\int_{-\infty}^{+\infty} P_n(x)P_m(x) e^{-x^2} dx = 0$.

H_3 : El coeficiente de x^n es 1.

Pueden generarse mediante la fórmula

$$P_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}). \quad (9.13)$$

Estos polinomios forman un conjunto de funciones ortogonales con respecto a $w(x) = e^{-x^2}$. En particular $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = x^2 - \frac{1}{2}$

3. Se definen los polinomios de Legendre mediante las siguientes propiedades:

L_1 : $P_n(x)$ es un polinomio de grado n .

L_2 : Si $n \neq m$ se cumple que $\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x) dx = 0$.

L_3 : $P_n(1) = 1$.

En particular,

$$\begin{array}{lll} a) P_0(x) = 1 & c) P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) & d) P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x). \\ b) P_1(x) = x & & \end{array}$$

Los polinomios de Legendre forman un conjunto ortogonal en el espacio de las funciones continuas a tramos definidas sobre $[-1, 1]$

Definición 9.2.18 Dado un conjunto de funciones ortogonales en $[a, b]$ con respecto a la función peso $w(x)$, se llama serie formal de Fourier de una función f a una expresión del tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \varphi_n(x), \quad (9.14)$$

donde

$$c_n = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) w(x) dx. \quad (9.15)$$

En tal caso escribiremos

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \varphi_n(x). \quad (9.16)$$

Si consideramos el espacio vectorial real $\mathfrak{E}$ de las funciones f continuas a tramos sobre $[a, b]$, podemos definir sobre este un producto interno o escalar mediante la fórmula:

$$\langle f, g \rangle = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x)g(x) dx. \quad (9.17)$$

Este producto escalar induce la siguiente la norma (longitud del vector),

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2} = \left[\frac{2}{b-a} \int_a^b f(x)g(x) dx \right]^{1/2}. \quad (9.18)$$

y a su vez esta norma induce la siguiente distancia:

$$d(f, g) = \|f - g\|. \quad (9.19)$$

Definición 9.2.19 Dos funciones f y g de $\mathfrak{E}$ se dicen ortogonales si

$$\langle f, g \rangle = 0. \quad (9.20)$$

9.2.6. La serie de Fourier como la mejor aproximación en media cuadrática

La serie de Fourier de f con respecto al conjunto ortogonal $\{\varphi_n\}$, tiene la propiedad de ser la mejor aproximación de f con respecto a la distancia definida en la ecuación (9.19). Es decir, de todas las posibles combinaciones lineales de las funciones $\{\varphi_n\}$, la que minimiza el error cuadrático es la combinación lineal cuyos coeficientes son los coeficientes de Fourier. En efecto:

Sea $P_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x)$ una combinación lineal cualquiera y sea $f = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \varphi_i(x)$, donde a_i es el correspondiente coeficiente de Fourier. Queremos determinar los c_k de modo que el error

$$d(f, P_n) = \|f - P_n\| = \langle f - P_n, f - P_n \rangle^{1/2} \quad (9.21)$$

sea mínimo. Como la función raíz cuadrada es creciente basta minimizar la cantidad subradical. Usando las propiedades del producto escalar, tenemos que:

$$\langle f - P_n, f - P_n \rangle = \langle f, f \rangle - 2\langle f, P_n \rangle + \langle P_n, P_n \rangle$$

Usando que

$$\|P_n\|^2 = \sum_{k=1}^n c_k^2 \quad \text{y} \quad \langle f, P_n \rangle = \sum_{k=1}^n a_k c_k$$

nos queda

$$\langle f - P_n, f - P_n \rangle = \|f\|^2 + \sum_{k=1}^n c_k^2 - 2 \sum_{k=1}^n a_k c_k$$

Completando cuadrado

$$\langle f - P_n, f - P_n \rangle = \|f\|^2 + \sum_{k=1}^n (a_k - c_k)^2 - \sum_{k=1}^n a_k^2.$$

La última expresión es mínima cuando $\sum_{k=1}^n (a_k - c_k)^2 = 0$. Esto es equivalente a decir que los coeficientes c_k deben ser los Fourier.

9.3. Series de Fourier para funciones periódicas

El caso general de series de Fourier esbozado en la subsección anterior tiene la ventaja que muchas demostraciones resultan más simples en su escritura, además de tener una visión un poco más general del tema. Pero, en primera instancia nos interesa desarrollar series de Fourier para funciones periódicas, como seno y coseno tienen período 2π , trabajaremos con funciones 2π -periódicas.

Definición 9.3.1 Llamaremos Conjunto de funciones de Fourier, denotado por $\mathfrak{F}$, al conjunto de las funciones f que satisfacen las siguientes propiedades:

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua a tramos.
2. $f(x + 2\pi) = f(x)$.

Ejemplo 9.3.2

1. $\sin(nx) \in \mathfrak{F}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.
2. $\cos(nx) \in \mathfrak{F}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.
3. $a \sin(nx) + b \cos(nx) \in \mathfrak{F}$.
4. $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \in \mathfrak{F}$.
5. La extensión periódica de cualquier función continua en cualquier intervalo $]a, b[$ pertenece al conjunto $\mathfrak{F}$

Es fácil verificar que $\mathfrak{F}$ es un espacio vectorial real de dimensión infinita. En particular, las funciones $1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \dots, \cos(nx), \sin(nx)$ son elementos ortogonales y por tanto, linealmente independientes de $\mathfrak{F}$.

En este caso la serie formal de Fourier de $f \in \mathfrak{F}$, con respecto al conjunto

$$\{1, \cos(nx), \sin(nx), n \in \mathbb{N}\}$$

es:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad (9.22)$$

en que los coeficientes son:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (9.23)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (9.24)$$

Una forma alternativa de calcular los coeficientes de Fourier, es usando el cálculo integral. Aceptando la igualdad:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

Multiplicando ambos lados por $\cos(nx)$ e integrando entre $-\pi$ y π , nos queda:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx) dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(kx) dx \right]$$

Usando los resultados de la subsección 9.2.4, obtenemos:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Repetiendo el procedimiento multiplicando por $\sin(nx)$, obtenemos:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Así, obtenemos las expresiones para $a_0, a_n, b_n \forall n \geq 1$ en términos de la integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0 \quad (9.25)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = a_n \quad (9.26)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = b_n \quad (9.27)$$

Hablaremos de serie formal de Fourier hasta que podamos establecer las condiciones de convergencia puntual de tal serie. Ahora, veremos ejemplo de cómo calcular algunas series de Fourier de funciones periódicas.

Ejemplo 9.3.3 Sea f la extensión periódica de la función signo, es decir $f(x) = \text{sig } x$, $x \in]-\pi, \pi]$. Su serie formal de Fourier es:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] \quad (9.28)$$

Cálculo de los coeficientes a_n : La función signo es impar, por tanto, todos los coeficientes a_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ son nulos.

Cálculo de los coeficientes b_n :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sig}(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-1) \sin nx dx + \int_0^{\pi} \sin nx dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{2}{n\pi} (-\cos nx) \Big|_0^{\pi} = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \end{aligned}$$

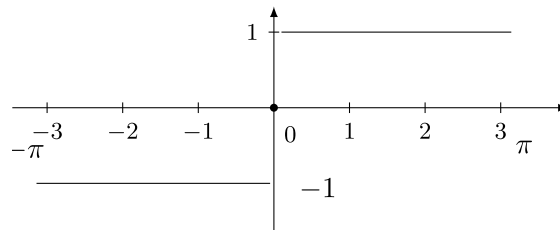


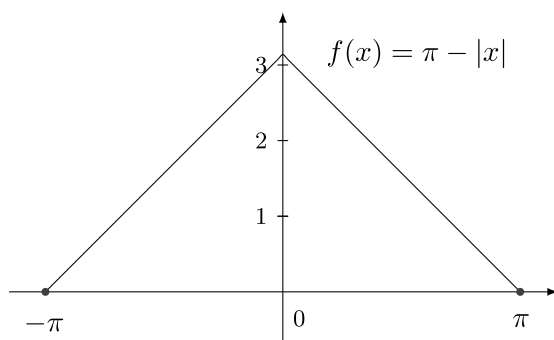
Figura 9.5: La función signo

Por lo tanto, la serie de Fourier de la función signo es:

$$\operatorname{sig} x \sim \frac{4}{\pi} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{1} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \dots \right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \operatorname{sen}(2k+1)x.$$

Ejemplo 9.3.4 Si $f(x) = \pi - |x|$, $-\pi < x \leq \pi$, la serie de Fourier de la extensión periódica de f es

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx]. \quad (9.29)$$



Cálculo de los coeficientes a_n : Como f es par, $f(x) \cos(nx)$ es par, por lo tanto,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) dx = \frac{2}{\pi} \left(\pi x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{2} \right) = \pi.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos(nx) dx$$

Integrando por partes, con:

$$u = \pi - x, \quad y \quad v' = \cos(nx), \quad \text{implica} \quad u' = -1, \quad v = \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx)$$

Por lo tanto,

$$\int_0^{\pi} (\pi - x) \cos(nx) dx = \frac{\pi - x}{n} \operatorname{sen}(nx) \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \underbrace{\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(nx) dx}_J$$

$$J = \frac{1}{n} \int_0^{n\pi} \operatorname{sen} u du = \frac{1}{n} (-\cos u) \Big|_0^{n\pi} = \frac{1}{n} (1 - \cos(n\pi)) = \frac{1}{n} (1 - (-1)^n).$$

Reemplazando este valor en la expresión de a_n , nos queda:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ \frac{4}{n^2\pi} & \text{si } n = 2k - 1, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Cálculo de los coeficientes b_n : Como $f(x) \sin(nx)$ es impar los coeficientes b_n son nulos.

Por lo tanto, la serie de Fourier generada por f es:

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \cos(x) + \frac{4}{3^2\pi} \cos(3x) + \frac{4}{5^2\pi} \cos(5x) + \dots$$

9.4. Desigualdad de Bessel

Teorema 9.4.1 Sea $f \in \mathfrak{F}$ y $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$

entonces:

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx$$

Demostración: Retomando los cálculos realizados en la subsección 9.2.6 y adaptándolos al caso de una serie de Fourier para funciones periódicas, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos:

$$P_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

Además, en la citada subsección demostramos que entre todos los polinomios trigonométricos que aproximan a f el que minimiza la expresión $\langle f - P_n, f - P_n \rangle$ es el polinomio de Fourier y se tiene

$$\|f - P_n\|^2 = \langle f - P_n, f - P_n \rangle = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n a_k^2. \quad (9.30)$$

En particular tenemos que :

$$\begin{aligned}\|f - P_n\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - P_n(x))^2 dx. \\ \|f\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx.\end{aligned}$$

Y la suma $\sum_{k=1}^n a_k^2$, en nuestro caso particular toma la forma

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

Así, tenemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - P_n(x))^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx - \left(\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^n b_k^2 \right). \quad (9.31)$$

El lado izquierdo de la ecuación (9.31) es no negativo por ser la integral de una función al cuadrado.

Por tanto,

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx - \left(\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^n b_k^2 \right) \geq 0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (9.32)$$

Como la integral no depende de n , ella es una cota superior de las sumas parciales $\sum_{k=1}^n a_k^2 +$

$\sum_{k=1}^n b_k^2$ y por lo tanto, pasando al límite se tiene que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx \geq \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2). \quad (9.33)$$

De donde se tiene la desigualdad de Bessel. □

Corolario 9.4.2 Si f es continua a tramos en $-\pi < x \leq \pi$, entonces:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} b_k = 0.$$

Demostración: Una consecuencia de la desigualdad de Bessel es la convergencia de la serie de términos positivos $\sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2)$. Por lo tanto, el término general de ella tiende a cero.

$$a_k^2 + b_k^2 \longrightarrow 0, \quad (9.34)$$

lo que implica

$$a_k \longrightarrow 0 \quad \text{y} \quad b_k \longrightarrow 0 \quad \text{si } n \rightarrow +\infty. \quad (9.35)$$

Por lo tanto,

$$a_k \longrightarrow 0 \quad \text{y} \quad b_k \longrightarrow 0 \quad \text{si } n \rightarrow +\infty. \quad (9.36)$$

$$(9.37)$$

□

Usando las formas explícitas de los coeficientes de Fourier, tenemos:

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = 0.}$$

En particular, esta propiedad implica que los armónicos de una función periódica tienen una amplitud que disminuye cuando n crece. La figura 9.6 muestra los cuatro primeros armónicos de la extensión impar de función $f(x) = 1$, $x \in]0, \pi[$.

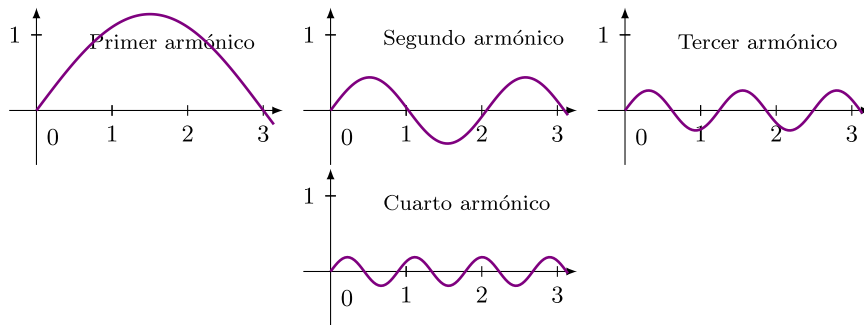


Figura 9.6: Los cuatro primeros armónicos de $f(x) = 1$

9.5. Fórmula de Dirichlet

Para usar las aproximaciones de una función periódica mediante polinomios de Fourier, es necesario saber bajo qué condiciones la serie de Fourier converge puntualmente.

Los siguientes resultados son necesarios para establecer dicha convergencia. En primera instancia obtendremos una estimación para el resto de este tipo de aproximación. Sean:

$$P_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \quad (9.38)$$

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) \quad (9.39)$$

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \cos(t) + \cos(2t) + \dots + \cos(nt), \quad \text{llamado núcleo de Dirichlet de orden } n. \quad (9.40)$$

Observación 9.5.1 1. Es inmediato que $D_n(t + 2\pi) = D_n(t)$, para todo $x \in]-\pi, \pi]$.

2. $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 1$. consecuencia de que $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} dt = 1$ y $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) dt = 0, k \in \mathbb{N}$.

Teorema 9.5.2 *Fórmula para el resto de Fourier en término del núcleo de Dirichlet*

Sean $f \in \mathfrak{F}$, $R_n(x)$ el resto de Fourier de f y $D_n(t)$ el núcleo de Dirichlet. Se cumple que:

$$R_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x-t)] D_n(t) dt \quad (9.41)$$

Demostración: En la expresión del polinomio de Fourier, reemplazamos los coeficientes por sus formas explícitas, obteniendo:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + \dots + a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \cos(x) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(t) dt + \sin(x) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(t) dt + \dots + \\ &\quad + \cos(nx) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt + \sin(nx) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \end{aligned}$$

Reagrupando los sumandos, nos queda:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) [\cos(x) \cos(t) + \sin(x) \sin(t)] dt + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) [\cos(2x) \cos(2t) + \sin(2x) \sin(2t)] dt + \\ &\quad + \dots + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) [\cos(nx) \cos(nt) + \sin(nx) \sin(nt)] dt \end{aligned}$$

Cada expresión en paréntesis cuadrado corresponde a un coseno de la diferencia de los argumentos respectivos, así:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(x-t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(2(x-t)) dt + \dots \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(n(x-t)) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left[\frac{1}{2} + \cos(x-t) + \cos(2(x-t)) + \dots + \cos(n(x-t)) \right] dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) D_n(x-t) dt.
 \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $u = x-t$, tenemos $du = -dt$ y los límites de integración son $u = x + \pi$ y $u = x - \pi$. Por lo tanto, el polinomio $P_n(x)$ puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
 P_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-u) D_n(u) (-du) = \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u) D_n(u) du \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) D_n(u) du.
 \end{aligned}$$

En virtud de $f(x+2\pi) = f(x)$, $D(u+2\pi) = D(u)$.

Usando la propiedad 2 de la observación 9.5.1, podemos escribir:

$$f(x) = f(x) \cdot 1 = f(x) \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) D_n(t) dt.$$

Así, tenemos:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) D_n(u) du - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) D_n(u) du \quad (9.42)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x-u)) D_n(u) du. \quad (9.43)$$

Con lo que termina la demostración. □

Ahora vamos a deducir una expresión resumida para $D_n(x)$.

Teorema 9.5.3 Si $n \in \mathbb{N}_0$ entonces

$$D_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{para todo } x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad (9.44)$$

Demostración: Usaremos inducción en n .

- Si $n = 0$,

$$D_0(x) = \frac{1}{2}$$

Por otra parte:

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}.$$

Por tanto, la fórmula (9.44) es válida para $n = 0$.

- Supongamos que (9.44) es válida para $n - 1, n \geq 1$. Por hipótesis de inducción tenemos que:

$$D_n(x) - \cos(nx) = \frac{1}{2} + \cos(x) + \cos(2x) + \dots + \cos((n-1)x) = \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Sumando $\cos(nx)$ a ambos lados tenemos,

$$D_n(x) = \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)} + \cos(nx) = \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right) + 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cos(nx)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)} \quad (9.45)$$

Usando las fórmulas de seno de una diferencia y de una suma, obtenemos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right) &= \operatorname{sen}(nx) \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cos(nx) \\ \operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) &= \operatorname{sen}(nx) \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cos(nx) \\ &= \operatorname{sen}(nx) \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cos(nx) + 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cos(nx) \end{aligned} \quad (9.46)$$

$$\operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) = \operatorname{sen}\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right) + 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cos(nx) \quad (9.47)$$

Reemplazando (9.47) en (9.45), obtenemos:

$$D_n(x) = \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

□

9.6. Un resultado de convergencia

Hasta ahora sabemos calcular la serie de Fourier de $f \in \mathfrak{F}$, pero no sabemos nada sobre su convergencia. En esta sección probaremos que si f es derivable en $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(kx_0) + b_k \sin(kx_0)) = f(x_0),$$

con a_k, b_k definido por

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

Lema 9.6.1 Si $f \in \mathfrak{F}$ y existe $f'(x_0)$ entonces, la función

$$\Psi_{x_0}(u) = \begin{cases} \frac{f(x_0) - f(x_0 - u)}{2 \sin(\frac{u}{2})} & \text{si } u \neq 0 \\ f'(x_0) & \text{si } u = 0 \end{cases}$$

es continua a tramos en $] -\pi, \pi[$.

Demostración: Usando la regla de L'Hôpital tenemos que $\Psi'_{x_0}(u) = \frac{-f'(x_0 - u)(-1)}{\cos(\frac{u}{2})}$ y evaluada en $u = 0$ es $f'(x_0)$. Por lo tanto, $\lim_{u \rightarrow 0} \Psi_{x_0}(u) = f'(x_0)$. $\square$

Teorema 9.6.1 Convergencia de la serie de Fourier Si $f \in \mathfrak{F}$, existe $f'(x_0)$ y

$$P_n(x) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k(t) \cos(kx) + b_k(t) \sin(kx)) \text{ entonces } \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x_0) = f(x_0).$$

Demostración: Usando la fórmula de Dirichlet (9.41) tenemos

$$R_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x_0) - f(x_0 - u)] D_n(u) du.$$

De acuerdo al lema ?? $D_n(u) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)u\right)}{2 \sin\left(\frac{u}{2}\right)}$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} [f(x_0) - f(x_0 - u)] D_n(u) &= \frac{[f(x_0) - f(x_0 - u)]}{2 \sin\left(\frac{u}{2}\right)} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)u\right) \\ &= \Psi_{x_0}(u) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)u\right). \end{aligned}$$

Como $\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)u\right) = \sin(nu) \cos\left(\frac{u}{2}\right) + \cos(nu) \sin\left(\frac{u}{2}\right)$, entonces

$$R_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_{x_0}(u) \left[\sin(nu) \cos\left(\frac{u}{2}\right) + \cos(nu) \sin\left(\frac{u}{2}\right) \right] du \quad (9.48)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_{x_0}(u) \cos\left(\frac{u}{2}\right) \sin(nu) du + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_{x_0}(u) \sin\left(\frac{u}{2}\right) \cos(nu) du. \quad (9.49)$$

Las funciones $\Psi_{x_0}(u) \cos\left(\frac{u}{2}\right)$ y $\Psi_{x_0}(u) \sin\left(\frac{u}{2}\right)$ son continuas a tramos, podemos aplicar el corolario de la desigualdad de Bessel, 9.4.2 y tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_{x_0}(u) \cos\left(\frac{u}{2}\right) \sin(nu) du = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_{x_0}(u) \sin\left(\frac{u}{2}\right) \cos(nu) du = 0.$$

Con estos resultados y la ecuación (9.49), concluimos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x_0) = 0$. $\square$

Ejemplo 9.6.2 Consideremos la función signo $f(x) = \text{sig}(x)$. En el ejemplo 9.3.3, obtuvimos la serie formal de Fourier de f .

$$\text{sig}(x) \sim \frac{4}{\pi} \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3x) + \frac{4}{5\pi} \sin(5x) + \dots$$

Ahora, en virtud del teorema 9.6.1 y siendo $\text{sig}(x)$ derivable en $x = \frac{\pi}{2}$ tenemos la igualdad:

$$\text{sig}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} + \frac{4}{3\pi}(-1) + \frac{4}{5\pi} + \frac{4}{7\pi}(-1) + \dots \quad (9.50)$$

$$\text{sig}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots \right] \quad (9.51)$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}. \quad (9.52)$$

En particular tenemos:

$$\text{sig}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin \pi/2}{1} + \frac{\sin 3\pi/2}{3} + \frac{\sin 5\pi/2}{5} + \dots \right) = \frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right).$$

Lo que nos da una forma de aproximar π :

$$\boxed{\pi = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right)}.$$

Establecemos ahora el siguiente resultado

Teorema 9.6.3 Estimación del salto de $S_n(x)$

Sea $f \in \mathfrak{F}$ de clase C^1 y sea $S_n(x)$ la n -ésima suma parcial de la serie de Fourier, entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0^+) + f(x_0^-)). \quad (9.53)$$

Demostración: Haremos la demostración en tres pasos.

Paso 1

La función Ψ definida por la ecuación

$$\Psi_{x_0}(u) = \begin{cases} \frac{f(x_0+u)+f(x_0-u)-f(x_0^+)-f(x_0^-)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right)}, & \text{si } u \neq 0 \\ f'(x_0^+) - f'(x_0^-), & \text{si } u = 0 \end{cases} \quad (9.54)$$

es continua a tramos en $] -\pi, \pi]$.

En efecto:

Basta analizar el comportamiento de Ψ en $u = 0$. Puesto que en el resto del intervalo a lo más tiene un número finito de discontinuidades con límites laterales.

$$\begin{aligned} \Psi_{x_0}(u) &= \frac{f(x_0+u) - f(x_0^+)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right)} \cdot \frac{u}{u} + \frac{f(x_0-u) - f(x_0^-)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right)} \cdot \frac{u}{u} \\ \Psi_{x_0}(u) &= \frac{f(x_0+u) - f(x_0^+)}{u} \cdot \frac{\frac{u}{2}}{\operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right)} - \frac{f(x_0-u) - f(x_0^-)}{-u} \cdot \frac{\frac{u}{2}}{\operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \Psi_{x_0}(u) = f'(x_0^+) + f'(x_0^-).$$

Paso 2

Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, se tiene

$$S_n(x) - a = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+u) + f(x-u) - 2a) D_n(u) du.$$

En efecto:

Sabemos que

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt \quad (9.55)$$

El cambio de variable $u = t - x$ transforma el intervalo de integración $] - \pi, \pi[$ en $] - \pi - x, \pi - x[$, pero considerando la periodicidad del integrando, podemos integrar sobre $] - \pi, \pi[$. Así, tenemos que:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-x-\pi}^{-x+\pi} f(x+u) D_n(-u) du = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) D_n(u) du, \quad \text{pues } D_n(-u) = D_n(u).$$

Por lo tanto,

$$S_n(x) - a = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+u) - a) D_n(u) du. \quad (9.56)$$

Por otra parte, el cambio de variable $u \rightarrow -u$, lleva el intervalo $[-\pi, 0]$ al intervalo $[0, \pi]$ y el intervalo $[0, \pi]$ al intervalo $[-\pi, 0]$, así tenemos que:

$$S_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{-\pi} f(x-u) D(u) (du) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) D_n(u) du. \quad (9.57)$$

Por lo tanto,

$$S_n(x) - a = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-u) - a) D_n(u) du. \quad \text{Usando que } \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) du = 1. \quad (9.58)$$

Sumando (9.55) y (9.56), obtenemos:

$$\begin{aligned} 2(S_n(x) - a) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-u) - a) D_n(u) du + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+u) - a) D_n(u) du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-u) + f(x+u) - 2a) D_n(u) du \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$S_n(x) - a = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-u) + f(x+u) - 2a) D_n(u) du.$$

Paso 3

Aplicando este resultado para $x = x_0$ y $a = \frac{1}{2} [f(x_0^+) + f(x_0^-)]$, tenemos que:

$$S_n(x_0) - \frac{1}{2} [f(x_0^+) + f(x_0^-)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x_0 - u) - f(x_0^-) + f(x_0 + u) - f(x_0^+)] D_n(u) du.$$

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & [f(x_0 - u) - f(x_0^+) + f(x_0 + u) - f(x_0^-)] D_n(u) = \\ & = \frac{[f(x_0 - u) - f(x_0^+) + f(x_0 + u) - f(x_0^-)] D_n(u)}{2 \operatorname{sen} \left(\frac{u}{2} \right)} 2 \operatorname{sen} \left(\frac{u}{2} \right). \end{aligned}$$

$$\blacksquare \quad D_n(u) \sin\left(\frac{u}{2}\right) = \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)u\right).$$

Podemos escribir:

$$\begin{aligned} [f(x_0 - u) - f(x_0^+) + f(x_0 + u) - f(x_0^-)] D_n(u) &= \Psi_{x_0}(u) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)u\right) \\ &= \Psi_{x_0}(u) \left[\sin(nu) \cos\left(\frac{u}{2}\right) + \cos(nu) \sin\left(\frac{u}{2}\right) \right] \\ &= \Psi_{x_0}(u) \sin(nu) \cos\left(\frac{u}{2}\right) + \Psi_{x_0}(u) \cdot \sin\left(\frac{u}{2}\right) \cos(nu) \end{aligned}$$

Luego,

$$S_n(x_0) - \frac{1}{2} [f(x_0^+) + f(x_0^-)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_{x_0}(u) \sin(nu) \cos\left(\frac{u}{2}\right) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_{x_0}(u) \cos(nu) \sin\left(\frac{u}{2}\right) du.$$

Usando el resultado del paso 1, $\Psi_{x_0}(x) \cos(\frac{1}{2}u)$, $\Psi_{x_0}(x) \sin(\frac{1}{2}u)$ son funciones continuas por tramos en $[-\pi, \pi]$, lo que nos permite usar el corolario de la desigualdad de Bessel y escribir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_{x_0}(u) \sin(nu) \cos\left(\frac{u}{2}\right) du &\longrightarrow 0 \quad \text{si } n \longrightarrow +\infty \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_{x_0}(u) \cos(nu) \sin\left(\frac{u}{2}\right) du &\longrightarrow 0 \quad \text{si } n \longrightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Finalmente, concluimos:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x_0) = \frac{1}{2} [f(x_0^+) + f(x_0^-)].$$

□

En síntesis tenemos el siguiente resultado sobre la convergencia de la serie de Fourier.

Teorema 9.6.4 Teorema de Dirichlet

Sea f una función definida sobre $\mathbb{R}$, 2π -periódica, C^1 a tramos. Entonces, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$, la serie de Fourier de f converge y se cumple que

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0) = \begin{cases} f(x_0) & \text{si } f \text{ es continua en } x_0 \\ \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2} & \text{si } f \text{ es discontinua en } x_0 \end{cases}$$

Ejemplo 9.6.5 Retomando el ejemplo 9.3.4, sabemos que la serie formal de Fourier de $f(x) = \pi - |x|$, $-\pi \leq x < \pi$ es:

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \cos(x) + \frac{4}{3^2\pi} \cos(3x) + \frac{4}{5^2\pi} \cos(5x) + \dots + \frac{4}{(2n+1)^2\pi} \cos((2n+1)x) + \dots$$

Para verificar que f es de clase C^1 a tramos, basta analizar su comportamiento en $x_0 = \pi$, ya en resto de los puntos es continuamente derivable.

$$f(\pi^-) = 0, \quad f(\pi^+) = 0, \quad f'(\pi^+) = 1, \quad f'(\pi^-) = -1.$$

Aplicando el teorema 9.6.3 sobre el salto de $S_n(x_0)$ en $x_0 = \pi$, tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x_0) = \frac{1}{2} [f(\pi^+) + f(\pi^-)] = 0.$$

o sea que

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \cos(\pi) + \frac{4}{3^2\pi} \cos(3\pi) + \dots &= 0 \\ \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left[-1 + \frac{-1}{3^2} + \frac{-1}{5^2} + \frac{-1}{7^2} + \dots \right] &= 0 \\ -\frac{4}{\pi} \left[+1 + \frac{+1}{3^2} + \frac{+1}{5^2} + \frac{+1}{7^2} + \dots \right] &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n+1} \right)^2.$$

En los otros puntos, donde existe f' , se aplica el teorema 9.6.1 y tenemos que

$$f(x) = \pi - |x| = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \cos(x) + \frac{4}{3^2\pi} \cos(3x) + \frac{4}{5^2\pi} \cos(5x) + \dots + \frac{4}{(2n+1)^2\pi} \cos((2n+1)x) + \dots$$

Ejemplo 9.6.6 La serie de Fourier de $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi]$ es:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] \quad (9.59)$$

Cálculo de los coeficientes a_n : La función idéntica es impar, por tanto, todos los coeficientes a_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ son nulos.

Cálculo de los coeficientes b_n : El cálculo de b_n se realiza usando integración por partes.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{-x \cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \right] \Big|_0^{\pi} = \frac{-2\pi(-1)^n}{n\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la serie de Fourier de $f(x) = x$ es:

$$x = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}, \text{ para todo } x \in]-\pi, \pi[.$$

Ejemplo 9.6.7 La serie de Fourier de $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$ es:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx] \quad (9.60)$$

Cálculo de los coeficientes b_n La función f es par, por tanto, todos los coeficientes b_n , $n = 1, 2, \dots$ son nulos.

Cálculo de los coeficientes a_n El cálculo de a_n se realiza usando integración por partes.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[-x \cos nx + \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2} \right] \Big|_0^{\pi} = \frac{4(-1)^n}{n^2} \\ a_0 &= \frac{2\pi^2}{3} \end{aligned}$$

Por ser f una función continua y derivable a tramos en $[-\pi, \pi]$, el teorema de Dirichlet, nos asegura la convergencia de la serie, por lo tanto:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n^2}, \text{ para todo } x \in]-\pi, \pi[.$$

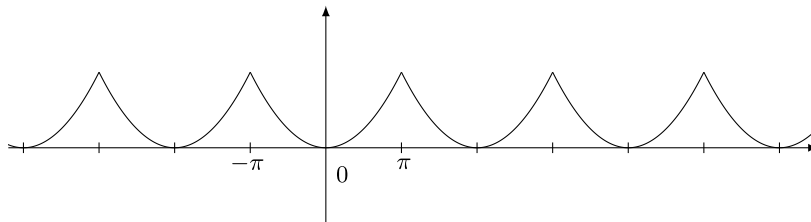
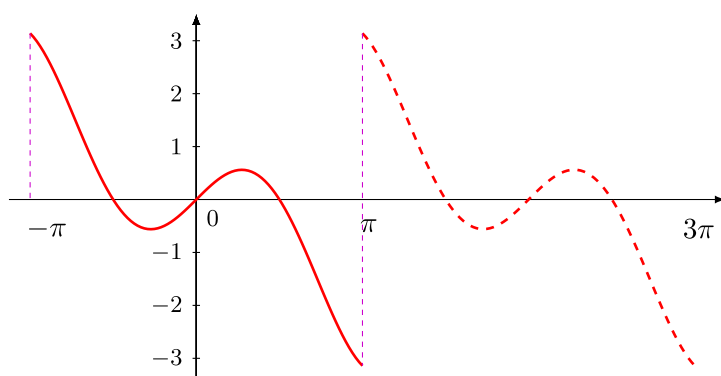


Figura 9.7: Onda parabólica

Figura 9.8: $f(x) = x \cos x$

Ejemplo 9.6.8 La serie de Fourier de $f(x) = x \cos x$, $x \in [-\pi, \pi]$ es:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] \quad (9.61)$$

Cálculo de los coeficientes a_n : La función f es impar, por tanto, todos los coeficientes a_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ son nulos.

Cálculo de los coeficientes b_n : El cálculo de b_n se realiza usando integración por partes.

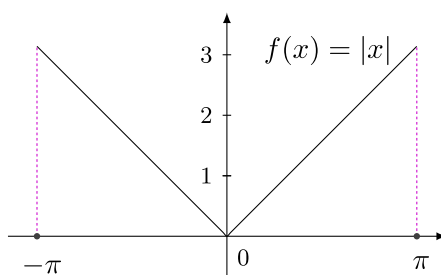
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos x \sin nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos x \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x [\sin(n+1)x + \sin(n-1)x] \, dx = \frac{2(-1)^n n}{n^2 - 1}. \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Dirichlet tenemos:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n \cos nx}{n^2 - 1} = \begin{cases} x \cos x, & \text{para todo } x \in]-\pi, \pi[\\ 0, & \text{si } x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ejemplo 9.6.9 La serie de Fourier de $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$ es:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] \quad (9.62)$$



Cálculo de los coeficientes b_n : La función f es par, por tanto, todos los coeficientes b_n , $n = 1, 2, \dots$ son nulos.

Cálculo de los coeficientes a_n : El cálculo de a_n se realiza usando integración por partes.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = 2 \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}, \quad n \geq 1 \\ a_0 &= \pi \end{aligned}$$

Como la extensión periódica de f es continua, la serie de Fourier de $f(x) = |x|$ converge puntualmente a la función en todo $x \in \mathbb{R}$.

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}, \text{ para todo } x \in]-\pi, \pi].$$

En particular, si $x = 0$, obtenemos:

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Este resultado , a su vez nos permite calcular la suma de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \end{aligned}$$

Lo que nos da,

(9.63)

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}.$$

Ejemplo 9.6.10 La serie de Fourier de la función triangular

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} \frac{\pi+x}{\pi} & \text{si } x \in [-\pi, 0] \\ \frac{\pi-x}{\pi} & \text{si } x \in [0, \pi] \end{cases} \\ f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx] \end{aligned} \quad (9.64)$$

Cálculo de los coeficientes a_n : El cálculo de a_n se realiza usando integración por partes.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi} (\pi - x) dx = 1 \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= \frac{2}{\pi^2} \left[\int_0^{\pi} \pi \cos nx dx - \int_0^{\pi} x \cos nx dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi^2} \left[-\frac{\pi \operatorname{sen} nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \left[\frac{x \operatorname{sen} nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right] \Big|_0^{\pi} \right] \\ &= \frac{2}{\pi^2} [1 - (-1)^n] = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{4}{\pi^2 n^2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \end{aligned}$$

Cálculo de los coeficientes b_n : La función f es par, por tanto, todos los coeficientes b_n , $n = 1, 2, \dots$ son nulos. Por lo tanto, la serie de Fourier de $f(x)$ es:

$$f(x) = 1 + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}, \text{ para todo } x \in]-\pi, \pi[.$$

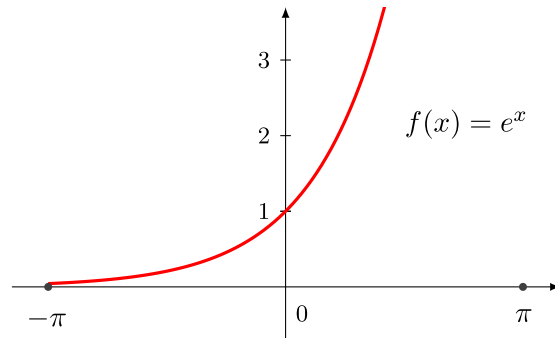


Figura 9.9: Función exponencial en $] - \pi, \pi]$

Ejemplo 9.6.11 La serie de Fourier de $f(x) = e^{ax}$, $a \in \mathbb{R}$.

Cálculo de los coeficientes a_n :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{e^{ax}}{a^2 + n^2} (a \cos nx + n \operatorname{sen} nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{e^{a\pi}}{a^2 + n^2} (a \cos n\pi + n \operatorname{sen} n\pi) - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{e^{-a\pi}}{a^2 + n^2} (a \cos(-n\pi) + n \operatorname{sen}(-n\pi)) \\ &= \frac{a}{\pi(a^2 + n^2)} (e^{a\pi} \cos n\pi - e^{-a\pi} \cos n\pi) = \frac{a \cos n\pi}{\pi(a^2 + n^2)} (e^{a\pi} - e^{-a\pi}) = \frac{a \cos n\pi}{\pi(a^2 + n^2)} (e^{a\pi} - e^{-a\pi}) \cdot \frac{2}{2} \\ &= \frac{2a \cos n\pi \operatorname{senh} a\pi}{\pi(a^2 + n^2)} = \frac{(-1)^n 2a \operatorname{senh} a\pi}{\pi(a^2 + n^2)} \end{aligned}$$

Cálculo de los coeficientes b_n :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{e^{ax}}{a^2 + n^2} [a \operatorname{sen} nx - n \cos nx] - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{e^{-ax}}{a^2 + n^2} [a \operatorname{sen}(-n\pi) + n \cos(-n\pi)] \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{n(-1)(-1)^n}{a^2 + n^2} \left(\frac{e^{a\pi} + e^{-a\pi}}{2} \right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1} 2n}{\pi(a^2 + n^2)} \cosh(a\pi). \end{aligned}$$

Así, tenemos que:

$$e^{ax} \sim \frac{\sinh a\pi}{a\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 + n^2} [a \sinh a\pi \cos nx + n \cosh a\pi \sin nx] \quad (9.65)$$

Las hipótesis del teorema de Dirichlet se satisfacen, por tanto:

$$\frac{\sinh a\pi}{a\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 + n^2} [a \sinh a\pi \cos nx + n \cosh a\pi \sin nx] = \begin{cases} e^{ax}, & x \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \\ \cosh a\pi & = \frac{e^{a\pi} + e^{-a\pi}}{2}, x = k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (9.66)$$

9.7. Series de Fourier de senos y cosenos

Las series de senos se aplican al problema de Dirichlet del calor. Las series de cosenos se aplican al problema de Neumann del calor y las generales a condiciones periódicas en el borde. Por ejemplo el problema del calor en una placa circular, que fue el que estudió Fourier.

Por otra parte, en los ejemplos hemos visto que si una función es par, su serie de Fourier contiene solo términos en coseno y si es impar, solo contiene términos en seno. Para funciones $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas a tramos puede obtenerse, como hemos visto en los preliminares, una extensión par o impar sobre el intervalo $[-\pi, \pi]$. Posteriormente, podemos extender, periódicamente f a todo $\mathbb{R}$. Es lo que estudiaremos en esta sección.

Definición 9.7.1 Dada una función $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ continua a tramos se llama :

- (i) **Serie de Fourier de cosenos de f** a la serie de Fourier de la extensión periódica de la extensión par de f al intervalo $[-\pi, \pi]$.
- (ii) **Serie de Fourier de senos de f** a la serie de Fourier de la extensión periódica de la extensión impar de f al intervalo $[-\pi, \pi]$.

Ejemplo 9.7.2 ■ La serie de Fourier de cosenos de $f(x) = x$, $x \in [0, \pi]$.

La extensión par de f al intervalo $[-\pi, \pi]$ es:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0, \pi] \\ f(-x) & \text{si } x \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

Por lo tanto, la serie de Fourier de F contiene sólo términos en cosenos, puesto que

F es par. Es decir,

$$\begin{aligned} b_n &= 0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \\ a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \, dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^\pi = 2 \frac{\pi}{2} = \pi. \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos(nx) \, dx, \quad \text{para } n > 0. \end{aligned}$$

Integrando por partes, tomando

$$v = x, \quad u' = \cos(nx) \quad \text{tenemos} \quad v' = 1, \quad u = \sin(nx) \frac{1}{n}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{n} (x \sin(nx)) \Big|_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin(nx) \, dx \right] = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} [(-1)^n - 1] \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{-4}{\pi(2n+1)^2} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \end{aligned}$$

Así, la serie de cosenos de f es:

$$f(x) = x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos(x) - \frac{4}{3^2\pi} \cos(3x) - \frac{4}{5^2\pi} \cos(5x) - \dots, \text{ para todo } x \in]0, \pi[.$$

- Para obtener la serie de senos de $f(x) = x$, debemos considerar la extensión impar de f al intervalo $[-\pi, \pi]$:

$$G(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0, \pi] \\ -f(-x) & \text{si } x \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

Por ser G una función impar, los coeficientes a_n son todos nulos. El cálculo de b_n se realiza usando integración por partes, de manera análoga a la del cálculo de la serie de cosenos.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi x \sin nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{-x \cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \right] \Big|_0^\pi = \frac{-2\pi(-1)^n}{n\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la serie de senos de $f(x) = x$ es:

$$x = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}, \text{ para todo } x \in]0, \pi[.$$

que converge a x para cada $0 < x < \pi$.

9.7.1. Fórmula de Parseval

Teorema 9.7.3 Sea f una función 2π -periódica continua a tramos en $[-\pi, \pi]$. Entonces se cumple que:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2), \quad (9.67)$$

donde

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt dt,$$

Demostración: Haremos la demostración para el caso en que f es continua de clase C^1 a tramos en $[-\pi, \pi]$. La convergencia de la serie de Fourier a f implica la convergencia uniforme de la sucesión de funciones $|s_n|^2 \rightarrow f^2$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |s_n(t)|^2 dt.$$

En la demostración de la desigualdad de Bessel vimos que:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |s_n(t)|^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kt + b_k \operatorname{sen} kt \right|^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2).$$

Pasando al límite obtenemos la igualdad de Parseval. □

9.7.2. Integración de series de Fourier

Teorema 9.7.4 Si f es de clase C^1 a tramos en $[-\pi, \pi]$, entonces la serie de Fourier de f es integrable término a término y la serie

$$\frac{a_0(F)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(F) \cos nx + b_n(F) \operatorname{sen} nx), \quad (9.68)$$

donde

$$F(x) = \int_{-\pi}^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt$$

$$a_n(F) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos nt \, dt, \quad n \geq 0.$$

$$b_n(F) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \operatorname{sen} nt \, dt, \quad n \geq 1.$$

converge a F .

Demostración: Por ser f de clase C^1 a tramos en $[-\pi, \pi]$, tenemos:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \quad \text{converge a} \quad f, \text{ y} \quad (9.69)$$

$$\text{la función} \quad F(x) = \int_{-\pi}^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt \quad \text{es:} \quad (9.70)$$

- Continua en $[-\pi, \pi]$
- Derivable en los puntos de continuidad de f . Así, F es de clase C^1 a tramos en $[-\pi, \pi]$.

$$F'(x) = f(x) - \frac{a_0}{2}.$$

Por lo tanto, se cumplen las hipótesis del teorema de Dirichlet, 9.6.1 y la serie dada por la ecuación por (9.68) converge a F .

Ahora, demostraremos que los coeficientes $a_n(F)$ y $b_n(F)$ se obtienen integrando los respectivos coeficientes de la serie de f .

$$a_n(F) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos nt \, dt$$

integrando por partes, tomando:

$$u = F(t) \quad \text{y} \quad v' = \cos nt, \text{ obtenemos,}$$

$$u' = f(t) - \frac{a_0}{2} \quad \text{y} \quad v = \frac{\operatorname{sen} nt}{n}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 a_n(F) &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{F(t) \operatorname{sen} nt}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \frac{\operatorname{sen} nt}{n} \right) dt \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{F(t) \operatorname{sen} nt}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt dt + \frac{a_0}{2n} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nt dt \right] \\
 &= -\frac{b_n}{n}, \quad n \geq 1.
 \end{aligned}$$

En particular, para obtener $a_0(F)$, usamos que:

$$F(\pi) = F(-\pi) = 0 = a_0(F) + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(F) \cos n\pi).$$

además, usando que $a_n(F) = -\frac{b_n}{n}$, tenemos:

$$\frac{a_0(F)}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{b_n}{n} \cos n\pi \right).$$

$$b_n(F) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \operatorname{sen} nt dt$$

integrando por partes, con

$$u = F(t) \quad \text{y} \quad v' = \operatorname{sen} nt,$$

obtenemos,

$$u' = f(t) - \frac{a_0}{2} \quad \text{y} \quad v = \frac{-\cos nt}{n}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 a_n(F) &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{F(t) \cos nt}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \frac{\cos nt}{n} \right) dt \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{F(t) \cos nt}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt - \frac{a_0}{2n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt dt \right] \\
 &= \frac{a_n}{n}, \quad n \geq 1.
 \end{aligned}$$

En síntesis, podemos escribir:

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_{-\pi}^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} [a_n \operatorname{sen} nx + b_n (\cos n\pi - \cos nx)] \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\int_{-\pi}^x a_n \cos nt dt + \int_{-\pi}^x b_n \operatorname{sen} nt dt \right]
 \end{aligned}$$

□

Ejemplo 9.7.5 Del ejercicio resuelto 9.6.6 de la página 849, sabemos que la serie de Fourier de x es:

$$2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}.$$

Para obtener la serie de $F(x) = \int_{-\pi}^x t dt = \frac{1}{2}(x^2 - \pi^2)$, aplicamos el teorema recién demostrado. La integración término a término de la serie de x , nos da:

$$-2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

Considerando que la función es par, debemos calcular explícitamente a_0

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(x^2 - \pi^2) dx = 2 \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(x^2 - \pi^2) dx = \frac{-2\pi^2}{3}.$$

Por lo tanto, la serie de $F(x)$ es:

$$\frac{-\pi^2}{3} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

Es decir,

$$\frac{1}{2}(x^2 - \pi^2) = \frac{-\pi^2}{3} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n^2},$$

lo que implica que:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

Usando el teorema de integración de series de Fourier, obtenemos la serie de x^2 , sin tener que efectuar las integraciones directas para calcular los coeficientes.

9.7.3. Derivación de series de Fourier

Teorema 9.7.6 Si f es continua sobre $[-\pi, \pi]$ y f' es de clase C^1 a tramos en $[-\pi, \pi]$ tal que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx), \quad x \in [-\pi, \pi]. \quad (9.71)$$

Entonces la serie de Fourier de f es derivable término a término y la serie así obtenida converge a f' .

Demostración: Por ser f' de clase C^1 a tramos en $[-\pi, \pi]$, la serie

$$\frac{a_0(f')}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f') \cos nx + b_n(f') \operatorname{sen} nx), \quad (9.72)$$

donde:

$$a_0(f') = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) dt = \frac{1}{\pi} [f(\pi^-) - f(\pi^+)] = 0, \quad \text{porque } f \text{ es continua.}$$

$$a_n(f') = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \cos nt dt, \quad n \geq 1.$$

$$b_n(f') = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \operatorname{sen} nt dt, \quad n \geq 1.$$

converge a f' . Ahora veremos que los coeficientes de la serie dada por la ecuación (9.72) se obtienen por derivación de los respectivos coeficientes de la serie de f .

$$a_n(f') = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \cos nt dt$$

integrando por partes, con:

$$\begin{aligned} u &= \cos nt \quad \text{y} \quad v' = f'(t), \text{ obtenemos,} \\ u' &= -n \operatorname{sen} nt \quad \text{y} \quad v = f(t) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} a_n(f') &= \frac{1}{\pi} \left[f(t) \cos nt \right]_{-\pi}^{\pi} + n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\cancel{f(t) \cos nt} \Big|_{-\pi}^{\pi} + n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt + \right] \\ &= nb_n, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

$$b_n(f') = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \operatorname{sen} nt \, dt$$

integrando por partes, con :

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{sen} nt \quad \text{y} \quad v' = f'(t), \text{ obtenemos,} \\ u' &= n \cos nt \quad \text{y} \quad v = f(t) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} b_n(f') &= \frac{1}{\pi} \left[f(t) \operatorname{sen} nt \right]_{-\pi}^{\pi} - n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\cancel{f(t) \operatorname{sen} nt} \Big|_{-\pi}^{\pi} - n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt + \right] \\ &= -na_n, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 9.7.7 Aceptando que la serie de Fourier de $f(x) = \cosh(ax)$ en $[-\pi, \pi]$ es,

$$\cosh(ax) = \frac{\operatorname{senh}(a\pi)}{\pi} \left[\frac{1}{a} + 2a \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{a^2 + n^2} \right]. \quad (9.73)$$

Como $f'(x) = a \sinh(ax)$ en $[-\pi, \pi]$ es continua, excepto en $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, puntos donde f' tiene límites a la izquierda y a la derecha, Así, f satisface las hipótesis del teorema de derivación de series de Fourier, por lo tanto, podemos obtener la serie de Fourier de f' derivando los respectivos coeficientes.

$$\sinh(ax) = 2 \frac{\sinh(a\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} n \sin nx}{a^2 + n^2}, \quad x \in]-\pi, \pi[. \quad (9.74)$$

9.7.4. Serie de Fourier de funciones periódicas de período cualquiera

Si f es una función T -periódica, $T \neq 2\pi$, usando el cambio de variable $x = \frac{T}{2\pi}u$, obtenemos que la función $\varphi(u) = f(x(u))$ es de período 2π . En efecto:

$$\begin{aligned} \varphi(u + 2\pi) &= f(x(u + 2\pi)) = f\left(\frac{(u + 2\pi)T}{2\pi}\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}u + T\right) \\ &= f(x + T) = f(x) = \varphi(u). \end{aligned}$$

Así, podemos aplicar a φ todo lo estudiado precedentemente, obteniendo:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{T} \right) \quad (9.75)$$

donde:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \frac{2n\pi x}{T} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.76)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin \frac{2n\pi x}{T} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.78)$$

Ejemplo 9.7.8 Sea $f(x) = x$ en $]0, 1[$, calcularemos las series de Fourier de sus diferentes extensiones.

1. La extensión periódica de f tiene período $T = 1$.

Cálculo de los coeficientes

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \int_0^1 x dx = 2 \\ a_n &= 2 \int_0^1 x \cos 2n\pi x dx = 0. \\ b_n &= 2 \int_0^1 x \sin 2n\pi x dx = -\frac{1}{n\pi}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$f \sim 1 - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} 2n\pi x}{n}.$$

Como la función es continua a tramos y derivable a tramos, la serie converge:

$$1 - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} 2n\pi x}{n} = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2. La extensión periódica par de f tiene período $T = 2$.

Cálculo de los coeficientes

$$a_0 = \int_{-1}^1 |x| dx = 1.$$

$$a_n = \int_{-1}^1 |x| \cos 2n\pi x dx = \frac{2}{(n\pi)^2} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{-4}{(n\pi)^2} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

$$b_n = 0.$$

Por lo tanto:

$$f \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2}.$$

Como la función es continua y derivable a tramos, la serie converge:

$$1 - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} 2n\pi x}{n} = f(x), x \in \mathbb{R}.$$

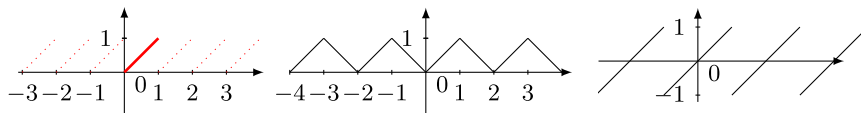


Figura 9.10: Extensiones periódicas de $f(x) = x$, en $[0, 1]$

3. La extensión periódica impar de f tiene período $T = 2$.

Cálculo de los coeficientes

$$a_n = 0.$$

$$b_n = \int_{-1}^1 |x| \operatorname{sen} n\pi x \, dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

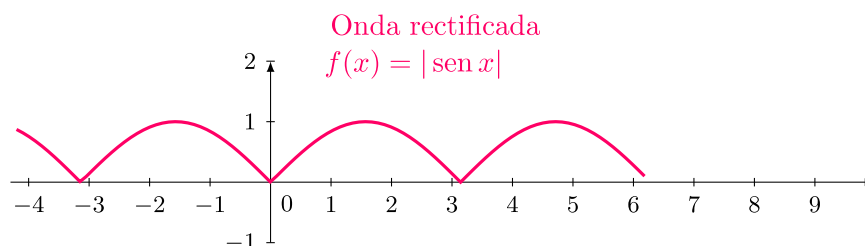
Por lo tanto:

$$f \sim \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} \operatorname{sen} k\pi x}{k}.$$

Como la función es continua a tramos y derivable a tramos, la serie converge:

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} \operatorname{sen} k\pi x}{k} = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 2k+1, k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x = 2k+1, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ejemplo 9.7.9 Serie de Fourier de $f(x) = |\operatorname{sen} x|$. Esta función es de período π y es par. Así, tenemos que los coeficientes $b_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.



$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen} x \, dx = \frac{4}{\pi}.$$

Si $n \geq 1$, tenemos:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen} x \cos 2nx \, dx$$

Transformando el producto en suma, nos queda:

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi [\operatorname{sen}(2n+1)x + \operatorname{sen}(1-2n)x] \, dx = \frac{4}{\pi(1-4n^2)}.$$

Por lo tanto:

$$f \sim \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(1-4n^2)} \cos 2nx.$$

9.8. Series de Fourier de funciones a valores complejos

9.8.1. La función exponencial compleja

Recordemos que:

1. Un número complejo es una expresión de la forma $(a + ib)$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$. El conjunto de los números complejos se denota por $\mathbb{C}$.
Se dice que a es la parte real del número complejo $(a + ib)$ y se denota por $Re(a + ib)$.
Se dice que b es la parte imaginaria del número complejo $(a + ib)$ y se denota $Im(a + ib)$.
2. Dado un número complejo $(a + ib)$ su complejo conjugado $\overline{(a + ib)}$ es el número complejo $\overline{(a + ib)} = (a - ib)$. Si z_1, z_2 son números complejos se cumple que $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ y $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
3. La norma o magnitud del número complejo $(a + ib)$ es el número real

$$\|a + ib\| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$$

4. Si $z = a + ib$, $w = c + id$ son números complejos se define

$$z + w = (a + c) + i(b + d) \quad ; \quad z \cdot w = ac - bd + i(bc + ad).$$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo y $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial real.

Debido a la relación de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta, \quad (9.79)$$

muchos cálculos con funciones trigonométricas se simplifican usando la ecuación (9.79). En primer lugar, obtenemos las expresiones

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad (9.80)$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}). \quad (9.81)$$

Otra ventaja de la notación compleja es que podemos derivar funciones de la exponencial compleja como si i fuera una constante real. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} C e^{i\theta x} &= \frac{d}{dx} C (\cos \theta x + i \operatorname{sen} \theta x) = C [\theta - \operatorname{sen} \theta x + i \theta \cos \theta x] \\ &= i C \theta (\cos \theta x + i \operatorname{sen} \theta x) = i C \theta e^{i\theta x}. \end{aligned}$$

Ahora consideraremos funciones f tales que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$. Como $f(x) \in \mathbb{C}$ escribimos:

$$f(x) = f_1(x) + i f_2(x), \text{ donde}$$

$f_1(x)$ es una función con valores reales, llamada la parte real de f ,

$f_2(x)$ es una función con valores reales, llamada la parte imaginaria de f .

También se puede escribir:

$$f(x) = \Re(f)(x) + i \Im(f)(x)$$

Definición 9.8.1 Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, diremos que la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, con $f_1(x) = \Re[f(x)]$ y $f_2(x) = \Im[f(x)]$ es :

- (i) Continua en x_0 si f_1 y f_2 son continuas en x_0 .
- (ii) Derivable en x_0 si f_1 y f_2 son derivables en x_0 .
- (iii) Integrable en $[a, b]$ si f_1 y f_2 son integrables en $[a, b]$ y se cumple que

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f_1(x) + i \int_a^b f_2(x) dx.$$

En virtud de esta definición, para definir la serie de Fourier de una función a valores complejos, es necesario que la parte real y la parte imaginaria de ella sean funciones del conjunto $\mathfrak{F}$.

Teorema 9.8.2 Propiedades de la función exponencial compleja

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad -\infty < x < \infty.$$

1. $\|e^{ix}\| = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. $e^{i(x_1+x_2)} = e^{i(x_1)} \cdot e^{i(x_2)}$.

3. $\overline{e^{ix}} = e^{-ix}$.

4. Si m, n son números enteros se cumple que:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \cdot \overline{e^{imx}} dx = \begin{cases} 1, & \text{si } n = m \\ 0, & \text{si } m \neq n. \end{cases}$$

Demostración:

1. $\| e^{ix} \| = \| \cos x + i \operatorname{sen} x \| = \sqrt{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x} = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

2.

$$\begin{aligned} e^{i(x_1+x_2)} &= \cos(x_1+x_2) + i \operatorname{sen}(x_1+x_2) \\ &= \cos(x_1)\cos(x_2) - \operatorname{sen}(x_1)\operatorname{sen}(x_2) + i(\operatorname{sen}(x_1)\cos(x_2) + \cos(x_1)\operatorname{sen}(x_2)) \end{aligned} \quad (9.82)$$

Por otra parte tenemos que:

$$\begin{aligned} e^{i(x_1)} \cdot e^{i(x_2)} &= (\cos(x_1) + i \operatorname{sen}(x_1))(\cos(x_2) + i \operatorname{sen}(x_2)) \\ &= \cos(x_1)\cos(x_2) + i^2 \operatorname{sen}(x_1)\operatorname{sen}(x_2) + i(\cos(x_1)\operatorname{sen}(x_2) + \operatorname{sen}(x_1)\cos(x_2)) \\ &= \cos(x_1)\cos(x_2) - \operatorname{sen}(x_1)\operatorname{sen}(x_2) + i(\cos(x_1)\operatorname{sen}(x_2) + \operatorname{sen}(x_1)\cos(x_2)) \end{aligned} \quad (9.83)$$

Comparando (9.82) y (9.83), obtenemos que:

$$e^{i(x_1+x_2)} = e^{i(x_1)} \cdot e^{i(x_2)}$$

3.

$$\overline{e^{i(x_1)}} = \cos(x_1) - i \operatorname{sen}(x_1) = \cos(-x_1) + i \operatorname{sen}(-x_1) = e^{i(-x_1)}.$$

4.

$$e^{i(nx)} \cdot \overline{e^{i(mx)}} = e^{i(nx)} \cdot e^{i(-mx)} = e^{i(nx-mx)} = e^{i((n-m)x)} = \cos((n-m)x) + i \operatorname{sen}((n-m)x).$$

Así tenemos que:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(nx)} \cdot \overline{e^{i(mx)}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n-m)x) dx + i \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}((n-m)x) dx.$$

Si $n = m$,

$$e^{i(nx)} \cdot e^{i(-nx)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = 1$$

Si $m \neq n$, ambas integrales se anulan.

□

9.8.2. La serie de Fourier compleja

Denotaremos por $\mathfrak{F}(\mathbb{C})$ el conjunto de las funciones f tales que:

- (i) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$.
- (ii) Las partes real e imaginaria de f pertenecen a $\mathfrak{F}$.

Sobre este conjunto se puede definir un producto escalar mediante la relación:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx. \quad (9.84)$$

En virtud de esta definición y el teorema 9.8.2, vemos que las funciones e^{inx} , $n \in \mathbb{Z}$, forman un conjunto ortogonal en $\mathfrak{F}(\mathbb{C})$, por lo cual podemos definir la serie de Fourier formal de $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{C})$, de manera análoga al caso de funciones con valores reales.

Definición 9.8.3 Si $f(x) \in \mathfrak{F}(\mathbb{C})$ su serie formal de Fourier compleja está dada por:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx},$$

donde los coeficientes $c_n \in \mathbb{C}$, están definidos por:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

en tal caso escribimos $f \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$.

En virtud de la relación de Euler (9.79), la relación entre los coeficientes a_n , b_n y c_n son:

$$a_n = c_n + c_{-n} \quad b_n = i(c_n - c_{-n})$$

Teorema 9.8.4 Desigualdad de Bessel Si $f(x) \in \mathfrak{F}(\mathbb{C})$ y $f(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ entonces

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx. \quad (9.85)$$

Demostración:

Sean $S_n(x)$ la suma parcial de orden n de la serie de Fourier compleja de f y $\Psi_n(x)$ un polinomio trigonométrico complejo de orden n cualquiera. Es decir,

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_n e^{ikx}$$

$$\Psi_n(x) = \sum_{k=-n}^n d_n e^{ikx}.$$

Usando la propiedad de ortogonalidad de las exponenciales complejas, tenemos:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_n(x) \overline{E(mx)} dx, = 0, \quad m = \pm(n+1), \pm(n+2), \dots$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_n(x)) \overline{E(mx)} dx, = 0, \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm n.$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(x) \cdot \overline{S_n(x)} dx = |c_{-n}|^2 + |c_{-(n-1)}|^2 + \dots + |c_0|^2 + |c_1|^2 + \dots + |c_n|^2.$$

Así, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_n(x) + S_n(x)) \cdot \overline{(f(x) - S_n(x) + S_n(x))} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2 dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(x) \cdot \overline{S_n(x)} dx \end{aligned}$$

La primera integral es un número no negativo, por tanto tenemos:

$$\geq |c_{-n}|^2 + |c_{-(n-1)}|^2 + \dots + |c_0|^2 + |c_1|^2 + \dots + |c_n|^2, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Esto demuestra que $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$, es una cota superior de las sumas parciales de la serie de términos positivos $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$. con lo cual queda demostrado el teorema. $\square$

Teorema 9.8.5 Convergencia de la serie de Fourier compleja Sea $f(x) \in \mathfrak{F}(\mathbb{C})$ tal que $f'(x_0)$ existe y $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$. Si $S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ es la suma parcial de orden n de la serie de Fourier compleja de $f(x)$ se cumple que;

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x_0) = f(x_0). \quad (9.86)$$

Demostración:

Paso 1 demostraremos la validez de la fórmula

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{-n}^n e^{inx} = \frac{1}{\pi} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}. \quad (9.87)$$

En efecto: Usando la paridad de la función coseno y la fórmula 2 tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^n \cos(kx) &= \cos(-nx) + \cos(-(n-1)x) + \dots + \cos(-x) + 1 + \cos(x) + \dots + \cos(nx) \\ &= 2 \left[\frac{1}{2} + \cos(x) + \cos(2x) + \dots + \cos(nx) \right] 2 \sum_{k=-n}^n \cos(kx) = 2D_n(x). \end{aligned}$$

Aplicando la propiedad de imparidad de la función seno, obtenemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^n \sin(kx) &= \sin(-nx) + \sin(-(n-1)x) + \dots + \sin(-x) + \sin(0) + \sin(x) + \dots + \sin(nx) \\ &= -\sin(nx) - \sin((n-1)x) - \dots - \sin(x) + \sin(x) + \sin(2x) + \dots + \sin(nx) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{2\pi} \left(\sum_{n=-n}^n \cos(nx) + i \sum_{n=-n}^n \sin(nx) \right) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-n}^n (\cos(nx) + i \sin(nx)) = \frac{1}{2\pi} \cdot 2D_n(x). \quad (9.88)$$

En síntesis, tenemos:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{inx} = \frac{1}{\pi} D_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}. \quad (9.89)$$

Paso 2

Reemplazando la expresión explícita de los coeficientes de Fourier en la suma parcial $S_n(x)$, podemos escribir:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{-n}^n c_n e^{inx} = \sum_{-n}^n e^{inx} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{e^{int}} dt \\ &= \sum_{-n}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{in(x-t)} dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1}{2\pi} \sum_{-n}^n e^{in(x-t)} dt. \end{aligned}$$

Usando la fórmula demostrada en el paso 1, obtenemos la expresión:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot D_n(x-t), dt.$$

Escribiendo $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$, tenemos

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(t) D_n(x-t) dt + i \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_2(t) D_n(x-t) dt \right)$$

Cambiando variable

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x-u) D_n(u) du + i \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_2(x-u) D_n(u) du \right).$$

Así,

$$\begin{aligned} f(x) - S_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f_1(x) - f_1(x-u)) D_n(u) du + i \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f_2(x) - f_2(x-u)) D_n(u) du \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f_1(x) - f_1(x-u)) \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)u\right)}{2 \sin\left(\frac{u}{2}\right)} + i \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f_2(x) - f_2(x-u)) \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)u\right)}{2 \sin\left(\frac{u}{2}\right)} du \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_x(f_1)(u) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)u\right) du + i \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_x(f_2)(u) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)u\right) du \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_x(f_1)(u) \cos\left(\frac{1}{2}u\right) \sin(nu) du + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_x(f_1)(u) \sin\left(\frac{1}{2}u\right) \cos(nu) du \\ &\quad + i \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_x(f_2)(u) \cos\left(\frac{1}{2}u\right) \sin(nu) du + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_x(f_2)(u) \sin\left(\frac{1}{2}u\right) \cos(nu) du \right]. \end{aligned}$$

De la demostración del teorema 2, estas cuatro integrales tienden a cero con n en cada x tal que $f'_1(x)$ y $f'_2(x)$ existen, luego

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x) - S_n(x)) = 0 \quad \text{para todo } x \text{ tal que } f'_1(x) \text{ y } f'_2(x) \text{ existen.}$$

Ejemplo 9.8.6 Para calcular la serie de Fourier compleja de la función $f(x) = x$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$, extendemos la función periódicamente a $\mathbb{R}$.

Cálculo de los coeficientes c_n para $n \neq 0$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{i-nx} dx = \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{x}{ni} e^{in} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{ni} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i-nx} dx$$

Integrando por partes, nos queda,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\pi}{ni} e^{i-n\pi} - \frac{\pi}{ni} e^{in\pi} \right] + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{ni} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i-nx} dx \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{ni} + \frac{1}{2\pi ni} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx - \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx) dx \\ c_n &= \frac{(-1)^{n+1}}{ni}. \\ c_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0. \end{aligned}$$

Así, nos queda la serie de Fourier:

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in} &= \sum_{-\infty}^{-1} c_n e^{in} + \sum_1^{+\infty} c_n e^{in} \\ &= \sum_{-\infty}^{-1} \frac{(-1)^{n+1}}{ni} (\cos(nx) + i \operatorname{sen}(nx)) + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{ni} (\cos(nx) + i \operatorname{sen}(nx)) \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable discreta $k = -n$

$$\begin{aligned} &= \sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^{-k+1}}{-ki} (\cos(-kx) + i \operatorname{sen}(-kx)) + \sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{ni} (\cos(nx) + i \operatorname{sen}(nx)) \\ &= - \sum_1^{\infty} 2 \frac{(-1)^{k+1}}{k} \operatorname{sen}(kx) = -2 \sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \operatorname{sen}(kx). \end{aligned}$$

Podemos observar que es el mismo desarrollo de la extensión impar de $f(x) = x$, $[0, \pi]$.

9.8.3. Ejercicios resueltos

1. Expresar los coeficientes de Fourier de $f(x - x_0)$ en términos de los coeficientes de $f(x) \in \mathfrak{F}(\mathbb{C})$.

Solución:

Definamos la función $g(x) = f(x - x_0)$. Ya que $f(x) \in \mathfrak{F}(\mathbb{C})$, tenemos que también $g(x) \in \mathfrak{F}(\mathbb{C})$, en particular tienen el mismo período. Así, los coeficientes de g son:

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - x_0) e^{inx} dx$$

Haciendo el cambio de variable $u = x - x_0$, nos queda:

$$\begin{aligned} c_n(g) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{in(u+x_0)} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{ix_0} e^{inu} du \\ &= e^{ix_0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{inu} du \\ &= e^{ix_0} c_n(f) \end{aligned}$$

2. Use el ejercicio anterior para calcular los coeficientes de Fourier de $g(x) = |\cos x|$ a partir de los coeficientes de $f(x) = |\sin x|$.

Solución:

Usando el ejemplo 9.7.9, sabemos que $g(x) = |\cos x| = |\sin(x + \pi/2)|$. Además, $e^{-2n\pi/2i} = e^{-in\pi} = \cos n\pi - i \sin n\pi = \cos n\pi = (-1)^n$. Por lo tanto, $a_n = \frac{4(-1)^n}{\pi(1-4^2)}$ y $b_n = 0$.

9.8.4. Serie de Fourier de un producto de funciones

Si f y g funciones de clase C^1 a tramos en $[-\pi, \pi]$, entonces el producto fg también es clase C^1 a tramos en $[-\pi, \pi]$. Así, tiene sentido preguntarse por la serie de Fourier de la función producto.

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx} \\ g_n(x) &= \sum_{k=-n}^n c_k(g) e^{ikx} \\ c_k(f_n g_n) &= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(x) g_n(x) e^{-ikx} dx \\ &= \sum_{j=-n}^n c_j(g) \left[\sum_{l=-n}^n c_l(f) \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(l+j-k)} dx \right] \end{aligned}$$

Usando la ortogonalidad de las exponenciales complejas, tenemos que la única integral que no se anula es cuando $l + j - k = 0$.

Por lo tanto,

$$c_k(f_n g_n) = \sum_{j=-n}^n c_j(g) c_{k-j}(f)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_k(f_n g_n) = c_k(fg) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_j(g) c_{k-j}(f).$$

Para que la última expresión sea verdadera, la serie debe ser absolutamente convergente. En efecto:

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |c_j(g) c_{k-j}(f)| \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |c_j(g)| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)| \right) \leq +\infty$$

Índice alfabético

- Abscisa, 116
- Aceleración
 - media, 484
- Altura de una montaña, 247
- Amplitud, 233
 - de la senoide, 230
- Ángulo
 - de fase, 230, 233
 - de incidencia, 463
 - de reflexión, 463
 - formado por dos rectas, 378
 - medición de, 201
- Apolonio, 390
- Aritmética
 - de derivadas, 298
 - de funciones, 110
 - de límites finitos, 154
 - de límites infinitos, 140
 - de sucesiones, 74, 76
- Asíntota, 169
 - de la tangente, 252
 - horizontal, 148, 149, 170, 358
 - oblicua, 171
 - vertical, 144, 170, 358
- Axioma del Supremo, 3, 45, 47, 50, 51
- Axiomas de cuerpo, 3, 4, 45
- Barrow, 424
- Bifolio, 451
- Cálculo
 - análisis de curvas, 404
 - de áreas y volúmenes de sólidos de revolución, 668
 - de continuidad de funciones, 183
 - de derivadas, 305, 332
 - de ecuaciones
 - con valor absoluto, 38
 - de funciones
 - exponenciales, 278
 - logarítmicas, 278
 - trigonométricas, 216, 228
 - de inecuaciones, 25
 - con valor absoluto, 38
 - de integrales, 630
 - elípticas, 683
 - impropias, 710
 - de límites
 - por acotamiento, 79
 - de límites
 - de funciones de variable continua, 159
 - de funciones trigonométricas, 260
 - de sucesiones, 87
 - por acotamiento, 157
 - regla de L'Hopital, 350
 - de longitudes de curvas, 653
 - de máximos y mínimos, 458
 - de polinomios y series de Taylor, 803
 - de razón de cambio, 476
 - de series
 - de funciones, 780
 - numéricas, 752
 - de supremos e ínfimos, 52

gráfico de funciones, 118, 354
 Caracol de Pascal, 452
 Cardioide, 430, 451
 Cicloide, 443
 Circunferencia, 200
 unitaria, 201, 202
 Cisoide, 402
 Cóncava, 322
 Concavidad, 357, 363
 Concoide de Nicomedes, 452
 Cónica, 390, 431
 Conjunto
 $\mathbb{R}$, 3, 11, 45
 $\overline{\mathbb{R}}$, 67
 último elemento, 48, 49, 56, 58
 de números reales, 3
 irracionales, 265
 primer elemento, 48, 49, 57, 58
 Continuidad
 de funciones elementales, 178
 de la función compuesta, 178
 de la inversa, 183
 de la suma de funciones, 178
 de las funciones circulares, 258
 discontinuidad no removible, 184
 discontinuidades removibles, 179
 funciones continuas, 175
 interpretación geométrica, 177
 y sucesiones, 178
 Convergencia de la media aritmética, 101
 Convexa, 322
 Coordenadas
 paramétricas, 432
 polares, 434
 curva expresadas en, 444
 rectangulares, 116
 Cota
 inferior, 46–48, 52–54, 56, 57, 59
 superior, 45–49, 51–54, 56–59
 Criterio

de la primera derivada, 321
 de la segunda derivada, 323
 Cuociente, 178
 Curva
 dada por ecuaciones paramétricas, 432
 de grado mayor que dos, 401
 en coordenadas polares, 444
 en el plano, 434
 intersección de dos curvas, 376
 Derivada, 292
 a la derecha, 297
 a la izquierda, 297
 de funciones trigonométricas, 303
 derivación implícita, 424
 segunda derivada de f , 304
 Desigualdad
 de Bernoulli, 82
 triangular, 35, 38, 42
 Diagrama de Cauchy, 214
 Diferencia, 178
 Diferencial, 478
 Directriz, 391
 directrices y excentricidad, 391
 Distancia
 a un punto inaccesible, 244
 de un punto a una recta, 405
 entre dos puntos, 374
 entre dos puntos inaccesibles, 245
 Ecuación
 de la parábola, 387
 de segundo grado, 397
 clasificación de, 400
 curvas representadas por, 380
 de una circunferencia, 380
 de una elipse, 381
 de una hipérbola, 384
 trigonométrica, 225
 Ecuación

- de segundo grado, 16
- Eje
 - conjugado, 385
 - imaginario, 385
 - transversal, 385
 - traslación de los ejes de coordenadas, 392
- Elipse, 381
 - centro de la, 383
 - ecuación, 381
- Espiral
 - de Arquímedes, 453
 - hiperbólica, 453
- Estrofoide recta, 424
- Foco, 391
- Forma indeterminada, 67
 - del tipo $0 \cdot \infty$, 344
 - del tipo $\frac{0}{0}$, 341
 - del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, 343
 - del tipo $\infty - \infty$, 344
- Fórmula
 - de Cardano-Tartaglia, 18
 - de factorización, 6
 - de la distancia en el plano, 200
 - de Wallis, 267
 - del binomio, 7
- Fracciones Parciales, 513
- Fracciones parciales, 95
- Frecuencia
 - de la senoide, 230
 - natural, 487
- Fricción, 488
- Función, 111, 113, 176
 - acotada, 111
 - arcocosecante, 260, 331
 - arcocoseno, 259, 329
 - arcocotangente, 259, 330
 - arcosecante, 260, 331
 - arcoseno, 259, 328
 - arcotangente, 259, 329
 - Beta, 709
 - cero de una función, 112
 - circulares o trigonométricas, 200, 202
 - comparación usando límites, 158
 - cóncava, 322
 - concavidad, 357, 363
 - constante, 109
 - continua, 175, 177
 - continua a tramos, 177
 - convexa, 322
 - cosecante, 209, 211
 - coseno, 203
 - cotangente, 209, 210
 - creciente en sentido amplio o creciente, 111
 - cuadrática, 109
 - de Bessel, 787
 - decreciente en sentido amplio o decreciente, 111
 - derivable, 297
 - derivada, 297
 - diferenciable, 297
 - estrictamente creciente, 111, 182, 321
 - estrictamente decreciente, 111, 321
 - exponencial, 268
 - extremo, 112
 - Gama, 708
 - hiperbólicas, 280
 - identidades, 281
 - paridad, 281
 - hiperbólicas inversas, 283
 - igualdad de funciones, 110
 - impar, 113, 131
 - ínfimo, 198
 - inversa, 133
 - inyectiva, 114, 132
 - lineal no constante, 109
 - logaritmo, 276

- máximo, 112, 316, 333, 334
- mínimo, 112, 316, 333, 334
- monótona, 111
- par, 113
- parte entera, 112, 184, 261
- periódica, 113, 224
- polinomial, 109
- punto de inflexión, 333, 334, 358
- racional, 109
- representación gráfica de funciones, 116
- secante, 209, 211
- signo, 196
- sinusoidal, 229
- sobreyectiva, 114
- supremo, 198
- tangente, 209
 - asíntotas, 252
 - límites, 252
- trascendente, 199
- trigonométrica, 200, 202
 - derivadas, 303
 - identidades básicas, 212
- Galileo, 391
- Geometría analítica, 374
- Hipérbola
 - asíntotas de la, 386
 - ecuación, 384
 - equilátera, 386
 - focos, 385
 - hipérbolas conjugadas, 386
 - vértices, 385
- Hipocicloide de cuatro vértices o astroide, 439
- Hoja de Descartes, 429
- Identidades
 - de funciones trigonométricas, 212
 - funciones hiperbólicas, 281
- Igualdad de funciones, 110
- Inecuación
 - de segundo grado, 21
 - de tercer grado, 22
- Ínfimo, 47–49, 52–55, 57
- Integración
 - de $f(x) = x^p(ax^n + b)^q$ $p, q, n \in \mathbb{Q}$., 546
 - de funciones irracionales simples, 544
 - de funciones racionales, 512, 516
 - de funciones racionales de x y $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, 549
 - de funciones trigonométricas, 524
 - de funciones trigonométricas inversas, 534
 - del tipo $\int P(\ln x)dx$; donde $P(x)$ es un polinomio, 540
 - del tipo $\int P(x)(\ln x)^m dx$., 542
 - del tipo $\int P(x)a^x dx$, donde $P(x)$ es un polinomio, 539
 - del tipo $\int f(a^x) dx$., 538
 - del tipo $\int x^n(\ln x)^m dx$; $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$., 541
 - fórmulas básicas de, 495
 - fracciones parciales, 516
 - métodos de
 - fórmulas de reducción, 505
 - fracciones parciales, 512
 - numéricos, 678
 - por partes, 497
 - por sustitución, 497
 - sustituciones hiperbólicas, 536
 - sustituciones trigonométricas, 531
- Integral
 - de Riemann, 555, 564, 574, 600, 691, 722
 - cálculo de integrales, 570
 - propiedades, 594
 - definida, 561, 564
 - inferior, 563

- superior, 564
- elíptica, 675
 - de primera clase, 676
 - de segunda clase, 676
 - de tercera clase, 676
- impropia, 691
 - convergente, 692
 - de primera clase, 691
 - de segunda clase, 699
 - divergente, 692
- indefinida, 493, 494
 - ejercicios, 504
 - propiedades, 497
- partición, 561
- Intersección de dos curvas, 376
- Intervalo
 - no acotado, 49
 - acotado, 49
- Kepler, 390
- Leibniz, 327
- Lemniscata de Bernoulli, 402, 403, 447, 451
- Lemniscata de Geroni, 436
- Ley de Tricotomía, 11
- Límite
 - a la derecha, 150
 - a la izquierda, 150
 - de una función, 150
 - interpretación geométrica, 154
 - polinomial, 146, 147, 156
 - racional, 147, 156
 - tangente, 252
 - trigonométrica, 248
 - de una sucesión, 69, 73
 - interpretación geométrica, 73
 - límites finitos en un punto x_0 , 149
 - límites infinitos, 138, 141, 145
 - límites infinitos en una vecindad de x_0 , 142
 - límites laterales, 150
- Logaritmo natural o neperiano, 278
- Lugar geométrico, 380
- Máximo, 316, 333, 334
 - Problemas, 458
- Media
 - geométrica, 93
- Mínimo, 316, 333, 334
 - Problemas, 458
- Movimiento oscilatorio
 - amortiguado, 488
 - amortiguado y forzado, 488
 - conservativo, 488
- Número
 - e , 85, 267
 - algebraico, 199
 - irracional, 265
 - real, 3, 11, 45
 - densidad, 15
 - trascendente, 199
- Números
 - reales, 3
- Ordenada, 116
- Ovalos de Cassini, 452
- Parábola
 - directriz, 388
 - ecuación, 387
- Paridad
 - de las funciones hiperbólicas, 281
- Partición de un intervalo, 594
- Pendiente, 378
- Período, 233
 - de funciones seno y coseno, 204
- Potencia
 - de exponente cero, 263
 - de exponente entero negativo, 263
 - de exponente entero positivo, 262

- de exponente irracional, 266
- de exponente racional, 263
- de exponente real, 268
- Principio
 - de Arquímedes, 49
 - de inducción, 64
 - del buen orden, 64
- Problemas
 - de análisis de curvas, 404
 - de áreas y volúmenes de sólidos de revolución, 668
 - de continuidad de funciones, 183
 - de derivadas, 305, 332
 - de diferenciales, 476
 - de ecuaciones
 - con valor absoluto, 38
 - de funciones
 - exponenciales, 278
 - logarítmicas, 278
 - trigonométricas, 216, 228
 - de gráficos de funciones, 354
 - gráficos de funciones, 118
 - de inecuaciones, 25
 - con valor absoluto, 38
 - de integrales, 630
 - elípticas, 683
 - impropias, 710
 - de límites
 - de funciones de variable continua, 159
 - de funciones trigonométricas, 260
 - de sucesiones, 87
 - usando regla de L'Hôpital, 350
 - de longitudes de curvas, 653
 - de máximo y mínimo, 458
 - de polinomios y series de Taylor, 803
 - de series
 - de funciones, 780
 - numéricas, 752
 - de supremos e ínfimos, 52
- Producto, 178
- Progresión
 - aritmética, 64
 - geométrica, 65
- Propiedad
 - arquimediana de los números reales, 45, 50, 52
 - de Tricotomía, 11
- Punto
 - crítico, 322
 - de inflexión, 326, 333, 334, 358
- Raíz
 - existencia de raíces, 264
 - q-ésima, 263
- Radián, 202
- Rapidez del movimiento, 483
- Razón de cambio, 476
 - instantánea, 476
 - promedio, 476
- Recta
 - normal, 295, 296, 305
 - pendiente o inclinación, 378
 - que pasa por el origen, 377
 - secante, 294
 - tangente, 305
- Referencia
 - ceros y signo de las funciones seno y coseno, 208
 - límites de funciones trigonométricas, 248
 - valores de referencia de seno y coseno, 209
- Regla
 - de Barrow, 612, 694, 702
 - de L'Hôpital, 341, 350
 - de la cadena, 302, 311
 - de Simpson, 680
 - del trapecio, 678
- Resolución de ecuaciones algebraicas
 - de grado mayor o igual a 3, 17
 - de primer grado, 6

Roce, 488

Rosa

de n pétalos, 453

de cuatro pétalos, 430, 453

Sólido de revolución, 660

Serie

absolutamente convergente , 742

armónica, 741

armónica alternada, 741

binomial, 798, 810

condicionalmente convergente , 742

convergente, 732

criterios de convergencia

Abel, 743

comparación, 736

comparación al límite, 737

condicional, 742

de la raíz, 739

Dirichlet, 743

integral, 734

Leibniz, 740

razón o cociente, 737

de coseno, 797

de funciones, 767

puntualmente convergente, 769

uniformemente convergente, 769

de Maclaurin, 795

de potencias, 773

armónica, 776

armónica alternada, 776

convergencia, 773

diferenciación, 772

integración, 771

intervalo de convergencia, 775

producto, 780

radio de convergencia, 775

suma, 780

de seno, 798

de términos alternados, 740

de Taylor, formal, 793

divergente, 732

criterio de divergencia, 733

exponencial, 795

Gauss, 752

geométrica, 83, 733, 798

geométrica de razón r , 84

hiperarmónica, 736

Kummer, 751

multiplicación de series de términos positivos, 745

numéricas, 732

Polinomial, 765

producto, 747

Raabe, 752

suma, 732

suma parcial, 732

término general de, 732

Sucesión, 65

acotada, 66

convergente, 74

convergente no monótona, 73

creciente, 65

de Fibonacci, 96

de números reales, 63

divergente, 67, 74

estrictamente creciente, 65

estrictamente decreciente, 65

monótona, 66

monótona acotada, 69

monótona no acotada, 67

Suma

de Riemann, 561, 562, 648, 678, 766

inferior, 558

superior, 558

Supremo, 46–49, 53–57

Teorema

de Bolzano - Weierstrass, 179, 192

de densidad de los números reales, 15

- de la función inversa, 326
- de recurrencia, 64
- de Riemann, 744
- de Rolle, 317, 318
- de Taylor, 792
- de unicidad del límite de una función, 153
- de Weierstrass, 181, 192
- del coseno, 237, 239
- del seno, 237, 239
- del valor intermedio, 185
- del valor intermedio o de Darboux, 180
- del Valor Medio
 - para integrales, 599, 600
- del valor medio de Cauchy, 341
- del valor medio de Cauchy, 319
- del valor medio de Lagrange, 318
 - interpretación física, 318
- del valor medio para dos funciones, 319
- Fundamental de Cálculo, 611
- unicidad del límite, 74
- Torre de pie
 - accesible, 246
 - inaccesible, 246
- Traslación de los ejes de coordenadas, 392
- Tricotomía, 11
- Valor absoluto, 34–36, 38–40, 42
- Vecindad de un punto, 141
- Velocidad, 483
 - inicial, 484
 - instantánea, 483
 - media, 483