UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIA
Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación

CÁLCULO
Tomo II

Cálculo en una Variable
Diferenciabilidad e Integración

Gladys Bobadilla A. y Rafael Labarca B.

Santiago de Chile
Marzo 2010

Prefacio

El cero es el silencio antes del número
El número es el verbo matemático
Lo matemático es el cálculo de la realidad
La realidad es lo único increíble
Lo increíble es lo que no podemos
Y lo que no podemos es lo que queremos.
Patricio Manns.

Este texto es producto - en elaboración aún - del proyecto de desarrollo de la docencia **Texto de cálculo anual para ingeniería civil**, financiado por la Vicerrectoría de Docencia y Extensión de la Universidad de Santiago de Chile.

Gran parte de los contenidos de los capítulos 1 y 2 están sacados del antiguo texto de Cálculo I escrito por Gladys Bobadilla y Jorge Billeke (Q.E.P.D.).

La idea motriz de los autores para emprender esta tarea es el profundo convencimiento que ésta es una forma de contribuir a una cultura nacional independiente.

Aunque los temas tratados - generados en Europa entre los siglos 17 y 19 - forman parte del patrimonio universal y existe una amplia y variada literatura, no es una razón suficiente para que la universidad renuncie a crear su propio material docente. Esta labor es tan importante como la creación de nuevos conocimientos y necesita, como esta última, de una tradición para la cual se debe recorrer un largo camino de errores y rectificaciones.

Además, queremos compartir con los jóvenes estudiantes que usarán este libro, la reflexión del filósofo Gastón Bachelard (1884 - 1962) sobre lo que significa enfrentarse al conocimiento científico: "Frente al misterio de lo real el alma no puede, por decreto, tornarse ingenua. Es entonces imposible hacer, de golpe, tabla rasa de los conocimientos usuales. Frente a lo real, lo que cree saberse claramente ofusca lo que debiera saberse. Cuando se presenta ante la cultura científica, el espíritu jamás es joven. Hasta es muy viejo, pues tiene la edad de sus prejuicios. Tener acceso a la ciencia es rejuvenecerse espiritualmente, es aceptar una mutación brusca que ha de contradecir a un pasado."[1]

Agradecemos los valiosos comentarios de la Dra. Cecilia Yarur, la profesora Graciela Escalona y el señor Luis Riquelme que nos ayudaron a mejorar la presentación de este texto. Agradecemos además, el apoyo técnico en la escritura digital, de la señorita Evelyn Aguilar y el señor Leonelo Iturriaga.

Finalmente, siendo ésta una versión preliminar, agradeceremos a quienes detecten errores nos lo hagan saber.

Gladys Bobadilla A y Rafael Labarca B.
Santiago, marzo de 2002.

[1]Gastón Bachelard: La formación del espíritu científico. Ed. Siglo XXI, 1997.

Agradecimientos

Esta versión del texto ha sido financiada por la Vicerrectoría de Docencia y Extensión de la Universidad de Santiago de Chile, a través del proyecto de desarrollo docente 2006-2007, **Versión final del texto guía de cálculo para ingeniería civil y ciencias**.

Índice general

Índice de figuras

Parte II

TOMO II

Capítulo 4

La derivada y sus aplicaciones

4.1. Introducción

En 1604 Galileo formuló la ley de la caída de los cuerpos : *la caída de los cuerpos es un movimiento uniformemente acelerado.* Matemáticamente se expresa diciendo que el espacio $s(t)$ recorrido es proporcional al cuadrado del tiempo:

$$s(t) = \frac{g}{2}t^2$$

Pero esto no satisfizo a Galileo, quien deseaba comprender la esencia del movimiento de la caída y fue aquí donde se equivocó, al igual que otros grandes del pensamiento científico como Leonardo y Descartes. Él creyó que el principio era: *la velocidad del cuerpo en caída libre es proporcional a la distancia recorrida*. Ahora, con el cálculo diferencial e integral no es difícil demostrar que este principio no conduce a la ley ya establecida. Mucho se ha escrito sobre este famoso error, de preferir formular la ley como la velocidad proporcional al espacio. Algunos historiadores de la ciencia lo atribuyen, además de la ausencia del cálculo, al rol jugado por la geometría en los albores de la ciencia moderna.

El proceso del cual salió la física clásica consistió en un esfuerzo para racionalizar, o dicho de otra forma, para geometrizar el espacio y matematizar las leyes de la naturaleza. A decir verdad, se trata del mismo esfuerzo, pues geometrizar el espacio no quiere decir otra cosa que aplicar al movimiento leyes geométricas. ¿Y cómo -antes de Descartes- se podía matematizar algo si no es geometrizándolo? [1]

Para llegar a comprender la esencia del movimiento, era necesario llegar a la idea física realmente difícil de *velocidad instantánea*. Sea

$$s = f(t)$$

[1] A. Koyré: Estudios Galileanos. Siglo veintiuno, 1988.

una función que nos da la posición de un móvil en el instante t. Para encontrar la velocidad v en un instante $t = t_0$, consideremos el intervalo de tiempo transcurrido entre t_0 y $t_0 + h$, $h \neq 0$. El camino recorrido en el intervalo dado es

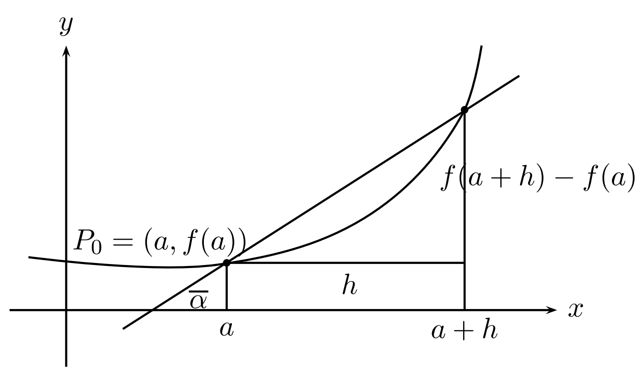
$$\Delta s = f(t_0 + h) - f(t_0).$$

La velocidad promedio $\overline{v}$ es

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{h} = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} \ ,$$

para obtener la velocidad instantánea v es necesario hacer el intervalo de tiempo tan pequeño como queramos, es decir,

$$v = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}.$$



Este límite corresponde a la derivada de una función y dice la rapidez con que está variando la función. Fue Newton en 1665 quien llegó a este concepto llevando el problema físico a una formulación geométrica, que establece la equivalencia entre la existencia del límite v y el problema de trazar la recta tangente en un punto t_0 al gráfico de la función f.

En primera instancia, no es claro qué es la tangente a una curva plana en un punto dado, pues no es equivalente al caso de la geometría elemental de la circunferencia, en que la tangente es la recta que tiene sólo un punto común con ella. Para una curva cualquiera esto pierde sentido.

Consideremos la curva $y = f(x)$ y sobre ella un punto P_0 de abscisa a. Para definir la tangente en el punto P_0 consideremos otro punto P de abscisa $a + h$ y tracemos la secante

P_0P que forma un ángulo $\overline{\alpha}$ con el eje X. Entonces, la recta tangente en el punto P_0 es la recta que se obtiene como caso límite de estas secantes cuando el punto P se acerca indefinidamente a P_0. La tangente del ángulo $\overline{\alpha}$ es:

$$\tan\overline{\alpha} = \frac{QP}{P_0Q} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Para tener la inclinación de la recta tangente debemos pasar al límite y obtenemos que:

$$\tan\alpha = \lim_{P\to P_0} \tan\overline{\alpha} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Con los conocimientos de geometría analítica sabemos que conociendo un punto y la inclinación de la recta, ella está completamente determinada.

4.2. Definición y fórmulas básicas de la derivada

4.2.1. Definiciones básicas

Definición 4.2.1 Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene al punto a. Llamaremos la **derivada** de la función f en el punto a al límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \tag{4.1}$$

cuando existe. En tal caso lo denotaremos por $f'(a)$ ó $\dfrac{df}{dx}(a)$ ó $\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=a}$.

Ejemplo 4.2.2 1. Si $f(x)=c$; donde c es una constante, entonces $f'(a)=0$. Ya que

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{c-c}{h} = 0 \text{ ; para todo } h \neq 0.$$

2. Si $f(x)=mx+p$, con m y p números fijos, entonces $f'(a)=m$. Ya que

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{m(a+h)+p-(ma+p)}{h} = \frac{mh}{h} = m \text{ ; para todo } h \neq 0.$$

Por tanto, $f'(a)=m$.

3. Si $f(x)=x^2$, entonces $f'(a)=2a$. En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2-a^2}{h} \\ &= \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} \\ &= \frac{h(2a+h)}{h} \\ &= 2a+h. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} 2a+h = 2a.$$

4. Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$, entonces $f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$, cuando $a \neq 0$. En efecto,

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}\\ &= \frac{a-(a+h)}{ha(a+h)}\\ &= \frac{-h}{ha(a+h)}\\ &= \frac{-1}{a(a+h)}\end{aligned}$$

Por tanto,

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}.$$

5. Si $f(x) =\mid x \mid$, entonces f no tiene derivada en $x = 0$. Esto es consecuencia de la no existencia del límite 4.1 que define la derivada:

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\mid h \mid}{h}.$$

Cuando $h > 0$, $\lim_{h\to 0^+}\dfrac{\mid h\mid}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h}{h} = 1$. Cuando $h < 0$, $\lim_{h\to 0^-}\dfrac{\mid h\mid}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-h}{h} = -1$.

6. $Si f(x) = \sqrt[3]{x}$, entonces f no tiene derivada en $x = 0$. Como

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt[3]{h}-0}{h} = \frac{1}{h^{\frac{2}{3}}},$$

$\lim_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^{\frac{2}{3}}} = \infty$. Por tanto $f'(0)$ no existe.

7. Si $f(x) = \cos x$, entonces $f'(a) = -\operatorname{sen} a$. Esto es consecuencia del límite relevante 6 de la sección 2.4, que nos dice que

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(a+h)-\cos a}{h} = -\operatorname{sen} a.$$

Observación 4.2.3 Según lo visto en la sección 2.5, el límite que define la derivada puede escribirse como:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(a)}{\Delta x}.$$

Interpretación geométrica de la derivada. Consideremos la curva $y = f(x)$. Tracemos la recta secante a la curva que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$ tomando h positivo y fijo. Esta recta forma un ángulo $\alpha(h)$ con la parte positiva del eje X, cuya tangente es:

$$\tan\alpha(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Cuando hacemos tender h a 0, la recta secante va transformándose en una recta que tiende a tocar a la curva solamente en el punto $(a, f(a))$. La pendiente de esta recta es por tanto,

$$\tan\alpha = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a).$$

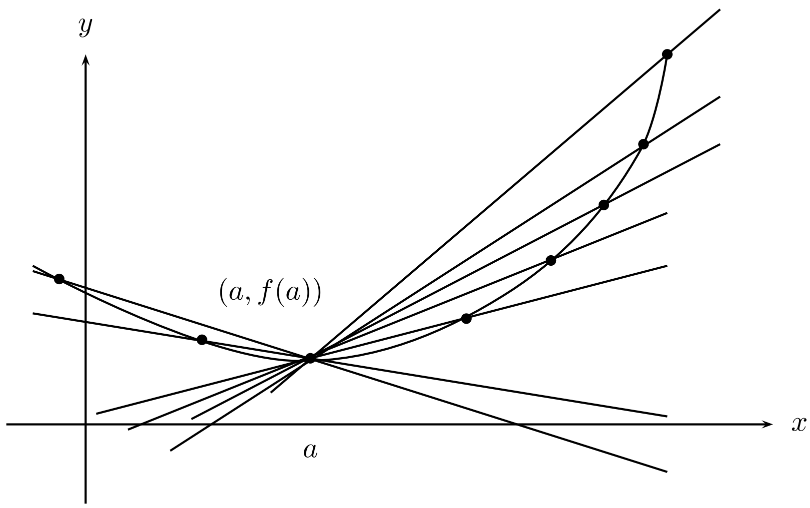


Figura 4.1: Interpretación geométrica de la derivada

Definición 4.2.4 (i) Si f es una función con derivada en $x = a$, llamaremos recta tangente al gráfico de f en el punto $(a, f(a))$ a la recta que pasa por el punto $(a, f(a))$ y cuya pendiente es $f'(a)$. Esta recta tiene por ecuación:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a). \tag{4.2}$$

(ii) Si $f'(a) = \infty$, entonces la recta tangente al gráfico de f en el punto $(a, f(a))$ es $x = a$.

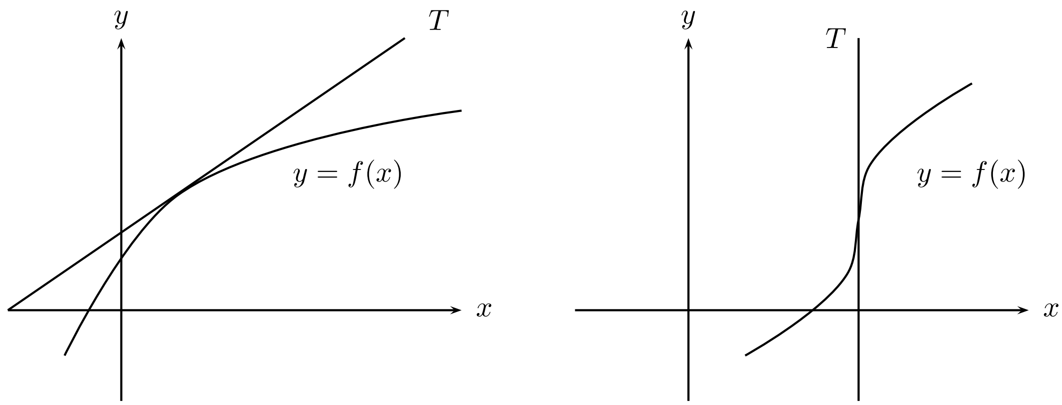


Figura 4.2: Recta tangente

Ejemplo 4.2.5 1. La recta tangente a $f(x) = x^2$ en $x = 1$ es, según ejemplo 4.2.2 parte 3:

$$\begin{aligned} y &= 2(x-1)+1 \\ y &= 2x-1. \end{aligned}$$

2. La recta tangente a $f(x) = \cos x$ en $x = \dfrac{\pi}{6}$ es, según ejemplo 4.2.2 parte 7:

$$\begin{aligned} y &= -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}(x-\frac{\pi}{6})+\cos\frac{\pi}{6} \\ y &= -\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{6})+\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

3. La recta tangente a $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en $x = 0$ es, según ejemplo 4.2.2 parte 6:

$$x = 0.$$

Definición 4.2.6 ▪ Si f es una función con derivada en $x = a$ distinta de 0, llamaremos **recta normal** al gráfico de f en el punto $(a, f(a))$ a la recta perpendicular a la recta tangente en ese punto y que pasa por él. Es decir, es la recta cuya ecuación es:

$$y = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)+f(a) \tag{4.3}$$

- Si $f'(a) = 0$, entonces la **recta normal** al gráfico de f en el punto $(a, f(a))$ es $x = a$.
- Si $f'(a) = \infty$, entonces la **recta normal** al gráfico de f en el punto $(a, f(a))$ es $y = f(a)$.

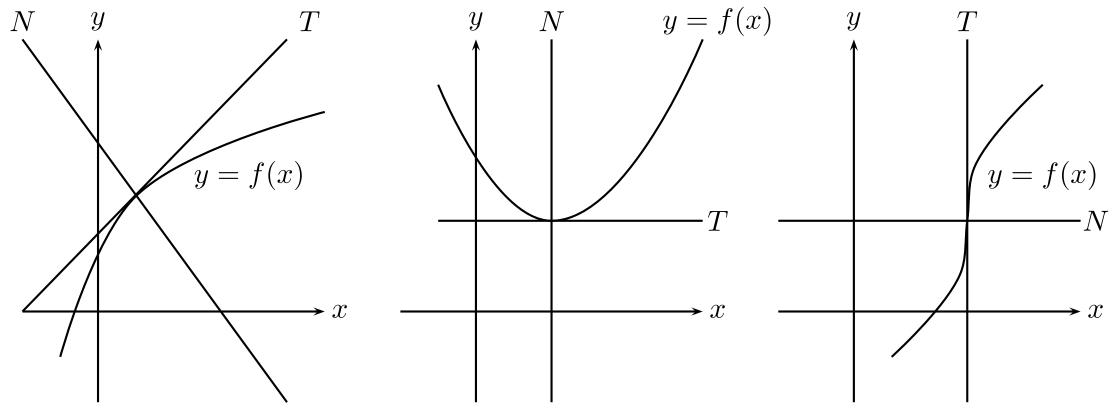


Figura 4.3: Recta normal

Ejemplo 4.2.7 1. La recta normal a $f(x) = x^2$ en $x = 1$ es, según ejemplo 4.2.2 parte 3:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}(x-1)+1 \\ y &= -\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \\ 2y &= -x+3. \end{aligned}$$

2. La recta normal a $f(x) = \cos x$ en $x = \frac{\pi}{6}$ es, según ejemplo 4.2.2 parte 7:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{-\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}}(x-\frac{\pi}{6})+\cos\frac{\pi}{6} \\ y &= -\frac{1}{-\frac{1}{2}}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y &= 2(x-\frac{\pi}{6})+\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y &= 2x-\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

3. La recta normal a $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en $x = 0$ es, según ejemplo 4.2.2 parte 6:

$$y = 0.$$

Definición 4.2.8 Diremos que una función f es **derivable o diferenciable** en un intervalo abierto I si existe la derivada en cada punto del intervalo. En este caso podemos definir la **función derivada** f' cuyo dominio es I y su valor en cada punto x es $f'(x)$.

Ejemplo 4.2.9
1. La función lineal y cuadrática son derivables en cualquier intervalo abierto, según ejemplo 4.2.2, partes 2 y 3.
2. Las funciones valor absoluto y raíz cúbica no son derivables en ningún intervalo abierto que contiene al cero, pues ellas no son derivables en $x = 0$. Ver ejemplo 4.2.2, parte 6.

Derivadas laterales. Para poder extender la definición 4.2.12 a un intervalo cerrado y acotado en algún extremo, es necesario definir las derivadas laterales tomando el límite a la derecha o a la izquierda del punto en la expresión que define a la derivada, según sea el caso.

Definición 4.2.10
(i) Llamaremos **derivada a la derecha** del punto $x = a$ al límite:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \tag{4.4}$$

y lo denotaremos $f'_+(a)$.

(ii) Llamaremos **derivada a la izquierda** del punto $x = a$ al límite:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \tag{4.5}$$

y lo denotaremos $f'_-(a)$.

Observación 4.2.11 Es consecuencia inmediata de las propiedades de límite que si las derivadas a la derecha y a la izquierda de un punto son iguales, entonces existe la derivada en el punto.

Definición 4.2.12 Diremos que una función f es **derivable o diferenciable** en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ si existe la derivada en cada punto del intervalo abierto (a, b), existe la derivada a la derecha en $x = a$ y existe la derivada a la izquierda en $x = b$.

Ejemplo 4.2.13 La función $f(x) =\mid x \mid$ es derivable en intervalos de la forma $[0, b], [a, 0]$, con $a < 0$ y $b > 0$.

4.2.2. Fórmulas elementales

Ahora comenzaremos a estudiar las propiedades básicas de la derivada.

Teorema 4.2.14 Si una función es derivable en un punto a, entonces ella es continua en ese punto.

Demostración: Para demostrar que f es continua en a, basta demostrar, según la ecuación 2.13 de la sección 2.5 que $\lim_{h\to 0}[f(a+h)-f(a)]=0$. Como,

$$f(a+h)-f(a)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot h.$$

Entonces:

$$\lim_{h\to 0}[f(a+h)-f(a)]=f'(a)\cdot\lim_{h\to 0}h=0.$$

$\square$

Observación 4.2.15 Como puede verse fácilmente del ejemplo 4.2.2, una función continua en un punto puede no tener derivada en él, como sucede con $|\,x\,|$, $\sqrt[3]{x}$ en $x=0$.

Teorema 4.2.16 Sean f y g funciones derivables en a. Entonces:

(i) $f\pm g$ es derivable en a y $(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)$.

(ii) $f\cdot g$ es derivable en a y $(f\cdot g)'(a)=f'(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g'(a)$.

(iii) $\dfrac{f}{g}$ es derivable en a si $g(a)\neq 0$ y se tiene:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)\cdot g(a)-f(a)\cdot g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Demostración:

(i)

$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right]\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\\ &= f'(a)+g'(a).\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
(f\cdot g)'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(a+h)-(f\cdot g)(a)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{(f\cdot g)(a+h)-(f\cdot g)(a)+f(a+h)\cdot g(a)-f(a+h)\cdot g(a)}{h}\right]\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a+h)[g(a+h)-g(a)]+g(a)[f(a+h)-f(a)]}{h}\right]\\
&= \lim_{h\to 0} f(a+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}+g(a)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\\
&= f(a)g'(a)+g(a)f'(a).
\end{aligned}$$

(iii) Para probar la fórmula de la derivada de un cuociente probaremos primero que:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a)=-\frac{1}{(g(a))^2}\cdot g'(a).$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g}\right)'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{1}{g(a+h)}-\frac{1}{g(a)}\right]\\
&= -\frac{1}{\lim_{h\to 0} g(a+h)}\cdot\frac{1}{g(a)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\\
&= -\frac{1}{(g(a))^2}\cdot g'(a).
\end{aligned}$$

Ahora, escribiendo $\frac{f}{g}=f\cdot\frac{1}{g}$ aplicamos la fórmula del producto y se obtiene sin dificultad la fórmula buscada. □

Ejemplo 4.2.17 Si $f(x)=\frac{1}{x}$ y $g(x)=x^2$, entonces:

1.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(f+g)(x) &= \frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= -\frac{1}{x^2}+2x\\
&= \frac{2x^3-1}{x^2}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(f \cdot g)(x) &= x^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x^2\right) \\ &= x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x}2x \\ &= 1.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x}2x}{x^4} \\ &= -\frac{3}{x^4} \\ &= -3x^{-4}.\end{aligned}$$

Corolario 4.2.18 (i) Si $f(x) = c\,g(x)$, entonces $f'(x) = c\,g'(x)$, donde c es una constante.

(ii) Si $f(x) = x^n$, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Si $f(x) = x^{-n}$, entonces $f'(x) = -nx^{-n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Por ser aplicaciones directas del teorema 4.2.16 se deja como ejercicio. □

Ejemplo 4.2.19 1. $\frac{d}{dx}\left(x^{100}\right) = 100x^{99}$.

2. $\frac{d}{dx}\left(x^{-100}\right) = -100x^{-101}$.

3. $\frac{d}{dx}\left(x^7 + 9x^6 - 7x^3 + 10\right) = 7x^6 + 54x^5 - 21x^2$.

4.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3+2x}{x^2-1}\right) &= \frac{(3x^2+2)(x^2-1) - (x^3+2x)\,2x}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{x^4 - 5x^2 - 2}{(x^2-1)^2}.\end{aligned}$$

Teorema 4.2.20 Si $f(x) = x^{\frac{1}{q}}$, $q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Entonces $f'(x) = \frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1}$.

Demostración: $f(x) = x^{\frac{1}{q}}$, $f(x+h) = (x+h)^{\frac{1}{q}}$, $\dfrac{\Delta f}{h} = \dfrac{(x+h)^{\frac{1}{q}} - x^{\frac{1}{q}}}{h}$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^{\frac{1}{q}} - x^{\frac{1}{q}}}{h}.$$

Para calcular este límite debemos racionalizar el numerador", usando la fórmula de factorización:

$$a^m - b^m = (a-b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \ldots + ab^{m-2} + b^{m-1}).$$

Tomando $a = (x+h)^{\frac{1}{q}}$, $b = x^{\frac{1}{q}}$, $m = q$, amplificamos por:

$$a^{q-1} + a^{q-2}b + \ldots + ab^{q-2} + b^{q-1},$$

y nos queda que:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta f}{h} &= \frac{(x+h)^{\frac{1}{q}} - x^{\frac{1}{q}}}{h} \cdot \frac{(x+h)^{\frac{q-1}{q}} + (x+h)^{\frac{q-2}{q}} x^{\frac{1}{q}} + \ldots + x^{\frac{q-1}{q}}}{(x+h)^{\frac{q-1}{q}} + (x+h)^{\frac{q-2}{q}} x^{\frac{1}{q}} + \ldots + x^{\frac{q-1}{q}}} \\
&= \frac{[(x+h) - x]}{h} \cdot \frac{1}{(x+h)^{\frac{q-1}{q}} + (x+h)^{\frac{q-2}{q}} x^{\frac{1}{q}} + \ldots + x^{\frac{q-1}{q}}} \\
&= \frac{1}{(x+h)^{\frac{q-1}{q}} + (x+h)^{\frac{q-2}{q}} x^{\frac{1}{q}} + \ldots + x^{\frac{q-1}{q}}}
\end{aligned}$$

Entonces, cuando $h \to 0$, se tiene que,

$$\frac{\Delta f}{h} \to f'(x) = \frac{1}{x^{\frac{q-1}{q}} + x^{\frac{q-2}{q}} x^{\frac{1}{q}} + x^{\frac{q-3}{q}} x^{\frac{2}{q}} + \ldots} = \frac{1}{qx^{\frac{q-1}{q}}} = \frac{1}{q} x^{\frac{1-q}{q}} = \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q} - 1}.$$

$\square$

Ejemplo 4.2.21 $\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{100}}\right) = \dfrac{1}{100} x^{\frac{1}{100} - 1} = \dfrac{1}{100} x^{-\frac{99}{100}}$.

Regla de la cadena. La regla de la cadena es la fórmula que permite derivar funciones compuestas y es uno de los teoremas más importantes del cálculo. Para poder demostrarlo necesitaremos algunos resultados intermedios.

Teorema 4.2.22 Si f tiene derivada en el punto $x = a$, entonces

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) + G(h),$$

donde G es una función tal que $G \to 0$ cuando $h \to 0$.

Demostración: Por hipótesis existe el número $f'(a)$, por tanto, si $h \neq 0$ podemos definir la función:

$$G(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a).$$

Es inmediato de la definición de derivada que

$$G(h) \to 0 \text{ cuando } h \to 0,$$

y además cumple con la propiedad del enunciado. □

Corolario 4.2.23 (i) La función G definida en el teorema anterior se puede extender para $h = 0$ definiéndola como $G(0) = 0$ y además resulta continua en este punto.

(ii) $\Delta f(x) = [f'(x) + G(h)]h$ o equivalentemente, $\Delta f(x) = [f'(x) + G(\Delta x)]\Delta x$.

Teorema 4.2.24 Regla de la cadena Sean f, g, u funciones tales que $f(x) = g(u(x))$, g y u derivables. Entonces, f es derivable y $f'(x) = g'(u(x))u'(x)$.

Demostración: Como $f(x) = g(u(x))$ y

$$\begin{aligned} f(x+h) &= g(u(x+h)) \\ &= g(u(x+h) + u(x) - u(x)) \\ &= g(u + \Delta u)(x). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\Delta f(x) = g(u + \Delta u)(x) - f(x) = g(u + \Delta u) - g(u(x)).$$

Por corolario 4.2.23, podemos escribir:

$$\Delta f = [g'(u) + G(\Delta u)]\Delta u.$$

Por tanto,

$$\frac{\Delta f}{h} = [g'(u) + G(\Delta u)] \cdot \frac{\Delta u}{h}.$$

En virtud del teorema 4.2.22 $G(\Delta u) \to 0$ cuando $\Delta u \to 0$ y por definición de derivada $\dfrac{\Delta u}{h} \to u'(x)$ cuando $h \to 0$, tenemos que:

$$\frac{\Delta f}{h} \to g'(u(x))u'(x) \;\text{ cuando }\; h \to 0.$$

$\square$

Corolario 4.2.25 (i) Si $f(x) = x^r$ con $r \in \mathbb{Q}$, entonces $f'(x) = rx^{r-1}$.

(ii) Si $f(x) = [u(x)]^n$ con $n \in \mathbb{N}$, entonces $f'(x) = n[u(x)]^{n-1}u'(x)$.

Ejemplo 4.2.26 1. $\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{7}{8}}\right) = \dfrac{7}{8}\left(x^{\frac{7}{8}-1}\right) = \dfrac{7}{8}x^{-\frac{1}{8}}$.

2.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sqrt{3x^2 - 5x + 2} &= \frac{d}{dx}\left(3x^2 - 5x + 2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(3x^2 - 5x + 2\right)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}\left(3x^2 - 5x + 2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(3x^2 - 5x + 2\right)^{-\frac{1}{2}}(6x - 5) \\
&= \frac{(6x - 5)}{2\sqrt{3x^2 - 5x + 2}}.
\end{aligned}$$

4.2.3. Las derivadas de las funciones trigonométricas

Teorema 4.2.27 (i) Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $f'(x) = \cos x$.

(ii) Si $f(x) = \cos x$, entonces $f'(x) = -\operatorname{sen} x$.

(iii) Si $f(x) = \tan x$, entonces $f'(x) = \sec^2 x$.

(iv) Si $f(x) = \operatorname{cotan} x$, entonces $f'(x) = -\operatorname{cosec}^2 x$.

(v) Si $f(x) = \sec x$, entonces $f'(x) = \sec x \tan x$.

(vi) Si $f(x) = \operatorname{cosec} x$, entonces $f'(x) = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotan} x$.

Demostración:

(i)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2}{h}\cdot \operatorname{sen}\frac{h}{2}\cdot \cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot \lim_{h\to 0} \cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \\ &= \cos x. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2}{h}\cdot \operatorname{sen}\frac{h}{2}\cdot \operatorname{sen}\left(x+\frac{h}{2}\right) \\ &= -\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot \lim_{h\to 0} \operatorname{sen}\left(x+\frac{h}{2}\right) \\ &= -\operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

(iii) Usando la definición de la función $\tan x$ y la fórmula para derivar cuocientes, tenemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) = \frac{1}{\cos^2 x}\left(\cos x\cdot \frac{d\operatorname{sen} x}{dx} - \operatorname{sen} x\cdot \frac{d\cos x}{dx}\right) \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}\left(\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x\right) = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Las partes (iv), (v) y (vi) se hacen de manera análoga y se dejan como ejercicios. □

4.2.4. Las derivadas de orden superior

La derivada de una función en un punto, como ya hemos visto, es una medida de la inclinación de la recta tangente en el punto considerado. Ahora necesitamos medir cuán **separado** está el gráfico de la función de su recta tangente. Por ejemplo, las tangencias de las curvas $y = x^2$, $y = x^3$ o $y = x^4$ con la recta $y = 0$ son muy diferentes. Lo que realmente queremos medir es cómo se **curva** el gráfico de f en una vecindad del punto de tangencia.

Definición 4.2.28 (i) Diremos que una función f es dos veces derivable en un punto a si f' tiene derivada en a. A este número lo llamaremos **segunda derivada de** f **en** a y lo denotaremos $f''(a)$. Es decir,

$$f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}. \tag{4.6}$$

(ii) Diremos que la función f es dos veces diferenciable en $I \subset \mathbb{R}$, si f es dos veces derivable en todo punto de I.

Otras notaciones usadas son:

$$f''(a) = \frac{d^2 f}{d\,x^2}(a) = \left.\frac{d^2 f}{d\,x^2}\right|_{x=a}.$$

(iii) Análogamente podemos definir para $n \geq 2$, la **derivada de orden n en el punto** a como la derivada de $f^{(n-1)}$ en el punto a. Las notaciones usadas para este caso son:

$$f^{(n)}(a) = \frac{d^n f}{d\,x^n}(a) = \left.\frac{d^n f}{d\,x^n}\right|_{x=a}.$$

Ejemplo 4.2.29 Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\operatorname{sen} x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x$, etc.

En general, $f^{(4n+1)}(x) = \cos x$; $f^{(4n+2)}(x) = -\operatorname{sen} x$, $f^{(4n+3)}(x) = -\cos x$, $f^{(4n+4)}(x) = \operatorname{sen} x$, $f^{(4n)} = \operatorname{sen} x$, $n \neq 0$.

Definición 4.2.30 Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Si f es continua diremos que es de clase $C^{(0)}$ en (a,b); si f' es continua diremos que f es de clase $C^{(1)}$ en (a,b); en general, diremos que f es de clase $C^{(n)}$ en (a,b) si $f^{(n)} : (a,b) \to \mathbb{R}$ es continua.

Ejemplo 4.2.31 Sea $f(x) = x^k \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. Entonces, si

- $k = 0$, f es discontinua en 0.
- $k = 1$, f es de clase $C^{(0)}$, pero no es diferenciable en 0.
- $k = 2$, f es diferenciable , pero no de clase $C^{(1)}$.

4.2.5. Ejercicios resueltos

1. Dada la función $f(x) = x^2 + 3x + 2$:

   a) Usando la definición, calcule $\dfrac{df}{dx}(x)$.

   b) Encuentre la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(1,6)$.

   c) Encuentre la ecuación de la recta normal al gráfico de f en el punto $(1,6)$.

   d) ¿Existe otro punto sobre la curva f donde su tangente sea paralela a la tangente en $(1,6)$?

   Solución:

a)

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx}(x) &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{((x+h)^2+3(x+h)+2)-(x^2+3x+2)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{x^2+2xh+h^2+3x+3h+2-x^2-3x-2}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+3+h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(2x+3+h) \\
&= 2x+3.
\end{aligned}$$

b) Si $x=1$, entonces $f'(1)=2x+3|_{x=1}=5$. Esto nos dice que la recta tangente en el punto $(1,6)$ tiene pendiente 5 y por tanto su ecuación es:

$$\begin{aligned}
y &= 5(x-1)+6 \\
y &= 5x+1.
\end{aligned}$$

c) La pendiente de la recta normal en el punto $(1,6)$ es $-\dfrac{1}{5}$ y su ecuación es :

$$\begin{aligned}
y &= -\frac{1}{5}(x-1)+6 \\
5y &= 31-x.
\end{aligned}$$

d) Para que una recta sea paralela a la tangente en el punto $(1,6)$, su pendiente debe ser 5. Sea $(z,f(z))$ un punto sobre la curva donde la tangente tiene pendiente 5, entonces se debe tener:

$$f'(z)=2z+3=5.$$

Lo que implica $z=1$. Por tanto, no existe sobre la curva otro punto en el cual la recta tangente tenga pendiente 5.

2. Dada la función $f(x)=x^3+3x^2-1$:

a) Usando la definición calcule $\dfrac{df}{dx}(x)$.

b) Encuentre la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(1,3)$.

c) Encuentre la ecuación de la recta normal al gráfico de f en el punto $(1,3)$.

d) ¿Existe otro punto sobre la curva f donde su tangente sea paralela a la tangente en $(1,3)$?

Solución:

a)

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx}(x) &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{((x+h)^3+3(x+h)^2-1)-(x^3+3x^2-1)}{h}\right]\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{x^3+3xh^2+3x^2h+h^3+3x^2+6xh+3h^2-1-x^3-3x^2+1}{h}\right]\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h(3xh+h^2+3h+3x^2+6x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}(3xh+h^2+3h+3x^2+6x)\\
&= 3x^2+6x.
\end{aligned}$$

b) Cuando $x=1, f'(1)=3x^2+6x|_{x=1}=9$. Lo que nos dice que la recta tangente en el punto $(1,3)$ tiene pendiente 9 y por tanto su ecuación es:

$$\begin{aligned}
y &= 9(x-1)+3\\
y &= 9x-6.
\end{aligned}$$

c) La recta normal en el punto $(1,3)$ tiene ecuación:

$$\begin{aligned}
y &= -\frac{1}{9}(x-1)+3\\
9y &= 28-x.
\end{aligned}$$

d) Sea $(z, f(z))$ un punto sobre la curva donde la tangente tiene pendiente 9, entonces se debe tener que $f'(z)=9$. Es decir,

$$\begin{aligned}
3z^2+6z &= 9\\
3z^2+6z-9 &= 0\\
z^2+2z-3 &= 0\\
(z-1)(z+3) &= 0
\end{aligned}$$

Ecuación que tiene dos soluciones $z=1$ y $z=-3$. Por tanto en el punto $(-3, f(-3))=(-3,-1)$ la recta tangente es paralela a la recta tangente en $(1,3)$.

3. Se dice que dos curvas son tangentes en un punto P si ellas se intersectan en P y sus rectas tangentes en P son iguales. Considere la función $h(x)=\dfrac{1}{x}\operatorname{sen} x$. Demuestre que los gráficos de $h(x)$ y $f(x)=\pm\dfrac{1}{x}$ son tangentes en todos los puntos de contacto.

Solución:

Supongamos $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Entonces x_0 es un punto de contacto entre los gráficos si y sólo si $f(x_0) = h(x_0)$, es decir, $\dfrac{1}{x_0} = \dfrac{1}{x_0}\operatorname{sen} x_0$, lo que implica $\operatorname{sen} x_0 = 1$, por tanto, $x_0 = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$.

$f'(x_0) = -\dfrac{1}{x_0^2} = -\dfrac{4}{(4k+1)^2\pi^2}$ y por otro lado,

$h'(x_0) = -\dfrac{1}{x_0^2}\operatorname{sen} x_0 + \dfrac{1}{x_0}\cos x_0 = -\dfrac{4}{(4k+1)^2\pi^2}$. Se procede de modo análogo para la función $f(x) = -\dfrac{1}{x}$, en que los puntos de intersección son $x_0 = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$.

4. Dada la función polinomial de grado 3

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

encuentre a, b, c, d, de modo que se satisfagan las siguientes condiciones:

- La curva pasa por $(0, 0)$.
- En $(0, 0)$ la recta tangente forma un ángulo de 60 grados con la parte positiva del eje X.
- En $x = 1$ y $x = -1$ la curva es paralela al eje X.

Solución: Si la curva pasa por el punto $(0, 0)$, entonces $y(0) = 0$ lo cual implica que $d = 0$. Si la pendiente de la recta tangente en el origen es $\tan\dfrac{\pi}{3}$, entonces tenemos la ecuación: $y'(0) = \sqrt{3}$. Como $y'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, tenemos que $y'(0) = c = \sqrt{3}$.

Que la curva sea paralela al eje X en un punto, quiere decir que en ese punto su recta tangente es paralela al eje X, lo que a su vez implica que en ese punto su derivada es nula. Por tanto, tenemos dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} y'(1) &= 3a + 2b + c \\ y'(-1) &= 3a - 2b + c \end{aligned}$$

La resolución de este sistema nos da los valores de $a = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ y $b = 0$.

Así, tenemos que el polinomio que satisface las condiciones pedidas es:

$$y(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^3 + \sqrt{3}\,x.$$

5. Calcule la derivada de la función $\operatorname{sen} x^o$ expresada en grados.

   Solución:

   Como x^o no es un número real, debemos expresar la función sen en radianes antes de derivarla, $\operatorname{sen} x^o = \operatorname{sen} \dfrac{\pi\, x}{180}$. Por tanto tenemos la función $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{\pi\, x}{180}$, la cual se deriva usando la regla de la cadena con función $u(x) = \dfrac{\pi\, x}{180}$, obteniéndose que

   $$f'(x) = \frac{\pi}{180} \cos \frac{\pi\, x}{180}.$$

6. Derive las siguientes funciones usando las fórmulas de derivación:

   a) $(x+1)^2(x-3)^5$
   b) $\sqrt{x^2+1}$
   c) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
   d) $\dfrac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x+5}}$
   e) $x\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$
   f) $(8x-3)^{\frac{8}{9}}$
   g) $\dfrac{1}{(4x-1)^5}$
   h) $\operatorname{sen}(4x-3)$
   i) $\cos(4x-3)^2$
   j) $x^2 \tan \dfrac{1}{x}$

   Solución:

   a) Si $f(x) = (x+1)^2(x-3)^5$, entonces

   $$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x+1)(x-3)^5 + (x+1)^2 5(x-3)^4 \\ &= (x+1)(x-3)^4(2(x-3)+5(x+1)) \\ &= (x+1)(7x-1)(x-3)^4 \end{aligned}$$

   b) Si $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, entonces

   $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}(2x) \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

c) Si $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x+5}}$, entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{x-5}{x+5}\right)^{-\frac{1}{2}}\ \frac{d}{dx}\left(\frac{x-5}{x+5}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{x-5}{x+5}\right)^{-\frac{1}{2}}\ \frac{10}{(x+5)^2} \\ &= \frac{5}{(x+5)^{\frac{3}{2}}(x-5)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

d) Si $f(x)=x\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$, entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x}{2}\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^{-\frac{1}{2}}\ \frac{d}{dx}\left(\frac{a-x}{a+x}\right)+\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \\ &= x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\left[\frac{-a}{(a+x)^2}\right]+\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \\ &= \frac{-ax}{(a+x)^2}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}+\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \end{aligned}$$

e) Si $f(x)=(8x-3)^{\frac{8}{9}}$, entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{8}{9}(8x-3)^{-\frac{1}{9}}\cdot 8 \\ &= \frac{64}{9(8x-3)^{\frac{1}{9}}} \end{aligned}$$

f) Si $f(x)=\dfrac{1}{(4x-1)^5}$, entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= -5\left(\frac{1}{4x-1}\right)^4\ \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4x-1}\right) \\ &= -\frac{20}{(4x-1)^6}. \end{aligned}$$

g) Si $f(x)=\operatorname{sen}(4x-3)$, entonces $f'(x)=4\cos(4x-3)$.

h) Si $f(x)=\cos(4x-3)^2$, entonces $f'(x)=-8(4x-3)\operatorname{sen}(4x-3)^2$.

i) Si $f(x) = x^2 \tan \dfrac{1}{x}$, entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \, \tan \frac{1}{x} + x^2 \, \frac{d}{dx} \left(\tan \frac{1}{x} \right) \\ &= 2x \, \tan \frac{1}{x} + x^2 \sec^2 \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\ &= 2x \, \tan \frac{1}{x} - \sec^2 \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

7. Determine los puntos donde la derivada de las siguientes funciones no existe.

   a) $|\operatorname{sen} x|$
   b) $\sqrt[3]{\cos x}$
   c) $\left| \dfrac{x^2+1}{x^2-1} \right|$
   d) $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$

   Solución:

   a) Aplicando la regla de la cadena y el ejemplo 4.2.2, parte 5, sabemos que $|\operatorname{sen} x|$ es derivable en todos los puntos en que $\operatorname{sen} x \neq 0$, es decir, la derivada no existe en los múltiplos pares de $\dfrac{\pi}{2}$.
   b) La regla de la cadena y el ejemplo 4.2.2, parte 6, nos dicen que el único punto en que la derivada no existe es para aquellos valores que anulan el coseno. Es decir, si $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$.
   c) es fácil ver que esta función es derivable en cada punto de su dominio $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$.
   d) En la sección 2.5, hemos dicho que esta función es discontinua en todos sus puntos, por tanto no puede ser derivable en ningún punto.

8. Pruebe que si $f(x)$ es una función polinomial de grado n, entonces:

   a) $f^{(n)}(x)$ es una constante independiente de x.
   b) $f^{(n+1)}(x) = 0$, para todo x.

   Solución: Si $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, con $a_n \neq 0$, entonces $f'(x)$ es a lo más un polinomio de grado $n-1$. En efecto,

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1 \; ,$$

$$f''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + \ldots + a_2 \,.$$

Podemos observar que en cada etapa de derivación va desapareciendo el término constante, por tanto, al derivar n veces nos queda:

$$f^{(n)}(x) = n!a_n.$$

Esta función ya no depende de x y por consiguiente su derivada, o la derivada de orden $(n+1)$ del polinomio inicial, es la función constante 0.

9. Calcule:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(x^3\frac{d^2y}{dx^2}\right).$$

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}\left(x^3\frac{d^2y}{dx^2}\right) &= \frac{d}{dx}\left(x^3\frac{d^3y}{dx^3}+3x^2\frac{d^2y}{dx^2}\right)\\ &= x^3\frac{d^4y}{dx^4}+3x^2\frac{d^3y}{dx^3}+6x\frac{d^2y}{dx^2}+3x^2\frac{d^3y}{dx^3}\\ &= x^3\frac{d^4y}{dx^4}+6x^2\frac{d^3y}{dx^3}+6x\frac{d^2y}{dx^2}.\end{aligned}$$

10. Demuestre que si $y = 3\cos 2x + \operatorname{sen} 2x$, entonces $y'' + 4y = 0$.

Solución:

$y' = -6\operatorname{sen} 2x + 2\cos 2x$, entonces $y'' = -12\cos 2x - 4\operatorname{sen} 2x = -4y$.

4.2.6. Ejercicios propuestos

1. Calcule las derivadas de las siguientes funciones, tal como ellas se presentan, es decir sin realizar las operaciones algebraicas.

   a) $y = x^6 - 14x^3 + 6x^2 - 7x + 40$.

   b) $y = 44x^5 - 4x^4 - 10x^3 - 9x^2 + 11x - 2$.

   c) $y = 4c^2x^3 - c^4x^3 + 6cx^2 + c^6$, donde c es una constante.

   d) $y = x^4 - 3\pi x^3 + 6ex^2 - 7\pi^2 x - \pi$.

   e) $y = (3x^2 - 2x)(x^3 + 5)$.

   f) $y = (3x^2 - 2x)(x^3 + 5)(x^5 + 9x^3 - 21x)$.

   g) $y = (x^3 - 2x + 5x^2)(3 - x^7 + 5x)$.

   h) $y = \dfrac{1}{3 - x^7 + 5x}$.

   i) $y = \dfrac{x^3 - 2a}{3a - x^5 + 1}$.

j) $y = \dfrac{x^3 - 2x + 5x^2}{3 - x^7 + 5x}$.

k) $y = \sqrt{x}\,\mathrm{sen}\,x \cos x$.

l) $y = \mathrm{sen}\,x \cos x \sqrt[3]{x}$.

m) $y = \dfrac{1 - \cos x}{x^3}$.

n) $y = \dfrac{x\,\mathrm{sen}\,x}{1 - \cos x}$.

ñ) $y = (x\,\mathrm{sen}\,x)(1 - x^3)$.

o) $y = \dfrac{\mathrm{sen}\,x \cos x}{x}$.

p) $\dfrac{3x^5 - 4x^3 + 2x - 6}{x^2 - 3x + 9}$.

q) $\dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

r) $\sqrt{\dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}}$.

s) $\sqrt{\dfrac{1 + \mathrm{sen}\,x}{1 - \mathrm{sen}\,x}}$.

t) $\mathrm{sen}\,(4x^4 + 3x^2 - 6)$.

u) $\sqrt{\dfrac{6}{\mathrm{sen}\,x \cos 5x}}$.

v) $\cos\left[\tan(x^2 - 5x + 1)\right]$.

w) $\tan(x^2 + 1)^o$, la función está expresada en grados.

2. Calcule $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ para las siguientes funciones:

a) $y = x^6 - 14x^3 + 6x^2 - 7x + 40$.

b) $y = 4c^2x^3 - c^4x^3 + 6cx^2 + c^6$, donde c es una constante.

c) $y = x^4 - 3\pi x^3 + 6ex^2 - 7\pi^2 x - \pi$.

d) $y = (3x^2 - 2x)(x^3 + 5)(x^5 + 9x^3 - 21x)$.

e) $y = \dfrac{x^3 - 2x + 5x^2}{3 - x^7 + 5x}$.

f) $y = \sqrt{x}\,\mathrm{sen}\,x \cos x$.

g) $y = \dfrac{\mathrm{sen}\,x \cos x}{x}$.

h) $\dfrac{3x^5 - 4x^3 + 2x - 6}{x^2 - 3x + 9}$.

i) $\sqrt{\dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}}$.

j) $\sqrt{\dfrac{1 + \mathrm{sen}\,x}{1 - \mathrm{sen}\,x}}$.

k) $\mathrm{sen}\,(4x^4 + 3x^2 - 6)$.

l) $\sqrt{\dfrac{6}{\mathrm{sen}\,x \cos 5x}}$.

m) $\cos \tan(x^2 - 5x + 1)$.

n) $\tan(x^2 + 1)^o$, la función está expresada en grados.

3. Calcule $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ para las funciones del ejercicio anterior.

4. Dada la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$:

a) Usando la definición, calcule $\dfrac{df}{dx}(x)$.

b) Encuentre la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(-1, 1)$.

c) Encuentre la ecuación de la recta normal al gráfico de f en el punto $(-1, 1)$.

d) ¿Existe otro punto sobre la curva f donde su tangente sea paralela a la tangente en $(-1, 1)$?

5. Usando la definición de derivada, analice la existencia de la derivada en el origen para las funciones:

   a) $y = x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

   b) $y = \cos \sqrt{x}$

6. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes y normales a la curva $y(x)$ en el punto (x_0, y_0).

   a) $y(x) = x^3 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$; $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

7. Encuentre los puntos de tangencia entre las curvas:

   a) $f(x) = \dfrac{1}{x} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

   b) $f(x) = \dfrac{1}{x} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = -\dfrac{1}{x}$.

8. Dada la función $y_n(x) = x^n$:

   a) Grafique en un mismo diagrama y_2, y_3 e y_4.

   b) Calcule $y_n'(x)$.

   c) La tangente en el punto $(1, 1)$ a la curva y_n corta al eje de las abscisas en $(z, 0)$, calcule $\lim\limits_{n \to \infty} y_n(z)$.

   d) ¿ Para qué punto (x_n, y_n) de la curva y_n su tangente es paralela a la secante que pasa por $(0, 0)$ y $(1, 1)$?

   e) Calcule $\lim\limits_{n \to \infty} y_n$.

9. Determine una función polinomial de grado seis de modo que en los puntos $(1, 1)$, $(-1, 1)$ la tangente sea horizontal y que además pase por el origen.

10. Dada la función $y(x) = x \sqrt[n]{\cos x}$, calcule: $y(0), y'(0), y''(0), y'''(0)$.

11. Dada una parábola $y = ax^2 + bx + c$.

    a) ¿Desde qué puntos se puede trazar dos tangentes a la curva?

    b) ¿Desde qué puntos puede trazarse solamente una tangente a la curva?

    c) ¿Desde qué puntos no se puede trazar ninguna tangente a la curva?

12. Dada la función:
$$f(x) = \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2},$$
con $a_1 \neq 0$ y $a_2 \neq 0$.

    a) ¿En qué puntos la función f no es derivable ? (ver ejercicios resueltos de la sección **??**).

    b) ¿En qué puntos la función f tiene tangente paralela al eje X ?

13. Sea $k \in \mathbb{N}$ y $f(x) = |x|^k$. Demuestre que $f(x)$ es de clase $C^{(n)}$ si $n < k$, pero $f(x)$ no es clase $C^{(n)}$ si $n > k$. ¿Qué sucede para $n = k$?

4.3. Propiedades de las funciones derivables

4.3.1. Teoremas principales

Según el teorema 2.5.17 de la sección 2.5, las funciones continuas cuyo dominio es un intervalo cerrado y acotado tienen la importante propiedad de alcanzar sus valores máximo y mínimo. Pero este teorema es de aquellos llamados de **existencia**, pues asegura la existencia de puntos donde la función alcanza sus valores extremos, pero no nos dice cómo encontrar tales puntos. Para determinar estos importantes puntos y obtener mayor información sobre el comportamiento de la función podemos usar ciertas propiedades de la derivada, como veremos en los siguientes teoremas.

Teorema 4.3.1 Supongamos que f es continua en un intervalo I y alcanza su máximo (mínimo) valor en un punto x_0 en el interior del intervalo I. Si $f'(x_0)$ existe, entonces $f'(x_0) = 0$.

Demostración: Si f tiene un máximo en x_0 entonces,

$$f(x_0 + h) \leq f(x_0), \text{ para todo } h \text{ tal que } x_0 + h \in I.$$

Por tanto, $f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$.

Así, si $h > 0$ tenemos que $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$, y en consecuencia,

$$f'(x_0) \leq 0 \tag{4.7}$$

Si $h < 0$ tenemos que $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$, y en consecuencia,

$$f'(x_0) \geq 0. \tag{4.8}$$

De las desigualdades 4.7 y 4.8 tenemos que $f'(x_0) = 0$.

La demostración para el caso que en x_0 hay un mínimo es similar y se deja como ejercicio. □

Observación 4.3.2

1. Es interesante darse cuenta de la importancia que x_0 sea un punto interior del intervalo, pues si no lo fuera, no podríamos tomar $h < 0$ y $h > 0$ en la demostración del teorema 4.3.1.

2. Si el máximo o mínimo se alcanza en un punto frontera del intervalo, entonces la derivada en ese punto no necesariamente se anula. Por ejemplo, $f(x) = x^2$ en $[1, 2]$ alcanza su máximo $f(2) = 4$ en $x = 2$ pero, $f'(2) = 4 \neq 0$.

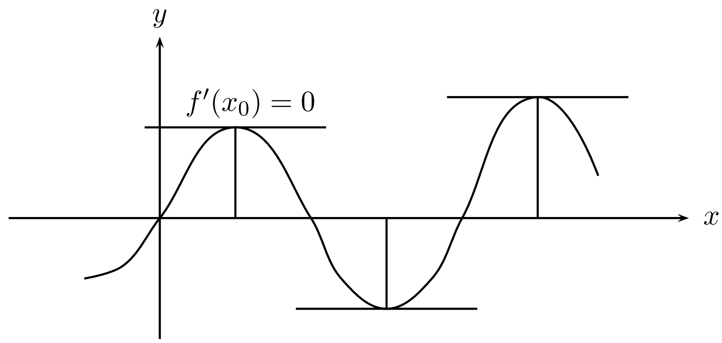


Figura 2.3.1

Figura 4.4:

3. Podemos usar el teorema 4.3.1 para encontrar candidatos a máximos y/o mínimos interiores. Por ejemplo si $f(x) = x^3 - x$. Entonces $f'(x) = 3x^2 - 1$, luego $f'(x) = 0$ si y sólo si $x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{3}}$. Estos puntos son los candidatos a máximos y mínimos.

4. Si $f'(x_0) = 0$ no necesariamente x_0 es un máximo o un mínimo. Por ejemplo, $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$, pero 0 no es máximo ni mínimo.

5. Una función continua puede alcanzar su máximo o mínimo y puede que no tenga derivada en el punto. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ tiene un mínimo en $x = 0$, pero $f'(0)$ no existe.

Teorema 4.3.3 Teorema de Rolle
Supongamos que f es una función continua en $[a, b]$ y que $f'(x)$ existe para todo $x \in (a, b)$. Si $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un punto $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = 0$.

Demostración: Analizaremos las tres posibilidades siguientes:

1. Si $f(x) = f(a)$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces, por ser f constante, su derivada f' es nula sobre (a, b), por lo que el teorema se cumple trivialmente.

2. Si $f(x) > f(a)$ para algún $x \in (a, b)$. Por teorema 2.5.17 existe $x_0 \in (a, b)$ donde f alcanza valor máximo . En virtud del teorema 4.3.1, $f'(x_0) = 0$.

3. Si $f(x) < f(a)$ para algún $x \in (a, b)$. Entonces, existe $x_0 \in (a, b)$ donde f alcanza su valor mínimo . Por teorema 4.3.1, $f'(x_0) = 0$.

$\square$

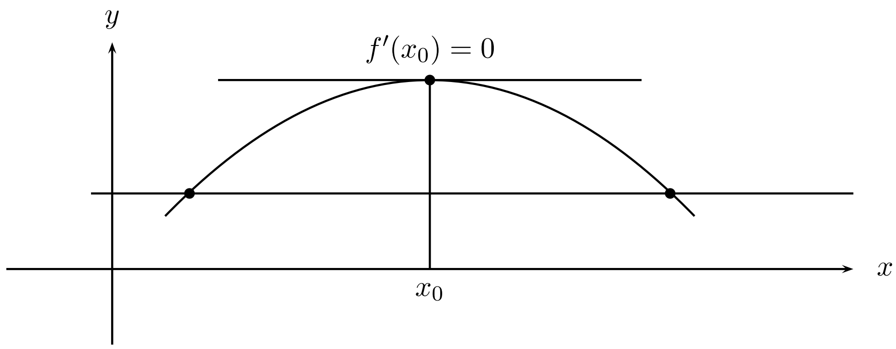


Figura 4.5: Teorema de Rolle

Observación 4.3.4 El teorema de Rolle puede ser interpretado geométricamente diciendo que: si una función continua y derivable cruza dos veces una recta paralela al eje X, entonces existe entre los dos cruces consecutivos un punto donde la tangente al gráfico es paralela al eje X.

Teorema 4.3.5 Teorema del valor medio de Lagrange
Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y derivable en (a,b). Entonces, existe un punto $x_0 \in (a,b)$ tal que :

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{4.9}$$

Demostración: Definamos una nueva función F mediante la relación:

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Esta función es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y además cumple que $F(a) = F(b)$. Por tanto, podemos aplicar el teorema de Rolle y obtener la existencia de un punto $x_0 \in (a,b)$ tal que $F'(x_0) = 0$. Calculando F' tenemos que existe $x_0 \in (a,b)$ tal que $F'(x_0) = 0$. Es decir, existe $x_0 \in (a,b)$ tal que la ecuación 4.9 se satisface. $\square$

Observación 4.3.6 1. **Interpretación física del teorema del valor medio.**

Interpretando la variable x como el tiempo t y $f(t)$ como la posición de un objeto en el instante t, podemos hacernos la siguiente pregunta:¿Es posible que la velocidad del objeto alcance en algún momento su valor promedio ? En realidad la respuesta no es obvia, salvo que apliquemos el teorema del valor medio y en ese caso la respuesta es afirmativa. Existe un instante t_0 en que la velocidad instantánea $f'(t)$ es igual a la velocidad promedio $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ en el intervalo de tiempo $[a,b]$.

2. **Interpretación geométrica del teorema del valor medio.**

   El primer miembro de la ecuación 4.9 puede ser interpretado como la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en el punto x_0; el segundo miembro puede ser visto como la pendiente de la recta secante al gráfico de f que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Como la ecuación 4.9 dice que ambas pendientes son iguales, quiere decir que existe un punto $(x_0, f(x_0))$ donde la recta tangente y la recta secante son paralelas.

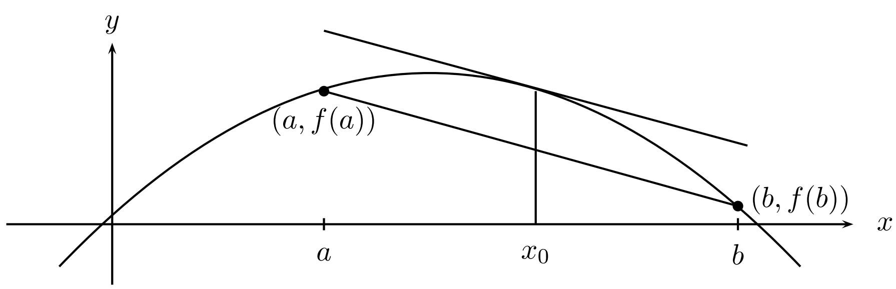


Figura 4.6: Interpretación geométrica del teorema del valor medio

Teorema 4.3.7 Teorema del valor medio para dos funciones o Teorema del valor medio de Cauchy.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones derivables cuyas derivadas no se anulan simultáneamente en el intervalo $[a, b]$ y si $g(a)$ no es igual a $g(b)$, entonces existe un número $c \in (a, b)$ para el cual

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{4.10}$$

Demostración:

Si definimos la función

$$h(x) = f(a) - f(x) + [g(x) - g(a)]\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)},$$

vemos que ella satisface las hipótesis del teorema de Rolle:

- $h(a) = h(b) = 0$.
- $h'(x) = -f'(x) + g'(x)\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

Por tanto, existe un $c \in (a,b)$ tal que $h'(c) = 0$, lo que es equivalente a decir que c satisface la ecuación (4.10). $\square$

Observación 4.3.8 Este teorema tiene una importante aplicación en la llamada **regla de L'Hôpital** que sirve para calcular límites de formas indeterminadas, como veremos en la próxima sección de aplicaciones.

Teorema 4.3.9 Si f es una función tal que $f'(x)$ es positiva para cada x perteneciente a un intervalo (a,b), entonces f es estrictamente creciente en (a,b).

Demostración: Dados x_1 y x_2 en (a,b) tal que $x_1 < x_2$, podemos aplicar el teorema del valor medio a la función f en el intervalo $[x_1, x_2]$.

Así, existe un punto $x_0 \in (x_1, x_2)$ tal que :

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1) \ \text{,con } \ x_0 \in (x_1, x_2).$$

Como $x_1 < x_2$ implica que $x_2 - x_1 > 0$ y por hipótesis $f'(x_0) > 0$, tenemos que $f(x_2) - f(x_1) > 0$ y entonces, $f(x_2) > f(x_1)$. Lo que nos dice que f es creciente. $\square$

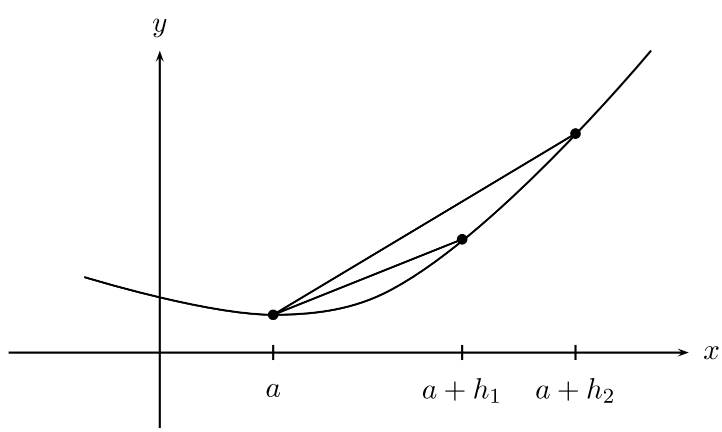


Figura 4.7: Función con derivada positiva

Corolario 4.3.10 Si f es una función tal que $f'(x)$ es negativa para cada x perteneciente a un intervalo (a,b), entonces f es estrictamente decreciente en (a,b).

Demostración: $f'(x) < 0$ implica que $-f'(x) > 0$. Aplicando el teorema 4.3.9 a $-f$ obtenemos que $-f$ es estrictamente creciente y por consiguiente f es estrictamente decreciente. $\square$

Teorema 4.3.11 Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$.

(i) Si f es estrictamente creciente en algún intervalo (a, x_0) y es estrictamente decreciente en algún intervalo (x_0, b), entonces f tiene un máximo relativo en x_0.

(ii) Si f es estrictamente decreciente en algún intervalo (a, x_0) y es estrictamente creciente en algún intervalo (x_0, b), entonces f tiene un mínimo relativo en x_0.

Demostración: Es consecuencia directa de la definición de máximo y de mínimo relativo. □

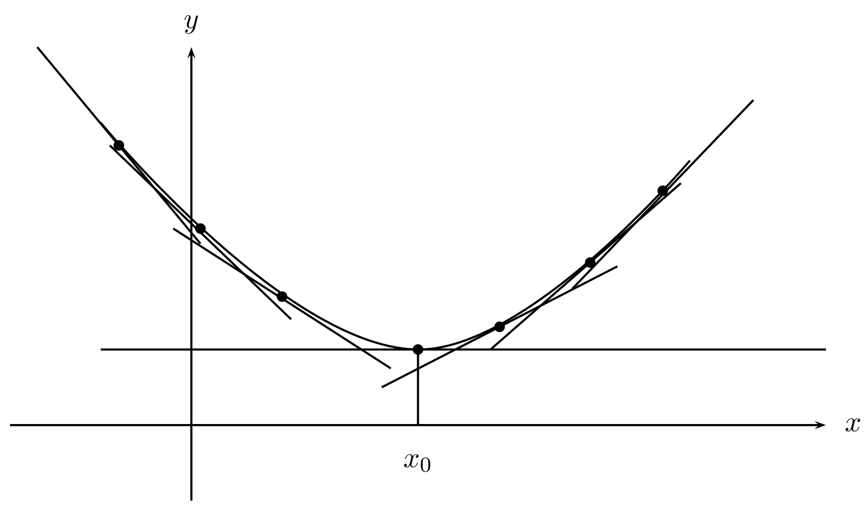


Figura 4.8: Mínimo de una función

Corolario 4.3.12 Criterio de la primera derivada para detectar máximos y mínimos

Sea f una función derivable en un intervalo $[a, b]$ tal que f' es continua en $[a, b]$.

(i) Si f' es positiva en algún intervalo (a, x_0) y es negativa en algún intervalo (x_0, b), entonces f tiene un máximo relativo en x_0.

(ii) Si f' es negativa en algún intervalo (a, x_0) y es positiva en algún intervalo (x_0, b), entonces f tiene un mínimo relativo en x_0.

Demostración: Es consecuencia directa de los teoremas 4.3.9, 4.3.11 y 4.3.10. □

Definición 4.3.13 Llamaremos **punto crítico** de una función f derivable a x tal que $f'(x) = 0$.

Ejemplo 4.3.14

1. Todo punto donde una función derivable alcanza máximos y mínimos relativos o locales, son puntos críticos.

2. Existen puntos críticos que no son máximos ni mínimos, como por ejemplo $x = 0$ para la función $y = x^3$.

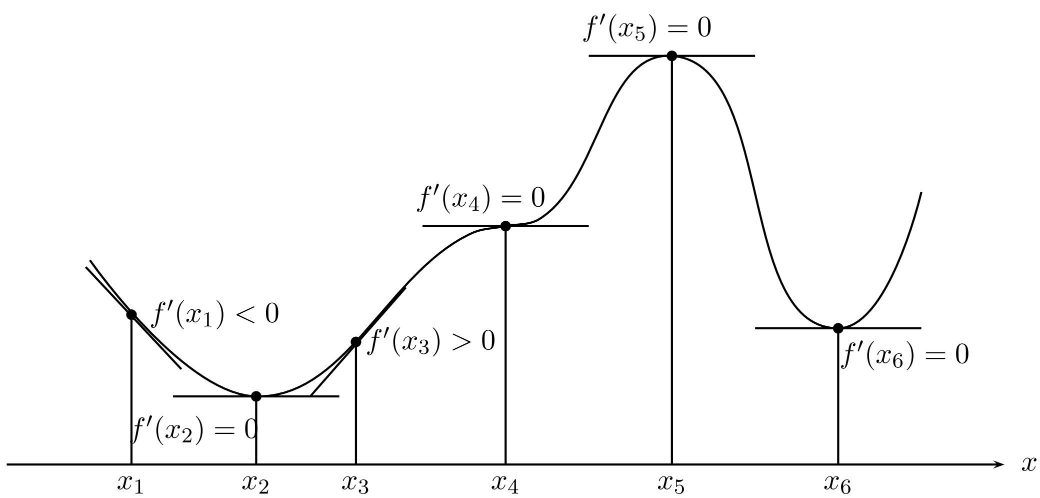


Figura 4.9: Significado geométrico del signo de la derivada

Definición 4.3.15 Diremos que una función es **convexa o cóncava hacia arriba** sobre un intervalo I si su gráfico queda sobre el gráfico de su recta tangente en cada punto de I. Si su gráfico queda bajo el de su recta tangente, diremos que la función es **cóncava o cóncava hacia abajo** en I.

Teorema 4.3.16 Sea f una función dos veces derivable en un intervalo I.

(i) Si $f''(x) > 0$ para todo x interior a I, entonces f es convexa en I.

(ii) Si $f''(x) < 0$ para todo x interior a I, entonces f es cóncava en I.

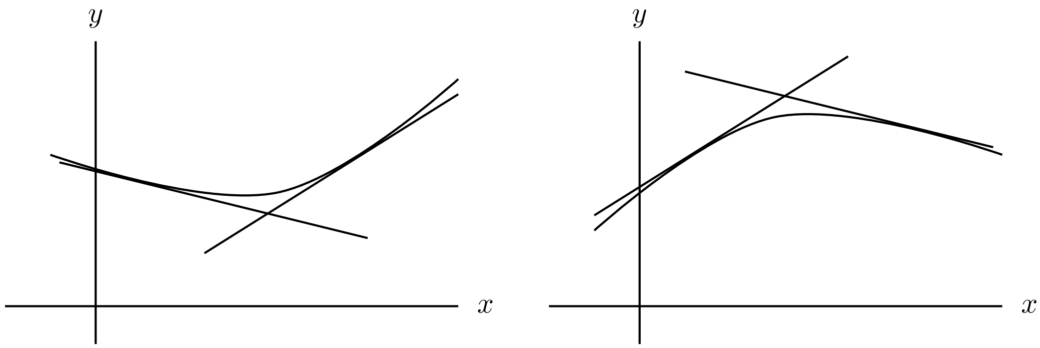


Figura 4.10: Funciones convexas (a) y funciones cóncavas (b)

Demostración: Sea x_0 un punto interior de I. La ecuación de la recta tangente al gráfico de f en x_0 tiene ecuación:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Para demostrar que f es convexa, debemos probar que para todo $x \in I$,

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{4.11}$$

Si $x = x_0$, entonces la desigualdad 4.11 se cumple trivialmente. Si $x \neq x_0$. Llamemos x_1 al valor de x, entonces podemos aplicar el teorema del valor medio a f en el intervalo (x_0, x_1) ó (x_1, x_0) según sea el caso, obteniendo la existencia de un punto $\overline{x}$ entre x_0 y x_1, de modo que:

$$f'(\overline{x}) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \tag{4.12}$$

Si en particular $x_1 > x_0$, despejando $f(x_1)$ en la ecuación 4.12, tenemos que

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(\overline{x})(x_1 - x_0). \tag{4.13}$$

f' es una función estrictamente creciente en I debido a la hipótesis que f'' es positiva. Por tanto, $f'(\overline{x}) > f'(x_0)$, lo que implica:

$$f'(\overline{x})(x_1 - x_0) > f'(x_0)(x_1 - x_0). \tag{4.14}$$

Usando 4.14 en 4.13, obtenemos la desigualdad 4.11 con $x = x_1$. Por consiguiente, f es convexa.

La demostración de (ii) se hace análogamente. □

Corolario 4.3.17 Criterio de la segunda derivada para detectar máximos y mínimos.
Sea f una función con segunda derivada continua y sea x_0 un punto crítico de f.

(i) Si $f''(x_0) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en x_0.

(ii) Si $f''(x_0) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en x_0.

(iii) Si $f''(x_0) = 0$, entonces no hay información.

Ejemplo 4.3.18 Sea $f(x) : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ de modo que $x \mapsto \operatorname{sen} x(1 + \cos x)$.

Para encontrar los posibles a máximos y mínimos debemos resolver la ecuación $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \cos x(1+\cos x) + \operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x) = \cos x(1+\cos x) - \operatorname{sen}^2 x \\ &= \cos x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) \\ &= \cos x + \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 2\cos^2 x + \cos x - 1 \end{aligned}$$

Luego, $\frac{df}{dx} = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \quad 4\cos^2 x + 2\cos x - 2 = 0$

$$(2\cos x + 2)(2\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \quad \text{ó} \ = \quad \cos x = \frac{1}{2}.$$

Así tenemos que $(x = \pi)$ ó $\left(x = \frac{\pi}{3}\right)$ ó $\left(x = \frac{5\pi}{3}\right)$

Para analizar la naturaleza de los puntos críticos encontrados, usaremos el criterio de la segunda derivada.

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -\operatorname{sen} x + 4\cos x \cdot - \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x(1 + 4\cos x)$$

$$\begin{aligned} \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=\frac{\pi}{3}} = f''\left(\frac{\pi}{3}\right) &= -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}(1 + 4\cos\frac{\pi}{3}) \\ & -\frac{1}{2}\sqrt{3}(1 + 4 \cdot \frac{1}{2}) < 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, en $x = \dfrac{\pi}{3}$ la función tiene un máximo relativo.

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=\frac{5\pi}{3}} == f'\left(\frac{5\pi}{3}\right) &= -\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)\cdot\left(1+4\cos\frac{\pi}{3}\right)\\ &= -\left(-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\cdot\left(1+\frac{4}{2}\right)\\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} > 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, en $x = \dfrac{5\pi}{3}$ la función tiene un mínimo relativo.
El máximo se localiza en el punto

$$(\frac{\pi}{3}, f\left(\frac{\pi}{3}\right)) = \left(\frac{\pi}{3}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cdot\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(1+\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

y el mínimo se localiza en el punto

$$\left(\frac{5\pi}{3}, f\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$$

$$\left(\frac{5\pi}{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=\pi} = f''(\pi) = 0\cdot(1+4\cos\pi) = 0.$$

En este caso no tenemos información.

Definición 4.3.19 Diremos que en x_0 hay un **punto de inflexión** de la función f si $f''(x_0) = 0$ y además hay cambio de concavidad en él.

Ejemplo 4.3.20 Considerando la misma función del ejemplo 4.3.18, tenemos que

$$f''(x) = -\operatorname{sen} x(1+4\cos x).$$

Los posibles puntos de inflexión se encuentran resolviendo la ecuación $f''(x) = 0$.

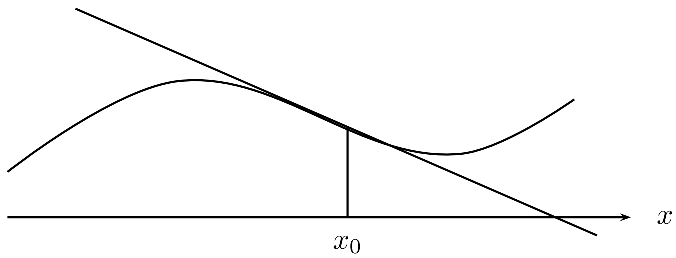


Figura 4.11: Puntos de inflexión

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\operatorname{sen} x(1 - 4\cos x) = 0 \Leftrightarrow .$

$$
\begin{array}{ccl}
(-\operatorname{sen} x = 0) & \text{ó} & (1 + 4\cos x = 0) \\
(\operatorname{sen} x = 0) & \text{ó} & \left(\cos x = -\dfrac{1}{4}\right) \\
(x = 0) & \text{ó} & (x = \pi) \text{ ó } x = \cos\left(-\dfrac{1}{4}\right).
\end{array}
$$

Analizaremos el caso $x = 0$.Como f'' es continua, ella no cambia de signo entre ceros consecutivos. Considerando el intervalo $[-\pi/2, \pi/2)$ que contiene un único cero de f'', $x = 0$, para saber si hay cambio de signo de f'' en $x = 0$, evaluamos f'' en $\pm\dfrac{\pi}{2}$.

$f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1 \qquad , f''\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 1.$

Entonces, en $x = 0$ se anula la segunda derivada y f'' cambia de signo, por lo tanto, en $x = 0$ la función f tiene un punto de inflexión.

Ejemplo 4.3.21 La función $\varphi(x) = x^4$ no tiene un punto de inflexión en $x = 0$, a pesar de tener $\varphi''(0) = 0$, pues no hay cambio de concavidad en 0.

Teorema 4.3.22 Teorema de la función inversa

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función derivable sobre $[a, b]$ tal que $f'(x) \neq 0$ y es continua para todo $x \in [a, b]$. Entonces, f^{-1} existe y es diferenciable sobre el recorrido de f y se tiene la siguiente fórmula:

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \text{ para todo } x \in [a, b]. \tag{4.15}$$

Demostración: Como f' es continua y distinta de cero, ella no cambia de signo; por tanto f es estrictamente creciente o estrictamente decreciente. En particular, es inyectiva.

Por otro lado, tenemos que f es continua en $[a, b]$; aplicando el corolario 2.5.19 el recorrido de f es un intervalo del tipo $[m, M]$.

Por consiguiente, existe $f^{-1} : [m, M] \to [a, b]$.

Calculemos su derivada en un punto cualquiera de su dominio. Sea $y_0 \in [m, M]$ y $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = y_0$. Como

$$\begin{aligned}\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} &= \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \\ &= \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \quad ,\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) &= \lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \\ &= \lim_{y\to y_0} \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \\ &= \frac{1}{f'(x_0)}.\end{aligned}$$

$\square$

Observación 4.3.23 La ecuación 4.15 puede escribirse como :

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}. \tag{4.16}$$

O mejor aún, usando como siempre el símbolo x como la variable independiente:

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \tag{4.17}$$

Otra alternativa de escritura es usando la notación de Leibniz escribiendo y en vez de $f(x)$ y $\dfrac{dy}{dx}$ en vez de $f'(x)$, x en vez de $f^{-1}(y)$ y $\dfrac{dx}{dy}$ en vez de $\left(f^{-1}\right)'(y)$. Entonces, la ecuación 4.16 queda en la forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)}. \tag{4.18}$$

Ejemplo 4.3.24 1. Sea $f(x) = x^2$, $x \geq 0$, por tanto

$$y = x^2 \iff x = \sqrt{y}.$$

Es decir, $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$, entonces $\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \dfrac{1}{2x}$ o bien $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$, o bien $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

2. Sea $f(x) = \sqrt{1 - x^{-1}}$, $x \in \mathbb{R} - [0, 1)$, por lo tanto

$$y = \sqrt{1 - x^{-1}} \implies x = \frac{1}{1 - y^2}.$$

Como $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1 - x^{-1}}} \cdot \dfrac{1}{x^2}$, entonces

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{1 - y^2}\right)^{-1}}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{1 - y^2}\right)^2}} = \frac{2y}{(1 - y^2)^2}.$$

4.3.2. Derivadas de las inversas de las funciones trigonométricas

La obtención de las fórmulas para las derivadas de las funciones inversas de las funciones trigonométricas es una aplicación del teorema de la función inversa.

1. **La función arcoseno**

   $y = arc\operatorname{sen} x : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ es la función inversa de $\operatorname{sen} x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ como hemos visto en el ejemplo 2.5.23 de la sección 2.5. Ahora, en virtud del teorema de la función inversa demostraremos que es derivable y calcularemos su derivada.

   Como la derivada de $\operatorname{sen} x$ es la función $\cos x$, que es distinta de cero en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, podemos aplicar el teorema de la función inversa, que nos asegura la existencia de la derivada y nos dice cómo calcularla:

$$y = arc\operatorname{sen} x \iff x = \operatorname{sen} y$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\, arc\operatorname{sen} x}{dx} &= \frac{1}{\cos y} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}
\end{aligned}$$

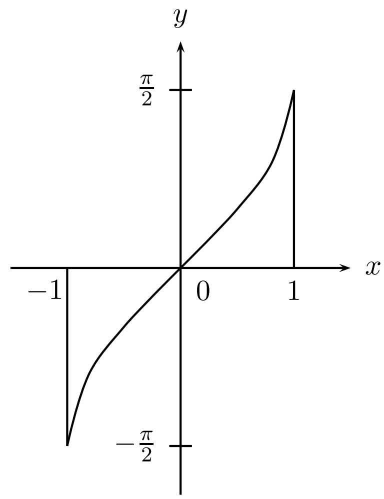


Figura 4.12: Gráfico de $f(x) = \text{arcsen}x$

La raíz tiene el signo + porque $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

2. **La función arcocoseno**

$y = arc\cos x : [-1, 1] \to [0, \pi]$ es la función inversa de $\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$, tal que

$$y = arc\cos x \iff x = \cos x.$$

Nuevamente se satisfacen las hipótesis del teorema de la función inversa y tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d\, arc\cos x}{dx} &= -\frac{1}{\operatorname{sen} y} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

3. **La función arcotangente**

$y = \arctan x : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ es la función inversa de $\tan x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, es decir,

$$y = \arctan x \iff x = \tan y.$$

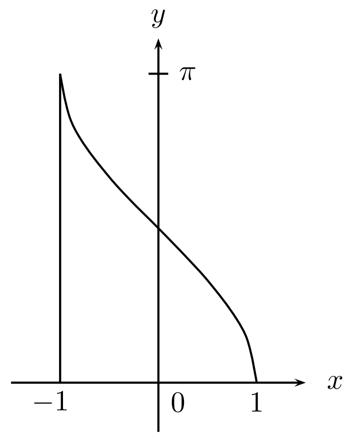


Figura 4.13: Gráfico de $f(x) = \arccos x$

En virtud del teorema de la función inversa, tenemos:

$$\frac{d \arctan x}{dx} = \frac{1}{sec^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

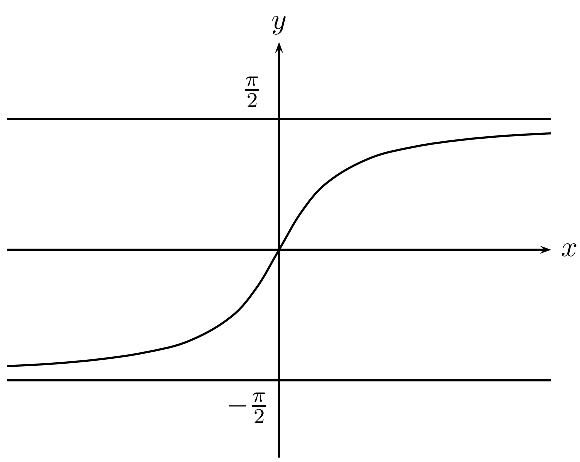


Figura 4.14: Gráfico de $f(x) = \arctan x$

4. **La función arcocotangente** $y = \arctan x : \mathbb{R} \to (0, \pi)$ es la función inversa de

cotan $x : (0, \pi) \to \mathbb{R}$, tal que

$$y = \operatorname{arccotan} x \iff x = \operatorname{cotan} x.$$

Aplicando el teorema de la función inversa, tenemos:

$$\frac{d \operatorname{arccotan} x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

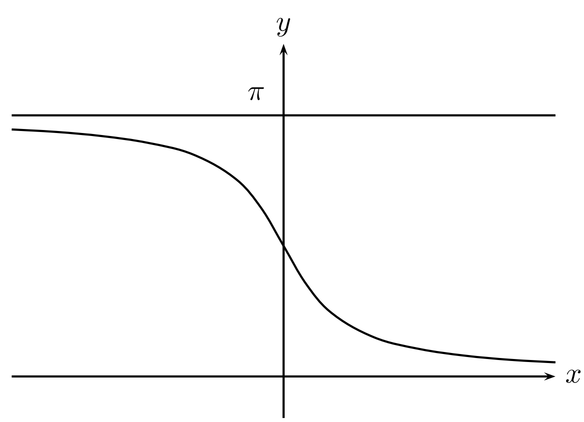


Figura 4.15: Gráfico de $f(x) = \operatorname{arccotan} x$

5. **La función arcosecante** $y = arc \sec x : (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \to [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$ es la función inversa de $\sec x : [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi] \to (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, tal que

$$y = \operatorname{arcsec} x \iff x = \sec y.$$

Aplicando el teorema de la función inversa, tenemos:

$$\frac{d \operatorname{arcsec} x}{dx} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

6. **La función arcocosecante**

$y = \operatorname{arccosec} x : (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \to [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$ es la función inversa de $\operatorname{cosec} x : [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}] \to (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, tal que

$$y = \operatorname{arccosec} x \iff x = \operatorname{cosec} y.$$

Aplicando el teorema de la función inversa, tenemos:

$$\frac{d\, arc \operatorname{cosec} x}{dx} = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

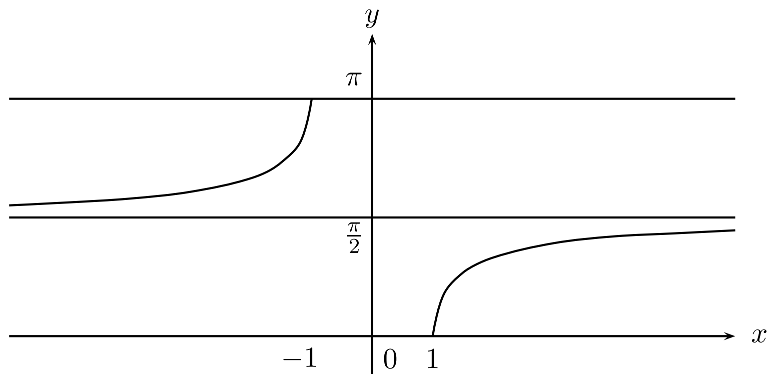


Figura 4.16: Gráfico de $f(x) = \operatorname{arcsec} x$

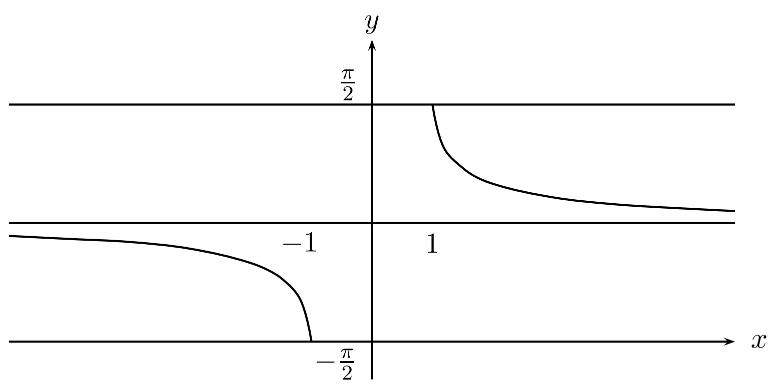


Figura 4.17: Gráfico de $f(x) = \operatorname{arccosec} x$

4.3.3. Ejercicios resueltos

1. *a*) Pruebe que si $f(x)$ es una función continua en un intervalo I de modo que $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$. Entonces, $f(x)$ es constante en I.

   b) Demuestre que si dos funciones tienen derivadas iguales, entonces ellas difieren en una constante.

   Solución:

   a) Sean x_1, x_2 dos valores cualesquiera en el intervalo I, aplicando el teorema 4.3.5 (teorema del valor medio) en $[x_1, x_2]$, tenemos que existe un $c \in [x_1, x_2]$ tal que

:

$$f(x_2) = f(x_1) + (x_2 - x_1)f'(c).$$

Como $f'(c) = 0$, obtenemos que $x_2 = x_1$, para todo $x_1, x_2 \in I$. Por tanto , podemos concluir que f es constante en I.

b) Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones tales que $f'(x) = g'(x)$ para todo x en algún intervalo I. Si definimos la función $h(x) = f(x) - g(x)$, entonces $h'(x) = 0$ para todo $x \in I$. Por la parte recién demostrada podemos concluir que $h(x)$ es constante en I; por tanto, las funciones f y g difieren en una constante.

2. Encuentre máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función racional:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

Solución:

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Entonces,

$$f'(x) = 0 \iff 1 - x^2 = 0.$$

Por tanto, los candidatos a máximos y mínimos son: $x = \pm 1$. Para saber que son realmente cada uno de estos puntos, calcularemos la segunda derivada de f:

$$f''(x) = \frac{2x^5 - 4x^3 - 6x}{(x^2+1)^4}.$$

Podemos observar que el signo de f'' lo determina su numerador, pues el denominador es siempre positivo.

Un cálculo directo nos da $f''(1) < 0$ y $f''(-1) > 0$. Por tanto, en $x = 1$ la función tiene un máximo y en $x = -1$ tiene un mínimo.

Veamos ahora los puntos de inflexión.

$$f''(x) = 0 \iff 2x(x^4 - 2x^2 - 3) = 0.$$

La resolución de esta ecuación de quinto grado nos da: $x = 0$ o $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$. Resolviendo la ecuación de cuarto grado como una ecuación de segundo grado en x^2, obtenemos: $x^2 = 3$ y $x^2 = -1$. Como la última ecuación no tiene soluciones reales, tenemos que como candidatos a puntos de inflexión tenemos: $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ y $x = -\sqrt{3}$. Para saber cuáles de estos puntos son puntos de inflexión y considerando que f'' es continua, basta calcular f'' en un valor menor y en un valor mayor que el candidato a punto de inflexión para saber si ella cambia de signo:

- Para $x = 0$. Nos sirven los valores ya calculados de f'' en ± 1, lo que nos dice que ella cambia de signo en $x = 0$, por tanto es punto de inflexión.
- Eligiendo $1 \in (0, \sqrt{3})$ y $2 \in (\sqrt{3}, \infty)$, vemos que $f''(1) < 0$ y $f''(2) > 0$. Por tanto $x = \sqrt{3}$ es otro punto de inflexión de f.
- Eligiendo $-2 \in (-\infty, -\sqrt{3})$ y $-1 \in (-\sqrt{3}, 0)$, vemos que $f''(-2) < 0$ y $f''(-1) > 0$. Por tanto, $x = -\sqrt{3}$ es un punto de inflexión de f.

3. Encuentre máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función racional:

$$g(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}.$$

Solución:

Procediendo de manera análoga al ejercicio anterior, obtenemos que la función g tiene un mínimo en $(0, 0)$ y puntos de inflexión en $(\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{4})$.

4. Demuestre que la ecuación $x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$ tiene sólo dos soluciones:

Solución:

Sea $f(x) = x \operatorname{sen} x + \cos x - x^2$. Entonces $f(0) = 1 > 0$, $f(-\pi) = -1 - \pi^2 < 0$ y $f(\pi) = 1 - \pi^2 < 0$, por tanto, $f(x)$ tiene al menos dos ceros. Por otro lado, $f'(x) = x \cos x - 2x$ se anula en $x = 0$ y $\cos x = 2$ (lo que no puede ser), por lo tanto el único punto crítico es $x = 0$ y como $f''(x) = \cos x - x \operatorname{sen} x - 2$ se tiene $f''(0) = -1 < 0$. Luego f en $x = 0$ tiene un máximo, lo que implica que $f(x)$ tiene sólo dos ceros. Porque si tuviera un tercer cero, como la función es continua, tendría, según el teorema de Rolle, otro punto donde se anula la derivada.

5. Demuestre que las sinusoides $\varphi(x) = a \operatorname{sen} \omega x + b \cos \omega x$ y $\phi(x) = a \cos \omega x - b \operatorname{sen} \omega x$ tienen ceros alternados.

Solución:

Como $\varphi'(x) = \omega\phi(x)$, entonces si $x_1 < x_2$ son ceros consecutivos de $\varphi(x)$, es decir, $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = 0$ y $\varphi(x) \neq 0$, $x_1 < x < x_2$. Entonces, en virtud del teorema de Rolle, existe x_0 tal que $x_1 < x_0 < x_2$ y cumple que $\varphi'(x_0) = \phi(x_0) = 0$. Como ambas sinusoides tienen el mismo período, estos ceros son alternados.

Este método puede aplicarse en forma más general. Si $g(x) = f'(x)$, entonces entre dos ceros de $f(x)$ existe al menos un cero de g(x).

6. Compruebe que la función

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

satisface $f'(0) = 1 > 0$, sin embargo esta función no es creciente en ninguna vecindad de 0. ¿Contradice esta función el teorema 4.3.9 ?

Solución: Observemos que:

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{1}{h}\left[h + 2h^2 \operatorname{sen}\frac{1}{h}\right] \to 1 \text{ cuando } h \to 0.$$

Lo cual dice que $f'(0) = 1$. Por otra parte, f es derivable en cualquier intervalo de la forma $(0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, con f' dada por:

$$f'(x) = 1 + 4x \operatorname{sen}\frac{1}{x} - 2\cos\frac{1}{x}.$$

Si consideramos la sucesión $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$ que converge a 0, tenemos $f'(x_n) = 1 - 2 < 0$ Si f fuese creciente en alguna vecindad de cero tendríamos $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (0, \varepsilon)$, luego f no es creciente cerca del cero. Esto no contradice el teorema 4.3.9, pues f' no es continua en cero, y por lo tanto el ser positiva en $x = 0$, no da ninguna información cerca del 0.

7. Calcular aproximadamente $\sqrt{304}$.

Solución:

Sea $f(x) = \sqrt{x}$. Para aplicar el teorema del valor medio busquemos una raíz exacta menor y más cercana a 304. Sean $a = 289$ y $b = 304$, entonces tenemos:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{\sqrt{304} - 17}{15},$$

para algún x_0 en $(289, 304)$.

Como $f(x) = \sqrt{x}$ es una función creciente, se tiene:

$$17 < \sqrt{x_0} < \sqrt{304},$$

acotando tenemos:

$$17 < \sqrt{x_0} < \sqrt{304} < \sqrt{324} = 18.$$

Luego,

$$\frac{15}{2 \cdot 18} < \sqrt{304} - 17 < \frac{15}{2 \cdot 17},$$

así

$$17{,}416 < \sqrt{304} < 17{,}441$$

Lo que es una aproximación bastante razonable, si no se tiene calculadora.

8. Usando el teorema del valor medio, demuestre las siguientes desigualdades:

   a) $-x \leq \operatorname{sen} x \leq x$, para todo $x \geq 0$.

   b) Si $\alpha > 1$, entonces $(1+x)^{\alpha} \geq 1+\alpha x$, para todo $x > -1$. Esta es la desigualdad de Bernoulli que está demostrada en un caso particular, cuando $\alpha \in \mathbb{N}$,en el desarrollo del ejemplo 2.1.42 de la sección 2.1.

   Solución:

   a) Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$. Apliquemos el teorema del valor medio con $a = 0$, $b = x$. Así obtenemos:
   $$\frac{\operatorname{sen} x - 0}{x} = \cos x_0$$
   pero, $-1 \leq \cos x_0 \leq 1$. Luego, $-x \leq \operatorname{sen} x \leq x$ para $x \geq 0$.

   b) Sea $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ con $\alpha > 1$.
   Si $x > 0$, aplicamos el teorema del valor intermedio en $[0, x]$, obtenemos:
   $$\frac{(1+x)^{\alpha} - 1}{x} = \alpha\,(1+x_0)^{\alpha-1} \quad 0 < x_0 < x.$$
   Como $x_0 > 0$ y $\alpha - 1 > 0$, entonces $(1+x_0)^{\alpha-1} > 1$, lo que implica que
   $$(1+x)^{\alpha} > 1+\alpha x.$$
   Si $-1 < x < 0$ el teorema del valor medio se aplica en $[x, 0]$ y obtenemos el mismo resultado.
   Si $x = 0$ obtenemos la igualdad.

9. Si
   $$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!},$$
   demuestre que la ecuación $P_n(x) = 0$ no tiene raíces reales cuando n es par y tiene exactamente una raíz cuando n es impar.

   Solución:

   Para demostrar este ejercicio usaremos inducción.

   Si $n = 1$, entonces $P_1(x) = 1 + x$ y la ecuación $P_1(x) = 0$ tiene exactamente una raíz. Por tanto, en este caso se verifica la afirmación.

   Supongamos que la propiedad vale para n y demostremos su validez para $n+1$.

- Si n es par, por hipótesis de inducción $P_n(x)$ no tiene raíces reales.

  Sea $P_{n+1}(x) = 0$; como $P'_{n+1}(x) = P_n(x)$, entonces P'_{n+1} no se anula y, por tanto, la función $P_{n+1}(x)$ es estrictamente creciente o estrictamente decreciente. Pero, $n+1$ es impar, así cuando $x \to -\infty$, P_{n+1} toma valores negativos y toma valores positivos cuando $x \to +\infty$. Por ser función continua P_{n+1} debe cruzar el eje X, es decir, existe una raíz real de P_{n+1} .

  Veamos ahora que no puede tener más de una raíz. Si tuviera una segunda raíz podríamos aplicar el teorema de Rolle, obteniendo que existe un punto donde su derivada se anula, pero su derivada es $P_n(x)$ que no tiene raíces según nuestra hipótesis. En síntesis, sólo existe una única raíz para $P_{n+1}(x)$.

- Supongamos n es impar, por hipótesis de inducción $P_n(x)$ tiene exactamente una raíz real r, $r \neq 0$.

  Debemos demostrar que $P_{n+1}(x)$ no tiene raíces. Como $P'_{n+1}(x) = P_n(x)$, entonces $P'_{n+1}(r) = 0$. Por lo cual r es el único posible punto de máximo o mínimo. Por ser $(n+1)$ par $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} P_{n+1}(x)$ es positivo, lo que a su vez nos dice que r es un mínimo.

  Por otro lado,

$$P_{n+1}(r) = \left(1 + r + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^3}{3!} + \ldots + \frac{r^n}{n!}\right) + \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{r^{n+1}}{(n+1)!}.$$

  Por ser $(n+1)$ par $P_{n+1}(r) > 0$. Por tanto,P_{n+1} no se anula nunca.

4.3.4. Ejercicios propuestos

1. Pruebe que si $f(x)$ es una función continua tal que $f'(x) = 4$ para todo x en algún intervalo I, entonces f es de la forma $f(x) = 4x + b$, para alguna constante b y para todo $x \in I$.

2. La función $f(x) = \operatorname{sen} x(1 + \cos x)$ con $0 \leq x \leq 2\pi$, ha sido parcialmente estudiada en el ejemplo 4.3.18. Demuestre que en su dominio ella tiene tres puntos de inflexión. Encuéntrelos y haga el gráfico de f.

3. Demuestre que para $x \geq 0$ y $0 < \alpha < 1$ se tiene

$$x^\alpha \leq \alpha x + (1 - \alpha).$$

   Sugerencia: Aplique el teorema del valor medio a $f(x) = \alpha x - x^\alpha$.

   Deduzca que $a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1 - \alpha)b$ si a, b son números positivos.

4. Encuentre los puntos críticos y de inflexión de las siguientes funciones:

a) $y = x - \dfrac{x^3}{3!}$.

b) $y = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$.

c) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - x - 2}$.

d) $y = \dfrac{2}{\cos x}$.

e) $y = \tan x \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)$.

5. Sea $p(x)$ un polinomio. El número x_0 se dice una raíz de multiplicidad m si

$$p(x) = (x - x_0)^m q(x),$$

con $q(x) \neq 0$. Demuestre:

a) Si tiene r raíces en $[a, b]$, entonces $p'(x)$ tiene por lo menos $r - 1$ raíces, y en general, la derivada de orden k de $p(x)$, $p^{(k)}(x)$ tiene por lo menos $r - k$ raíces en $[a, b]$.(Las raíces se cuentan tantas veces como su multiplicidad).

b) Si $p^{(k)}(x)$ tiene exactamente r raíces en $[a, b]$, ¿qué puede decir del número de raíces de $p(x)$ en $[a, b]$?

6. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales y se define $f(x)$ en $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - x)^2.$$

Encuentre el único punto de mínimo de f.

7. Suponga que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables en $\mathbb{R}$ tal que $f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que los ceros de estas funciones son alternados. Sugerencia: Suponga que la tesis es falsa y aplique el teorema de Rolle a $\dfrac{f}{g}$ y a $\dfrac{g}{f}$.

8. Considere el polinomio cúbico $p(x) = x^3 + px + q$ con $p \geq 0$. Demuestre que existe $p^{-1}(x)$, calcule $(p^{-1})'(x)$ y encuentre una expresión explícita para esta inversa.

9. Demuestre que la derivada de una función impar es par.

10. Deduzca una fórmula para la derivada de $\operatorname{arccotan} x$, $\operatorname{arcsec} x$ y $\operatorname{arccosec} x$.

11. Derive las siguientes funciones:

a) $f(x) = \operatorname{arc\,sen}^2 x$.
b) $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x^2$.
c) $f(x) = \operatorname{arc\,sen} \sqrt{x}$.
d) $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)$
e) $f(x) = x \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1-x^2}$
f) $f(x) = x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$
g) $f(x) = \arctan(g(x - \tan x))$; donde g es una función derivable.
h) $f(x) = \dfrac{\sqrt{\arctan x} + g(g(x))}{\cos g(x)}$; donde g es una función derivable.
i) $f(x) = \arctan(x \operatorname{sen} x)$

12. Probar que $y = \operatorname{arc\,sen}^2 x$ satisface la ecuación diferencial:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 2.$$

13. Demuestre que $z = t \operatorname{sen}(\arctan t)$ es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dz}{dt} - \frac{z}{t} = \frac{\sqrt{t^2 - z^2}}{t^2+1}.$$

14. Analice el crecimiento y la existencia de máximos y mínimos para las siguientes funciones:

a) $y = \operatorname{arc\,sen} x^2$
b) $y = \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$
c) $y = \operatorname{arc\,sen}^2 x$
d) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$
e) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15. Considere una función $L(x)$ para la cual:

- $\mathrm{dom}L = \mathbb{R}^+$
- $L(x) = 0 \iff x = 1$.
- $L(x) > 0$ si $x > 1$ y $L(x) < 0$ si $x < 1$.

- $\lim_{x \to +\infty} = +\infty$
- $\lim_{x \to 0^+} = -\infty$
- $L'(x) = \dfrac{1}{x}$

En base a la información anterior:

a) Estudie el comportamiento de L y esboce su gráfico.

b) Deduzca la existencia de la función inversa de L y estudie su continuidad y derivabilidad.

c) Demuestre que $\left(L^{-1}\right)' = L^{-1}$ y esboce el gráfico de L^{-1}.

16. Para $f(x) = \arctan L(x)$, donde $L(x)$ es la misma función de la pregunta anterior:

a) Determine dominio de f, ceros de f y signo de f.

b) Estudie la existencia de asíntotas horizontales y verticales.

c) Explique por que f es continua en $\mathbb{R}^+$ y vea la posibilidad de extender f de manera continua a $x = 0$.

d) Estudie el crecimiento de f, así como la existencia de máximos y mínimos.

e) Estudie la curvatura de f y la existencia de puntos de inflexión.

f) Estudie el acotamiento de f y determine su recorrido.

g) Esboce su gráfico.

4.4. Aplicaciones I: La regla de L'Hôpital

El teorema del valor medio de Cauchy tiene una importante aplicación en un teorema que permite calcular límites de algunos tipos de formas indeterminadas, como por ejemplo,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{cuando} \quad f(a) = g(a) = 0.$$

Este tipo de expresión suele llamarse **forma indeterminada del tipo** $\dfrac{0}{0}$.

Teorema 4.4.1 (i) Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en un intervalo I tal que $f(a) = g(a) = 0$, $f'(a)$, $g'(a)$ existen y $g'(a) \neq 0$, $a \in I$, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}. \tag{4.19}$$

(ii) Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas y derivables en un intervalo I tal que $f(a) = g(a) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{4.20}$$

Demostración:

(i) Como $f(a) = g(a) = 0$, tenemos que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}} \ , \quad x \neq a.$$

Si hacemos tender $x \to a$ obtenemos la igualdad de (i).

(ii) Aplicando el teorema del valor medio de Cauchy, teorema 4.3.7, sabemos que existe un c entre a y x tal que

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Si $x \to a$, entonces $c \to a$, por tanto:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{c\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

$\square$

Ejemplo 4.4.2 1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^3}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-3x^2}{-2x}=\dfrac{3}{2}$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)^3}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-3(1-x)^2}{-3x^2}=\dfrac{0}{-3}=0$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{sen}x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{6x}=\dfrac{1}{6}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}=\dfrac{1}{6}$. Observe que en este último caso aplicamos dos veces la regla de L'Hôpital.

4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\tan x}{1-\operatorname{cotan}x}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{-\sec^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x}=-1$.

Observación 4.4.3 1. La fórmula 4.20 vale cuando se toma límite a la derecha o a la izquierda de a.

2. Si $f'(x)$ y $g'(x)$ son continuas en el punto a y si $g'(a)\neq 0$, entonces

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

3. Si $g'(a)=0$, pero $f'(a)\neq 0$, entonces

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=0.$$

4. Si $g'(a)=f'(a)=0$, entonces se debe aplicar nuevamente la regla a la función f' si se satisfacen las hipótesis, como hicimos en el ejemplo 4.4.2 parte 3.

5. La fórmula 4.20 vale también en el caso que $a=\infty$ como veremos en el siguiente teorema.

Teorema 4.4.4 Si f y g son funciones derivables tales que $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$ y si $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, entonces

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{4.21}$$

Demostración: Haciendo $x=\dfrac{1}{t}$ y definiendo las funciones F y G por las relaciones: $F(t)=f\left(\dfrac{1}{t}\right)$ si $t\neq 0$,$F(0)=0$, $G(t)=g\left(\dfrac{1}{t}\right)$ si $t\neq 0$,$G(0)=0$, tenemos que: F y G

son continuas para todo $t \neq 0$, por ser compuestas de funciones continuas. Además, F es continua a la derecha de 0, ya que:

$$\lim_{t \to 0^+} F(t) = \lim_{t \to 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 0 = F(0).$$

Por el mismo argumento, G también es continua a la derecha de 0. Usando la regla de la cadena:

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{df\left(\frac{1}{t}\right)}{dt} = \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right), \quad \text{si} \quad t \neq 0.$$

Análogamente obtenemos que:

$$\frac{dG(t)}{dt} = -\frac{1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right), \quad \text{si} \quad t \neq 0.$$

Por tanto, en virtud del teorema 4.4.1, podemos escribir:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□

Ejemplo 4.4.5 El siguiente ejemplo muestra una forma del tipo $\dfrac{0}{0}$ cuando $x \to -\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\arctan x + \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{1}{x^2+1}}{-\frac{1}{x^2}} = -1.$$

Formas indeterminadas del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Estas consisten en expresiones de la forma:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{cuando} \quad \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

Estas pueden reducirse a una expresión del tipo $\dfrac{0}{0}$, usando el siguiente recurso.

Definiendo $F(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ y $G(x) = \dfrac{1}{g(x)}$, tenemos que,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{G(x)}{F(x)},$$

y como además

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a} G(x) = 0,$$

tenemos una forma del tipo $\dfrac{0}{0}$.

Formas indeterminadas del tipo $0\cdot\infty$. Estas consisten en expresiones de la forma:

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) \quad \text{cuando} \quad \lim_{x\to a} f(x) = 0 \ \text{ y } \ \lim_{x\to a} g(x) = \infty.$$

Definiendo $G(x) = \dfrac{1}{g(x)}$, estas pueden ser reducidas a una del tipo $\dfrac{0}{0}$.

Ejemplo 4.4.6 $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\tan x = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cot\text{an}\, x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{-1}{-\operatorname{cosec}^2 x} = 1.$

Formas indeterminadas del tipo $\infty-\infty$. Diremos que una forma indeterminada es del tipo $\infty-\infty$ si tenemos $\displaystyle\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]$ cuando $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = \infty$. Definiendo nuevamente F y G como los inversos multiplicativos de f yg respectivamente, podemos observar que

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} \frac{G(x)-F(x)}{F(x)\cdot G(x)},$$

siendo el segundo miembro de la última igualdad una forma indeterminada del tipo $\dfrac{0}{0}$.

Otra manera de tratar las formas indeterminadas del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Todas las variantes de formas indeterminadas vistas se tratan transformándolas en una del tipo $\dfrac{0}{0}$, para aplicar el Teorema 4.4.1. Pero, existe un teorema que permite tratar directamente las formas del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$, su demostración, para quien esté interesado puede verse en "Calculus"de T.M. Apostol, Ed. Reverté S.A., 1965, pág. 452.

Teorema 4.4.7 Si f y g tienen derivadas f' y g' en u intervalo abierto $]a,b[$ y si

- $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to a^+} g(x) = +\infty$,
- $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,\ L\in\overline{\mathbb{R}}$.
- $g'(x) \neq 0$ en $]a,b[$.

Entonces,

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Comentario: El teorema 4.4.7 vale también cuando a toma los valores $\pm\infty$.

Formas indeterminadas exponenciales Son tres: 0^0, 1^∞ y ∞^0
Estas pueden ser tratadas usando que e^x es la inversa de $\ln x$. Entonces,

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \underbrace{\lim_{x\to a} e^{g(x)\cdot \ln f(x)} = e^{\left[\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot \ln f(x)\right]}}_{\text{Usando la continuidad de la función exponencial}}$$

Así, debemos calcular $\lim\limits_{x\to a}[g(x)\cdot \ln f(x)]$ quedando, en general, una forma inderminada algebraica.

Formas del tipo 0^0

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = 1$

   Solución: El cálculo directo corresponde a una forma indeterninada del tipo 0^0.

   $$\lim_{x\to 0^+} x^x = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x}$$

   Calculando el límite del exponente,

   $$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{t\to +\infty} \frac{\ln \frac{1}{t}}{t} = \lim_{t\to +\infty} -\frac{\ln t}{t} \quad \stackrel{L'H}{=} \quad \lim_{t\to +\infty} \frac{1}{t} = 0.$$

   Así, vemos que

   $$\lim_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$$

2. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(\operatorname{senh}^2 x)}} = \sqrt{e}.$

Solución:

$$L=\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(\operatorname{senh}^2 x)}}=\exp\left[\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\ln(\operatorname{senh}^2 x)}\right]=\exp\left[\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\ln(\operatorname{senh} x)}\right]$$

Ahora calculamos el límite,

$$l=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\ln(\operatorname{senh} x)},$$

que es una forma indeterminada de tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$, razón por la cual usaremos la regla de L'Hôpital,

$$l=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\left(\dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}\right)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{senh} x}{x}\cdot\frac{1}{\cosh x}=1.$$

Por lo tanto,

$$L=\sqrt{e}.$$

3. $\displaystyle\lim_{x\to\pi^+}(x-\pi)^{\frac{1}{\ln(\operatorname{sen}^3 x)}}=\sqrt[3]{e}.$

Solución:

$$L=\lim_{x\to\pi^+}(x-\pi)^{\frac{1}{\ln(\operatorname{sen}^3 x)}}=\exp\left[\lim_{x\to\pi^+}\frac{\ln(x-\pi)}{\ln(\operatorname{sen}^3 x)}\right]=\exp\left[\frac{1}{3}\lim_{x\to\pi^+}\frac{\ln(x-\pi)}{\ln(\operatorname{sen} x)}\right]$$

Ahora calculamos el límite,

$$l=\lim_{x\to\pi^+}\frac{\ln(x-\pi)}{\ln(\operatorname{sen} x)},$$

que es una forma indeterminada de tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$, razón por la cual usaremos la regla de L'Hôpital,

$$l=\lim_{x\to\pi^+}\frac{\left(\dfrac{1}{x-\pi}\right)}{\left(\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{\operatorname{sen} x}{x-\pi}\cdot\frac{1}{\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\pi^+}\frac{\operatorname{sen} x}{x-\pi}\cdot\lim_{x\to\pi^+}\frac{1}{\cos x}=-1\cdot\lim_{x\to\pi^+}\frac{\operatorname{sen} x}{x-\pi}=-1\lim_{u\to 0}\frac{-\operatorname{sen} u}{u}=1.$$

Por lo tanto,

$$L = \sqrt[3]{e}.$$

Formas del tipo 1^{∞}

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = 1$

   Solución:

   $$\lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln\cos x}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \exp\left[\frac{\ln\cos x}{x}\right].$$

   Para calcular el límite del exponente debemos ocupar la regla de L'Hôpital:

   $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\cos x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\operatorname{tg} x}{1} = 0.$$

2. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = e.$

   Solución: Tenemos una forma del tipo 1^{∞}. Por tanto,

   $$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1} e^{\left(\ln x^{\frac{1}{x-1}}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 1} \ln x^{\frac{1}{x-1}}}.$$

   Calculando aparte el exponente de e tenemos:

   $$\lim_{x\to 1} \ln x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}.$$

   Por ser esta última expresión una forma indeterminada del tipo $\dfrac{0}{0}$, aplicamos una de las reglas de L'Hôpital y nos queda:

   $$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1.$$

   Luego, el límite buscado es e.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt{ab}.$

Solución: Esta es una expresión del tipo 1^∞. Por tanto:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}}.$$

Usando propiedades de la función logaritmo tenemos que:

$$\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right).$$

Esta expresión es del tipo $\frac{0}{0}$ cuando $x\to 0$, aplicando la correspondiente regla de L'Hôpital tenemos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{a^x+b^x}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x} = \frac{\ln a+\ln b}{2} = \ln\sqrt{ab}.$$

Finalmente, el límite buscado es $e^{\ln\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}(1+mx)^{\frac{1}{x}} = e^m$

Solución: $\lim\limits_{x\to 0}(1+mx)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+mx)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+mx) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+mx)}{x} =$ m. Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0}(1+mx)^{\frac{1}{x}} = e^m.$$

Formas del tipo ∞^0

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$

Solución: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x}$. Calculando el límite del exponente:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln x = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 1,$$

tenemos:

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(7x+4^x)^{1/x} = 4.$

Solución:

$$\lim_{x \to +\infty} (7x + 4^x)^{1/x} = \exp\left[\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(7x + 4^x)}{x}\right]$$

Calculando el límite del exponente, tenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(7x + 4^x)}{x} &\overset{L'H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{7 + (\ln 4)4^x}{7x + 4^x} \\
\overset{L'H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln 4)^2 4^x}{7 + (\ln 4)4^x} &\overset{L'H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln 4)^3 4^x}{(\ln 4)^2 4^x} = \ln 4.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \to +\infty} (7x + 4^x)^{1/x} = 4$$

La forma del tipo $0^{\pm\infty}$ no es una forma indeterminada Sean f y g funciones continuas tales que $\lim_{x \to a} f(x) = 0^+$ y $\lim_{x \to a} | g(x) |= +\infty$.
En efecto, si definimos h como $h(x) = f(x)^{g(x)}$, tenemos que

$$\lim_{x \to a} h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \lim_{x \to a} g(x) = +\infty \\ +\infty & \text{si} \quad \lim_{x \to a} g(x) = -\infty \end{cases} \tag{4.22}$$

$$h(x) = \exp(\ln(f(x)^{g(x)})) = \exp(g(x)\ln(f(x))$$

Calculando el límite del exponente y usando la continuidad del logaritmo, tenemos

$$\lim_{x \to a} g(x)\ln(f(x)) = \lim_{x \to a} g(x)\ln(\lim_{x \to a} f(x)) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad \lim_{x \to a} g(x) = -\infty \\ -\infty & \text{si} \quad \lim_{x \to a} g(x) = +\infty \end{cases}$$

Reemplazando estos valores en el exponente de e, se obtiene el resultado enunciado.

Ejemplo 4.4.8

$\lim_{x \to 0^+} x^{\ln x} = +\infty$.

Ejercicios resueltos

1. Calcular $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)+\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x+\cos x}$.

Solución: La expresión:

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)+\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x+\cos x}$$

evaluada en $x=\pi$ da una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando regla de L'Hôpital se tiene:

$$\lim_{x\to\pi} f(x) = \lim_{x\to\pi} \frac{\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}-\operatorname{sen} x}{2\operatorname{sen} x\cos x-\operatorname{sen} x}$$

Esta expresión también es una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$, por lo cual nuevamente debe aplicarse la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to\pi} f(x) = \lim_{x\to\pi} \frac{-\frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)-\cos x}{2\cos 2x-\cos x} = \frac{-\frac{1}{4}+1}{2-(-1)} = \frac{1}{4}$$

2. Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{cotan} x-\frac{1}{x}\right)$.

Solución: Este límite corresponde a una forma indeterminada del tipo $\infty-\infty$.

$$\operatorname{cotan} x-\frac{1}{x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}-\frac{1}{x} = \frac{x\,\cos x-\operatorname{sen} x}{x\,\operatorname{sen} x},$$

esta última expresión es una forma del tipo $\frac{0}{0}$ y aplicamos el teorema 4.4.1 obteniendo:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-x\,\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x+x\cos x} = \frac{-x}{1+\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}\cos x}$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{cotan} x-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{1+\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}\cos x} = 0.$$

3. $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\dfrac{2x-x^2-1}{(x^2-1)(x-1)}=-\dfrac{1}{2}.$

4. $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x\operatorname{sen} x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x+x\cos x}$
$=\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x+\cos x-x\operatorname{sen} x}=0.$

5. Calcule $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\tan x}$

Solución:
Evaluando $\dfrac{1-\cos^2 x}{x\tan x}$ en $x=0$, se obtiene una forma indeterminada del tipo $\dfrac{0}{0}$, por lo cual se debe aplicar regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos x(-\operatorname{sen} x)}{\tan x+x\sec^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x\operatorname{sen} x}{\tan x+x\sec^2 x}$$

Evaluando la última expresión se obtiene una forma $\dfrac{0}{0}$. Aplicando nuevamente la regla de L'Hôpital.:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\operatorname{sen}^2 x+2\cos^2 x}{\sec^2 x+\sec^2 x+2x\sec^2 x\tan x}=1.$$

6. Calcule $\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x}(\pi-2\arctan\sqrt{x})$.

Solución: El cálculo directo de $\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x}(\pi-2\arctan\sqrt{x})$ conduce a una forma indeterminada de tipo $0\cdot +\infty$.
Para aplicar la regla de L' Hôpital se debe transformar en una forma de tipo $\dfrac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x}(\pi-2\arctan\sqrt{x})=\lim_{x\to +\infty}\frac{(\pi-2\arctan\sqrt{x})}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=2.$$

7. Calcular $\lim_{x\to +\infty}x(\pi-2\operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right).$

Solución: La evaluación directa de este límite da lugar a una forma indeterminada de tipo $\infty \cdot 0$, por lo tanto se debe transformar en una del tipo $\dfrac{0}{0}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x\left(\pi - 2\,\mathrm{arc\,sen}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\pi - 2\,\mathrm{arc\,sen}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+1}}}\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}\right)}{\frac{-1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} 2x^2\sqrt{x^2+1}\cdot\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 2.
\end{aligned}$$

Ejercicios propuestos Calcule los siguientes límites:

1. $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x^3-3x+2}{2x^3-3x^2+1} = \frac{1}{2}.$
2. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\mathrm{sen}\,4x}{\mathrm{sen}\,7x} = \frac{7}{4}.$
3. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x}{\tan x - \mathrm{sen}\,x} = +\infty.$
4. $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{ax^2-2ax+a}{bx^2-2bx+b} = \frac{a}{b}.$
5. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$
6. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x-\mathrm{sen}\,x}{x^3} = \frac{1}{6}.$
7. $\displaystyle\lim_{h\to0} \frac{f(a+h)-f(a)-hf'(a)}{\frac{1}{2}h^2} = f''(a).$
8. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2(2\arctan x^2 - \pi) = -2.$
9. $\displaystyle\lim_{x\to0} \left(\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}.$

10. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{sen} x)^x = 1$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\operatorname{sen}(5x))^{\operatorname{cotan}(7x)} = e^{-5/7}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0} x^n \ln x = 0$.

13. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{a}{1-x}} = e^a$, $a \neq 0$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x} = 1$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\log_a(a+x)^{1/x} = a^{1/a}$, $a > 0$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - a^{-x}}{1-x-\log_a(a-x)} = \dfrac{2a(\ln a)^2}{1-a\ln a}$.

17. *a*) Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x^x-1}$.

    b) Sea $f(x) = x^x$ si $x > 0$ y $f(0) = 1$. Calcular $f'_+(0)$.

18. Compruebe que la regla de L'Hôpital falla al intentar aplicarla para calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\operatorname{sen} x}{x-\operatorname{sen} x}$.

4.5. Aplicaciones II: Gráficos de funciones

Todos los teoremas de la sección 4.3 encuentran directa o indirectamente aplicación en el análisis del comportamiento de funciones numéricas y en la construcción de sus gráficos.

De gran utilidad es conocer las asíntotas a una curva en una dirección cualquiera. En el capítulo de límites sólo podíamos definir las asíntotas paralelas a los ejes; ahora, con el concepto de derivada, podemos ampliar este concepto.

Definición 4.5.1 Diremos que la recta $y = ax + b$ es una **asíntota** de la curva $y = f(x)$ si

$$a = \lim_{x\to\infty} f'(x) \quad \text{y} \quad b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - ax].$$

Podemos observar que la dirección de una asíntota es la dirección límite a la que tiende la dirección de la tangente a la curva en el punto $(x, f(x))$ cuando $x \to \infty$.

Para poder hacer un gráfico que refleje fielmente el comportamiento de una función f, seguiremos el siguiente esquema:

1. Determinar el dominio de la función.
2. Encontrar los ceros de la función.
3. Determinar el signo de f.
4. Encontrar los puntos críticos de f.
5. Determinar el signo de f'.
6. Encontrar los puntos que anulan f'' y clasificación de los puntos críticos.
7. Determinar el signo de f''.
8. Analizar la existencia de asíntotas y cálculos de límites complementarios.
9. Bosquejar el gráfico de f.

Ejercicios resueltos

1. Analizar el comportamiento de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

   Solución:

   - $f(x) \in \mathbb{R} \iff 4 - x^2 \geq 0 \iff x \in [-2, 2] \iff D(f) = [-2, 2]$.
   - $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$. Por tanto, $f'(x) = 0 \iff x = 0$.

- $f'(x) > 0$ si $x < 0$ y $f'(x) < 0$ si $x > 0$. Lo que nos dice que en $x = 0$ la función alcanza su máximo valor $f(0) = 2$.
- $f''(x) = \dfrac{-4}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$, por lo cual ella es siempre negativa y la curva es cóncava.
- Su gráfico es la parte superior de una semicircunferencia con centro en el origen y radio dos, lo cual lo sabemos de la geometría analítica.

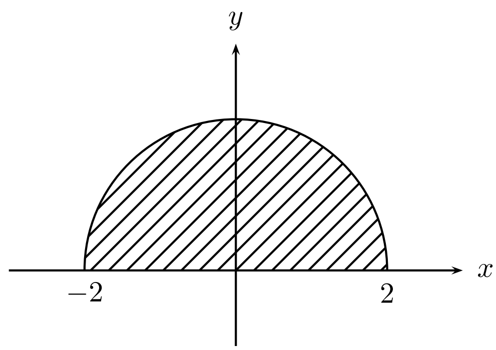


Figura 4.18: Gráfico de $\sqrt{4-x^2}$

2. Analizar el comportamiento de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

   Solución:

   Observando que esta función corresponde al inverso multiplicativo de la anterior podemos utilizar lo ya estudiado para hacer más rápido el análisis.

   - $D(f) = [-2, 2]$.
   - La curva tiene dos asíntotas verticales $x = 2$ y $x = -2$ pues $\lim\limits_{x\to\pm 2} \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}} = \infty$. El punto de máximo de la función anterior es en este caso un mínimo que toma el valor $f(0) = \dfrac{1}{2}$.

3. Analizar el comportamiento de la función parcialmente estudiada en los ejercicios de la sección 4.3:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

   Solución:

   - Como el denominador no se anula para ningún x, el dominio de f es $\mathbb{R}$.

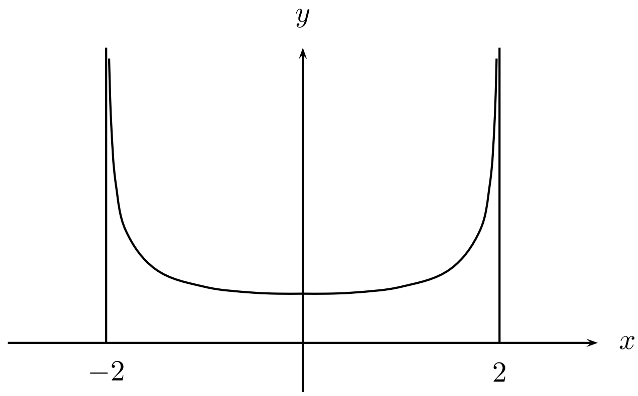


Figura 4.19: Gráfico de $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

- $$f(x) = 0 \iff x = 0.$$

  Por tanto, en $x = 0$ el gráfico corta al eje X.

- $$f(x) > 0 \iff x > 0.$$

  Por tanto f es positiva para valores positivos de x y es negativa para valores negativos de x. Por tanto, el gráfico se ubica en el primer y tercer cuadrante.

- Los puntos críticos fueron calculados en el ejercicio de la sección 4.3 y tenemos que:
  $$f'(x) = 0 \iff x = \pm 1.$$

- Como f' es continua, para conocer su signo basta calcular su valor en un punto de cada intervalo : $(-\infty,-1), (-1,1), (1,+\infty)$.Tenemos que: $f'(-2) = f'(2) < 0$, $f'(0) = 1 > 0$.

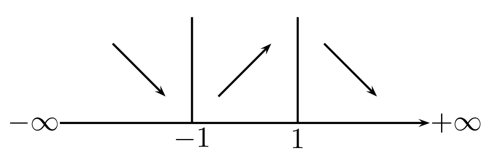


Figura 4.20: Crecimiento de la curva

- En $(-1,-\frac{1}{2})$ la función tiene un mínimo. En $(1,\frac{1}{2})$ la función tiene un máximo.

- $$f''(x) = 0 \iff x = \pm\sqrt{3} \text{ ó } x = 0.$$

- Nuevamente usando la continuidad de f'' para conocer su signo, basta calcular su valor en un punto de cada intervalo: $(-\infty, -\sqrt{3}), (-\sqrt{3}, 0), (0, \sqrt{3}), (\sqrt{3}, \infty)$: $f''(-2) < 0,\ f''(-1) > 0,\ f''(1) < 0,\ f''(2) > 0$.

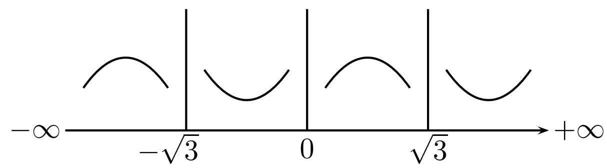


Figura 4.21: Concavidad de la curva

- Por no haber indeterminaciones en el denominador no hay asíntotas verticales. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$. Por tanto, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

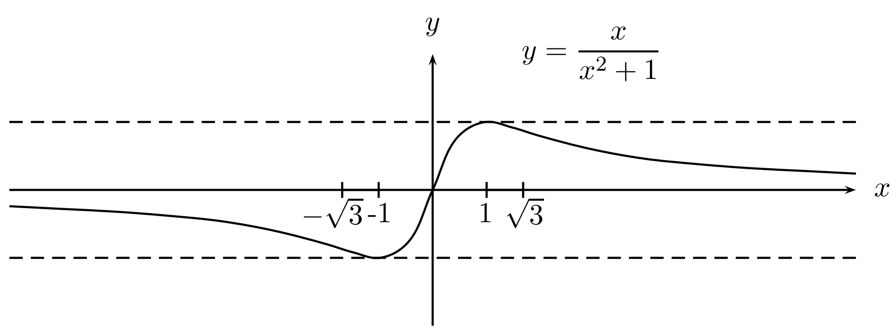


Figura 4.22: Gráfico de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

4. Analizar el comportamiento de $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$.

   Solución:

   - Dominio de $f = \mathbb{R}$.
   - La función tiene un cero en $x = 0$.

- f es siempre positiva.
- Tiene un mínimo en $(0,0)$.
- Sus puntos de inflexión son : $(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}),(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4})$.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1$, por tanto, la recta $y=1$ es una asíntota horizontal de f.
- Su gráfico es:

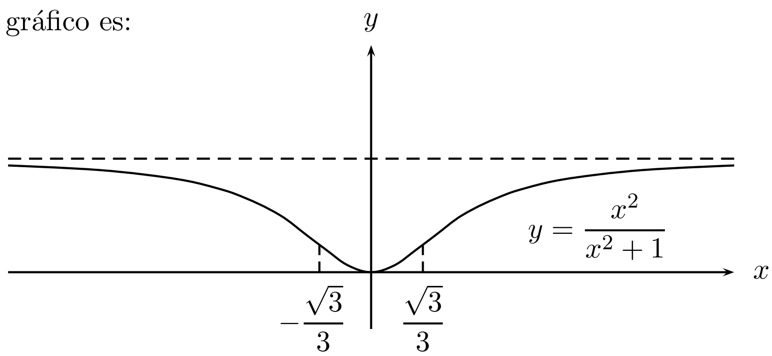


Figura 4.23: Gráfico de $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

5. Analice el comportamiento de la función

$$f(x)=\frac{1}{x^2+2x-15}.$$

Determinando:

a) El dominio de f.

b) Las asíntotas verticales .

c) Los ceros y el signo de f.

d) El crecimiento de f y sus máximos y mínimos.

e) Las asíntotas horizontales .

f) La concavidad y puntos de inflexión de f.

Solución:

$$f(x)=\frac{1}{x^2+2x-15}=\frac{1}{(x-3)(x+5)}$$

a) Dominio de $f=\mathbb{R}-\{3,-5\}$

b) Para analizar la existencia de asíntotas verticales se debe calcular :

$$\lim_{x\to 3^-} f(x), \lim_{x\to 3^+} f(x), \lim_{x\to -5^-} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to -5^+} f(x).$$

En efecto:

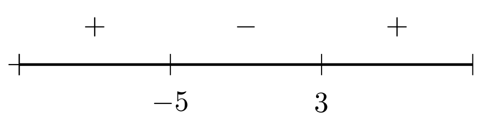
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{1}{(x-3)(x+5)} = \left(\frac{1}{8}\right) \lim_{x\to 3^-} \frac{1}{(x-3)} = \frac{1}{8}(-\infty) = -\infty.$$

Haciendo cálculos similares se obtiene que:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to -5^-} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to -5^+} f(x) = -\infty$$

Por lo tanto, las rectas $x = -5$ y $x = 3$ son asíntotas verticales.

c) El signo de f depende del signo del denominador $(x+5)(x-3)$.



Por lo tanto,

1) f es positiva en $]-\infty, -5[$.
2) f es negativa en $]-5, 3[$.
3) f es positiva en $]3, \infty)[$.
4) f no tiene ceros, pues el numerador no se anula por ser constante.

d) $f'(x) = \dfrac{-2(x+1)}{(x^2+2x-15)^2}$

Por ser el denominador positivo, el signo de f' es igual al signo del numerador.
$f'(x) > 0 \iff -2(x+1) > 0 \iff x+1 < 0 \iff x < -1$.
$f'(x) < 0 \iff x > -1$
$f'(x) = 0 \iff x = -1$

$+$		$+$		$-$		$-$
	-5		-1		3	

Considerando el signo de f' y los puntos que no pertenecen al dominio de la función , se tiene que :

1) f es creciente en $]-\infty, -5[$.
2) f es creciente en $]-5, -1[$.
3) f es decreciente en $]-1, 3[$.
4) f es decreciente en $]3, +\infty[$.

Como $f'(-1) = 0 \Longleftrightarrow x = -1$; en $x = -1$ la función puede alcanzar un máximo o un mínimo. Aplicando el criterio de la primera derivada, se tiene que en $x = -1$, f alcanza un máximo local y este es $f(-1) = -\dfrac{1}{16}$.

La función no tiene otros máximos, ni mínimos.

e) Para estudiar la existencia de asíntotas horizontales, se debe calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2\left(1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{15}{x^2}\right)} = 0.$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2\left(1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{15}{x^2}\right)} = 0.$$

Por lo tanto, $y = 0$ es una asíntota horizontal del gráfico de f.

f) La concavidad puede deducirse del crecimiento de f y los límites calculados anteriormente.

1) f es convexa en $]-\infty, -5[$.
2) f es cóncava en $]-5, 3[$.
3) f es convexa en $]3, \infty[$.

Alternativamente, puede usarse el signo de la segunda derivada.

$$f''(x) = \frac{2(3x^2+6x+19)}{(x^2+2x-15)^3}$$

El numerador no tiene raíces reales y el denominador tiene potencia impar, por lo tanto el signo de f'' es igual al signo de f. Así, se tiene que:

1) f'' es positiva en $]-\infty,-5[$.
2) f'' es negativa en $]-5,3[$.
3) f'' es positiva en $]3,\infty[$.

Como los cambios de signo de f'' se producen en los puntos no pertenecientes al dominio de la función , se concluye que f no tiene puntos de inflexión.

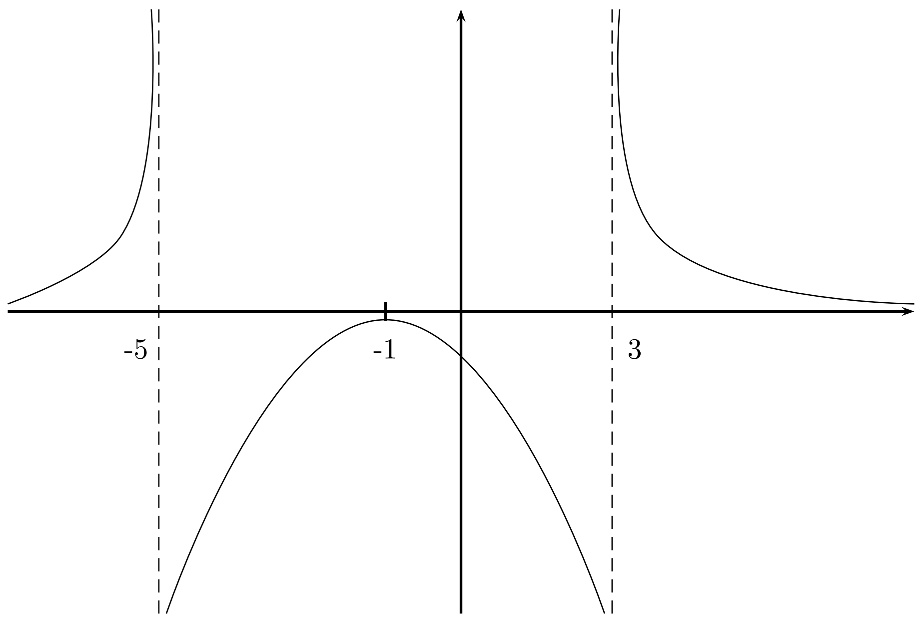


Figura 2.4.7 : Gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x-15}$.

6. Analizar el comportamiento y bosquejar el gráfico de: $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - x - 2}$.

   Solución:

   - Como $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)(x-2)}$, $D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$.
   - $f(x) = 0 \iff x = 0$.
   - Como el numerador cambia de signo en $x = 0$ y el denominador en $x = -1$ y $x = 2$ y f es continua en su dominio , para conocer el signo de f basta calcular un valor de f en cada subintervalo determinado por los puntos antes señalados. En $(-\infty, -1)$ la función es negativa , pues $f(-2) < 0$. En $(-1, 0)$ la función es positiva , pues $f(-\frac{1}{2}) > 0$. En $(0, 2)$ la función es negativa , pues $f(\frac{1}{2}) < 0$. En $(2, \infty)$ la función es positiva , pues $f(3) > 0$.
   - $$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 2x - 6)}{((x+1)(x-2))^2}.$$

     Por tanto,

     $$f'(x) = 0 \iff x^2(x^2 - 2x - 6) = 0 \iff x = 0 \text{ ó } x = 1 \pm \sqrt{7}.$$

     Estos tres valores son los puntos críticos de la función.
   - De la expresión de f' vemos que su signo depende del signo de $(x^2 - 2x - 6)$, es decir, los cambios de signo pueden producirse en $x = 1 + \sqrt{7} \approx 3,65$ ó en $x = 1 - \sqrt{7} \approx -1,65$.
     - En $(-\infty, 1 - \sqrt{7})$, f' es positiva.
     - En $(1 - \sqrt{7}, 0) \cup (0, 1 + \sqrt{7})$, f' es negativa.
     - En $(1 + \sqrt{7}, \infty)$, f' es positiva.

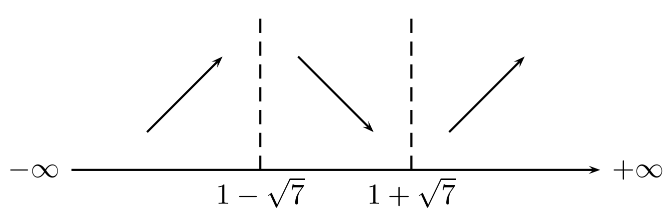


Figura 4.24: Crecimiento de la función

   - $f''(x) = \dfrac{6x(x^2 + 2x + 4)}{(x+1)^3(x-2)^3}$.

- Como $x^2 + 2x + 4$ no tiene raíces reales, esta expresión es siempre positiva,

$$f''(x) = 0 \iff x = 0.$$

- f'' es negativa en $(\infty, -1)$, f'' es positiva en $(-1, 0)$, f'' es negativa en $(0, 2)$, f'' es positiva en $(2, \infty)$. Entonces $(0, 0)$ es el único punto de inflexión. En $(1 - \sqrt{7}, -1, 9)$ la función tiene un máximo local y en $(1 + \sqrt{7}, 6, 34)$ tiene un mínimo local.

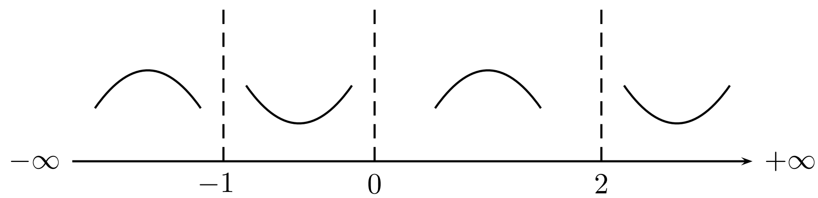


Figura 4.25: Concavidad de la función

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.
  $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 1$, por tanto, $a = 1$.
  $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - ax] = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{x^3}{x^2 - x - 2} - x \right] = 1$. Así, la recta $y = x + 1$ es una asíntota al gráfico de f.

7. Analizar el comportamiento de $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}}$.

Solución:

- $D(f) = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.
- $f(x) > 0$ para todo $x \in D(f)$. Además es una función par, por lo cual su gráfico es simétrico con respecto al eje Y.
- $f'(x) = \dfrac{x(x^2 - 8)}{\sqrt{(x^2 - 4)^3}}$, así $f'(x) = 0 \iff x(x^2 - 8) = 0 \iff x = 0, x = \pm 2\sqrt{2}$. Pero como 0 no pertenece al dominio de la función, sólo debemos considerar $x = \pm 2\sqrt{2}$.
- $f'(x) > 0$ en $(-2\sqrt{2}, -2)$ y en $(2\sqrt{2}, \infty)$, $f'(x) < 0$ en $(-\infty, -2\sqrt{2})$ y en $(2, 2\sqrt{2})$.

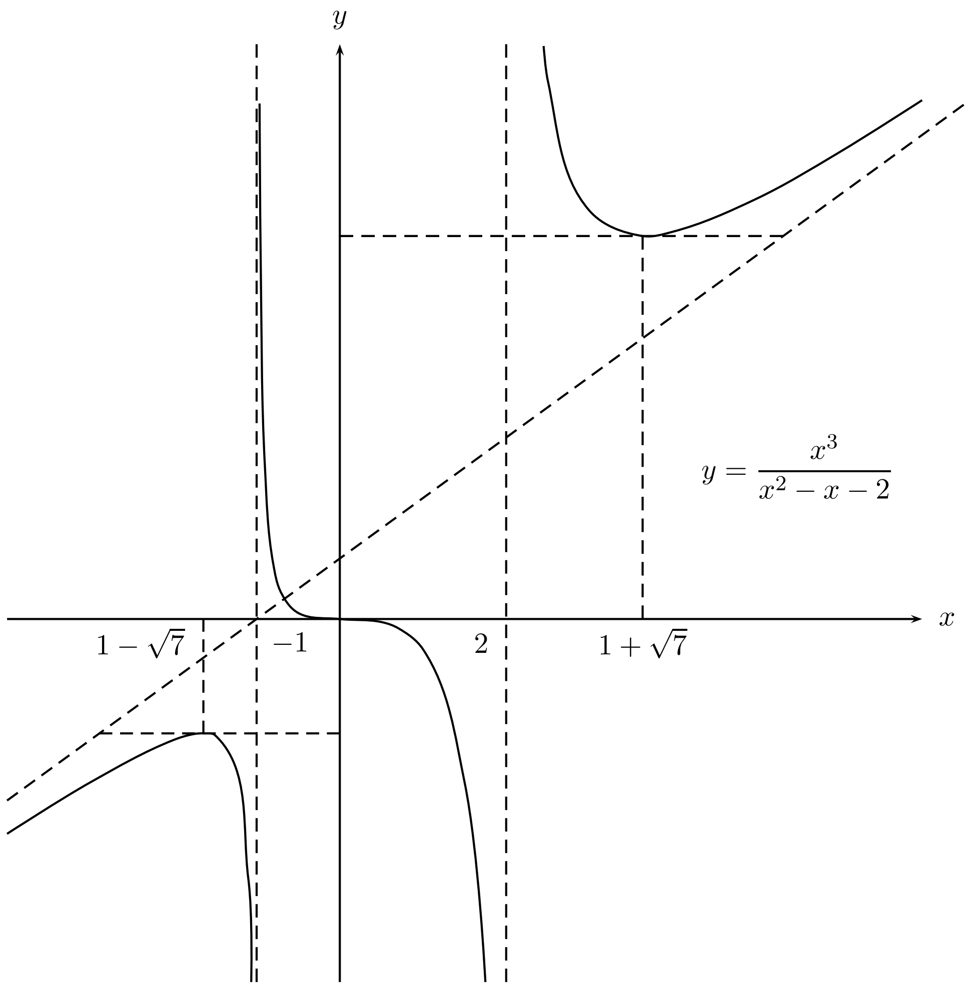


Figura 4.26: Gráfico de $\dfrac{x^3}{x^2-x-2}$

- $f''(x) = \dfrac{4x^2+32}{\sqrt{(x^2-4)^5}}$. Podemos observar que f'' es siempre positiva, por tanto, la curva es convexa. Los puntos críticos corresponden a mínimos.

- $\displaystyle \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \infty.$

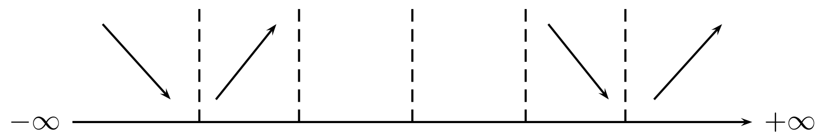


Figura 4.27: Crecimiento de la función

$\lim\limits_{x\to\pm 2} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} = \infty$, lo que implica que $x=-2$ y $x=2$ son asíntotas verticales.
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x(x^2-8)}{\sqrt{(x^2-4)^3}} = 1$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}(f(x)-x) &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}-x\right)\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^4-x^2(x^2-4)}{\sqrt{x^2-4}\left[x^2+x\sqrt{x^2-4}\right]}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{4x^2}{\sqrt{x^2-4}\left[x^2+x\sqrt{x^2-4}\right]}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Luego, la recta $y=x$ es una asíntota de la curva y por simetría también lo es $y=-x$.

8. Analizar el comportamiento de la función $f(x) = 2\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x + 3$.

   Solución:

   - $D(f) = \mathbb{R}$. Como la función es de período 2π, por tanto basta analizarla en $[0, 2\pi]$.
   - $f(x) = 0 \iff \operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x + 3 = 0$. Pero el polinomio $2z^2 - 2z + 3$ no tiene raíces reales , por lo tanto, $f(x)$ no tiene ceros.
   - $f'(x) = 4\operatorname{sen} x\cos x - 2\cos x = 2\cos x(2\operatorname{sen} x - 1)$, por tanto, $f'(x) = 0 \iff \cos x = 0$ o $(2\operatorname{sen} x - 1) = 0$. Entonces f' se anula para $x = \dfrac{\pi}{6}$, $x = \dfrac{5\pi}{6}$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ y $x = \dfrac{3\pi}{2}$.

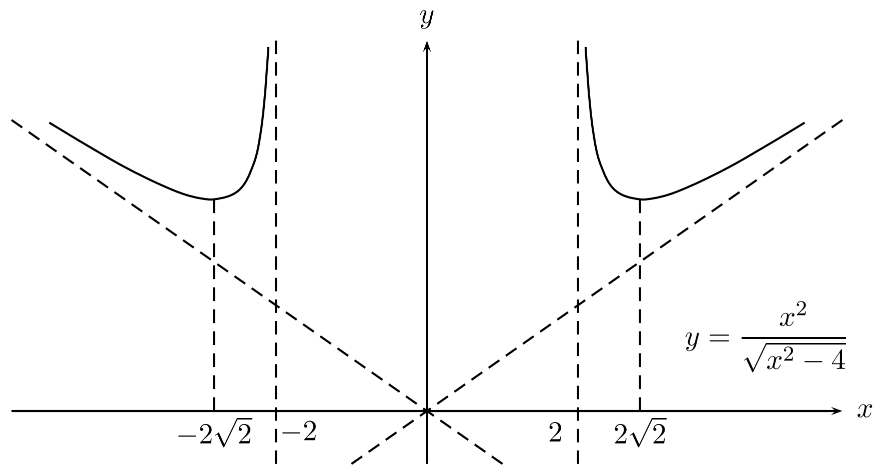


Figura 4.28: Gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}$

- f' es positiva en $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ y en $(\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2})$.

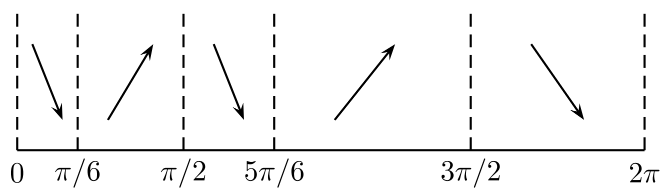


Figura 4.29: Crecimiento de la función

- $f''(x) = 4\cos^2 x - 4\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x = 4 + 2\operatorname{sen} x - 8\operatorname{sen}^2 x$. f'' se anula para $\operatorname{sen} x = \dfrac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$, lo que nos da aproximadamente los ángulos de 57, 123, 217 y 323 grados.
- Para conocer el signo de la segunda derivada entre ceros consecutivos basta calcular: $f''\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 3 > 0$, $f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -2 < 0$, $f''\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = 3 > 0$, $f''\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -6 < 0$. Así, podemos concluir que la función tiene mínimos en $(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{2})$ y $(\frac{5\pi}{6}, \frac{5}{2})$. Máximos en $(\frac{\pi}{2}, 3)$ y $(\frac{3\pi}{2}, 7)$. Los cuatro ángulos que anulan la segunda derivada

son puntos de inflexión.

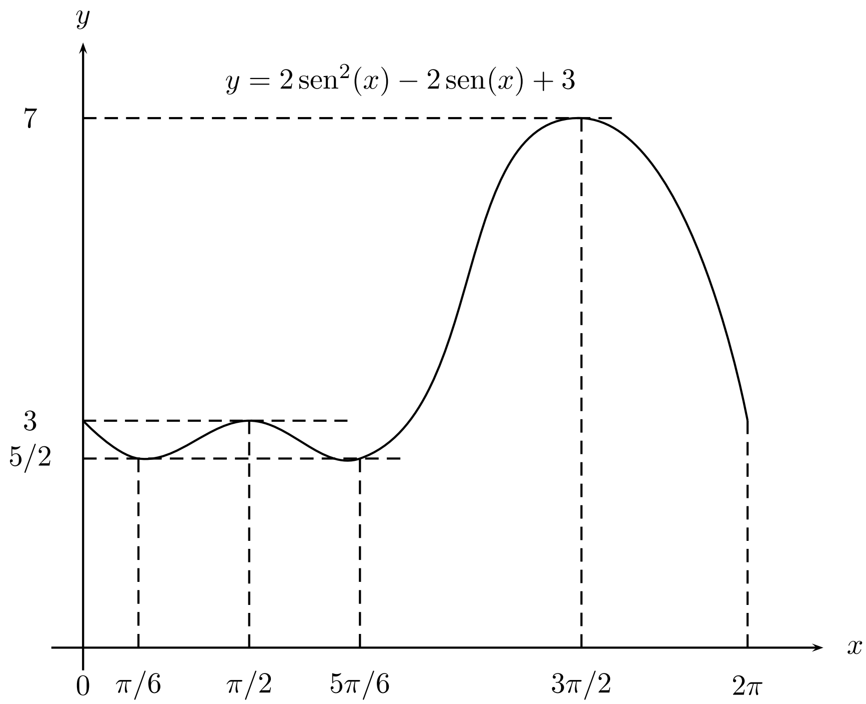


Figura 4.30: Gráfico de $f(x) = 2\,\mathrm{sen}^2 x - 2\,\mathrm{sen}\, x + 3$

9. Analizar el comportamiento de $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{sen}^3 \frac{x}{2}} + \dfrac{1}{\cos^3 \frac{x}{2}}$.

Solución:

- La función es de período 4π, por lo que basta analizarla en $[0, 4\pi]$. Por esta razón trabajaremos en el dominio restringido.
- $D(f) = [0, 4\pi] - \{0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi\}$.
- $$f(x) = \frac{\mathrm{sen}^3 \frac{x}{2} + \cos^3 \frac{x}{2}}{\mathrm{sen}^3 \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}} = 0,$$

  por tanto, $f(x) = 0 \iff \mathrm{sen}^3 \frac{x}{2} + \cos^3 \frac{x}{2} = 0 \iff \mathrm{sen}\, \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = 0$. Pues el otro factor no tiene raíces reales. Esto implica: $\frac{x}{2} = \frac{3\pi}{4}$ y $\frac{x}{2} = \frac{7\pi}{4}$, es decir,

$x = \dfrac{3\pi}{2}$ y $x = \dfrac{7\pi}{2}$.

- $f'(x) = \dfrac{3}{2}\left[\dfrac{\text{sen}^5 \frac{x}{2} - \cos^5 \frac{x}{2}}{\text{sen}^4 \frac{x}{2} \cos^4 \frac{x}{2}}\right]$. Se anula para $\text{sen}\,\dfrac{x}{2} = \cos\dfrac{x}{2}$, es decir , para $x = \dfrac{\pi}{2}$ y $x = \dfrac{5\pi}{2}$.
- La derivada es positiva para los x tales que $\text{sen}\,\dfrac{x}{2} > \cos\dfrac{x}{2}$, lo que implica, $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{5\pi}{2}$.

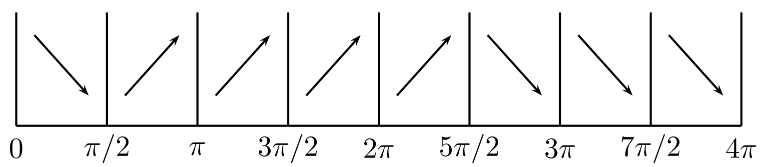


Figura 4.31: Crecimiento de la función

- $$f''(x) = \left[\frac{15 + 9\cos x}{8}\right]\left[\text{cosec}^5 \frac{x}{2} + \sec^5 \frac{x}{2}\right],$$
  el primer factor no se anula, pues si lo hiciera tendríamos $\cos x = -\dfrac{15}{9}$ lo que no puede ser. Por tanto debe anularse el segundo factor, lo que sucede cuando $\text{sen}\,\dfrac{x}{2} = -\cos\dfrac{x}{2}$, así $\dfrac{x}{2} = \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}$ y entonces, tenemos como candidatos a puntos de inflexión $x = \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{2}$.
- Para determinar el signo de f'' basta calcular la f'' en algunos puntos estratégicos , como ya hemos hecho en otras oportunidades. $f''\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = -323,778 < 0$, $f''\left(\dfrac{7\pi}{4}\right) = 323,778$ ¿0, $f''\left(\dfrac{13\pi}{4}\right) = 323,778 > 0$, $f''\left(\dfrac{15\pi}{4}\right) - 323,778 < 0$,
- En $(\dfrac{\pi}{2}, 4\sqrt{2})$ la función tiene un mínimo y en $(\dfrac{5\pi}{2}, -4\sqrt{2})$ un máximo. Los puntos $(\dfrac{3\pi}{2}, 0)$, $(\dfrac{7\pi}{2}, 0)$ son puntos de inflexión.

10. Dada la función $f(x) = 2\arctan x^2$, encuentre el recorrido, los intervalos donde es estrictamente creciente y los intervalos donde es convexa.

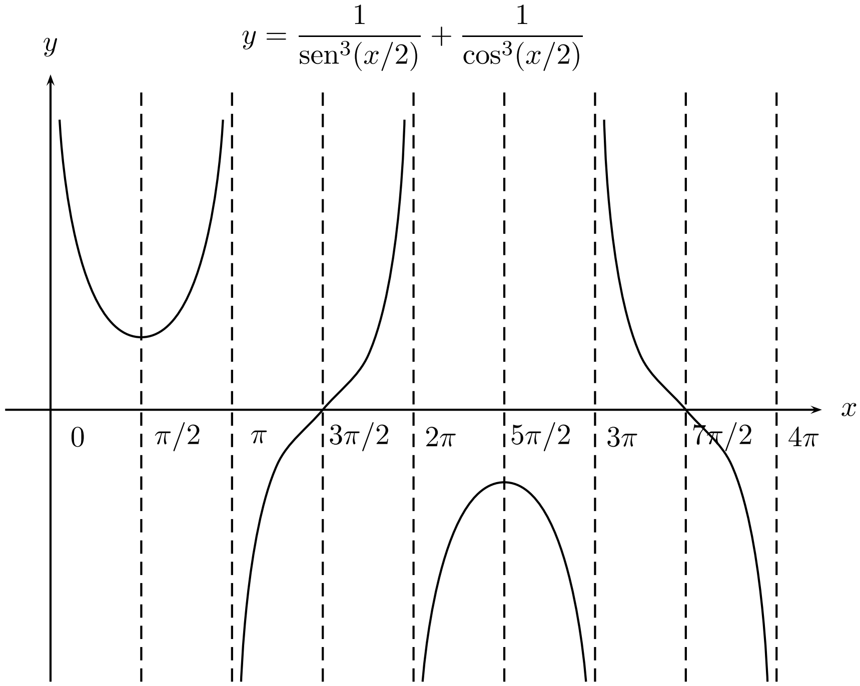


Figura 4.32: Gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{\text{sen}^3 \dfrac{x}{2}} + \dfrac{1}{\cos^3 \dfrac{x}{2}}$

Solución

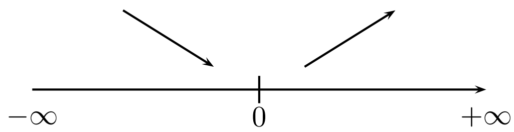
- Como $\arctan x$ tiene como recorrido $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ y es positiva cuándo $x \geq 0$, tenemos que $0 \leq f(x) < 2 \cdot \dfrac{\pi}{2}$. Luego: $R(f) = [0, \pi[$.
- $f'(x) = 2 \cdot \dfrac{1}{1+x^4} \cdot 2x = \dfrac{4x}{1+x^4}$. Así, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

  Como $1 + x^4 > 0$, para todo x, el signo de f' es el signo de x. Es decir:

  $f' < 0$ en $]-\infty, 0[$

  $f' > 0$ en $]0, +\infty[$.

  Por lo tanto,



f es creciente en $]0, +\infty[$ y decreciente en $]-\infty, 0[$.

- f es convexa $\Leftrightarrow f'' > 0$.

$$\frac{4 - 12x^2}{(1 + x^4)^2} = \frac{4(1 - 3x^4)}{(1 + x^4)^2}.$$

Como el denominador es positivo para todo x, tenemos:

$$f'' > 0 \Leftrightarrow 1 - 3x^4 > 0 \Leftrightarrow 1 - 3x^4 = (1 - \sqrt{3}x^2)(1 + \sqrt{3}x^2) > 0,$$

pero: $(1 + \sqrt{3}x^2) > 0$ para todo x, luego basta analizar:

$$1 - \sqrt{3}x^2 > 0 \Leftrightarrow (1 - \sqrt[4]{3}x)(1 + \sqrt[4]{3}x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left] -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \right[.$$

Luego f es convexa si $x \in \left] -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \right[$.

11. Sea
$$f(x) = \arctan \frac{1}{x - 2}$$

a) Determine dominio, ceros y signo de la función.

b) Analice la existencia de asíntotas horizontales y verticales. Escriba las respectivas ecuaciones cuando estas existen.

c) Estudie el crecimiento de f y la existencia de puntos de máximo y mínimo.

d) Analice la curvatura de f y la existencia de puntos de inflexión.

e) Determine el recorrido de f y bosqueje su gráfico.

Solución:

a)
- **Dominio:** como la arcotangente tiene por dominio $\mathbb{R}$, $f(x)$ está definida excepto para $x = 2$.

$$D(f) = \mathbb{R} - \{2\}.$$

- **Ceros:**
$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \arctan \frac{1}{x-2} = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{x-2} = 0.$$
Por lo tanto, la función no tiene ceros.
- **Signo de la función:** Una propiedad de la función arco-tangente es,
$$\text{sig } \arctan x = \text{sig } x.$$
Por lo tanto,
$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow \arctan \frac{1}{x-2} > 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{x-2} > 0 \Longleftrightarrow x > 2.$$
$f(x) < 0 \Longleftrightarrow x < 2.$

b) **Existencia de asíntotas horizontales :** De la continuidad de la función arcotangente en el cero, se tiene:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0.$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0.$

Por lo tanto, la recta $y = 0$ es asíntota horizontal del gráfico de f. **Existencia de asíntotas verticales :** Usando que $\lim\limits_{u\to+\infty} \arctan u = \frac{\pi}{2}$ y $\lim\limits_{u\to-\infty} \arctan u = -\frac{\pi}{2}$, tenemos:

- $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}.$
- $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \frac{\pi}{2}.$

Por lo tanto,como ambos límites son finitos, f no tiene asíntotas verticales.

c) **Crecimiento de f:**
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x-2}\right)^2} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x-2}\right) \\ &= \frac{(x-2)^2}{(x-2)^2+1} \cdot \frac{-1}{(x-2)^2} = \frac{-1}{(x-2)^2+1} < 0. \end{aligned}$$
f es decreciente para todo $x \in D(f)$.
Como f' no cambia de signo, la función no tiene máximos ni mínimos.

d) **Curvatura de f :**
$$f(x)'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{(x-2)^2+1}\right) = \frac{2(x-2)}{[(x-2)^2+1]^2}.$$
De la expresión de f'' se deduce que

- f es cóncava en $]-\infty, 2[$.
- f es convexa en $]2, +\infty[$.

La función no tiene puntos de inflexión.

e) **Recorrido de f:**Del análisis anterior, se deduce que el recorrido es $]-\pi/2, 0[\cup]0, \pi/2[$.

Ejercicios Propuestos Analizar el comportamiento de las siguientes funciones y bosquejar sus gráficos.

1. $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 8.$
2. $f(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!}.$
3. $f(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}.$
4. $f(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5}.$
5. $f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}.$
6. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}.$
7. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}.$
8. $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x}.$
9. $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x}{1 - x}}.$
10. $f(x) = x\sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}.$
11. $f(x) = x + \operatorname{sen} x.$
12. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \tan^2 x}.$
13. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}}.$
14. $f(x) = \arctan \sqrt{x}.$
15. $f(x) = \sqrt{\arctan x}.$

4.6. Aplicaciones III: Análisis de curvas en el plano

Las curvas planas más simples son aquellas cuyas ecuaciones contienen a las variables x e y en primer y segundo grado. Ellas pueden ser analizadas usando geometría analítica . Por esta razón hacemos una presentación de sus elementos básicos. En particular, si estudiante ya conoce esta materia puede omitir esta subsección.

4.6.1. Elementos de Geometría Analítica

Los dos conceptos fundamentales de la geometría analítica corresponden a la idea de Descartes de crear un método que pudiera aplicarse a la resolución de todos los problemas de la geometría. Ellos son:

- El **concepto de coordenada de un punto**, lo que permite, como ya hemos visto en la subsección 2.3.2, representar en forma de curva plana cualquier ecuación algebraica con dos incógnitas.
- El concepto de **variable** introducido en la expresión de una ecuación algebraica con dos incógnitas del tipo $F(x,y) = 0$, lo que permite mirar una ecuación algebraica bajo otra perspectiva. Pues, si cada solución (x,y) de la ecuación se ve como un punto del plano, entonces el conjunto
$$\{(x,y) \; : \; F(x,y) = 0\}$$
puede ser representado como una curva en el plano.

Así, se obtiene la ventaja de poder aplicar métodos algebraicos a la resolución de problemas geométricos y viceversa.
Recordemos que en el siglo XVII, la geometría estaba en el mismo estado que la habían dejado los griegos de la Antiguedad, en cambio el álgebra había sido desarrollada fuertemente por los árabes en la Edad Media e italianos en el siglo XVI, principalmente.

La determinación de un punto en el plano fue descrita en la subsección 2.3.2. Haciendo uso del sistema de coordenadas cartesianas estableceremos algunos resultados elementales de la geometría analítica.

Distancia entre dos puntos Sean P_1, P_2 dos puntos del plano, con cordenadas (x_1, y_1), (x_2, y_2) respectivamente. El triángulo P_1QP_2 es rectángulo en Q, por teorema de Pitágoras, tenemos que:
$$\overline{P_1P_2}^2 = \overline{P_1Q}^2 + \overline{QP_2}^2$$
si llamamos d a la distancia entre P_1 y P_2, tenemos que
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

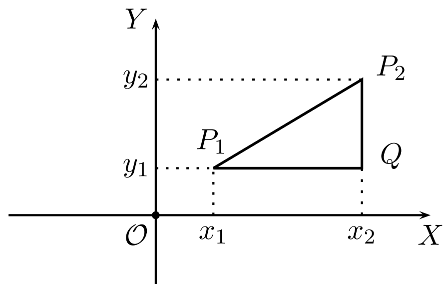


Figura 4.33: Distancia entre dos puntos

Coordenadas de un punto que divide a un segmento según una razón dada Dados los puntos P_1 y P_2, queremos encontrar las coordenadas del punto P que divide el segmento $\overline{P_1P_2}$ en la razón $m:n$.
Sean $P_1 = (x_1, y_1)$; $P_2 = (x_2, y_2)$, $P = (x, y)$, ; $Q = (x, y_1)$ y $R = (x_2, y)$.

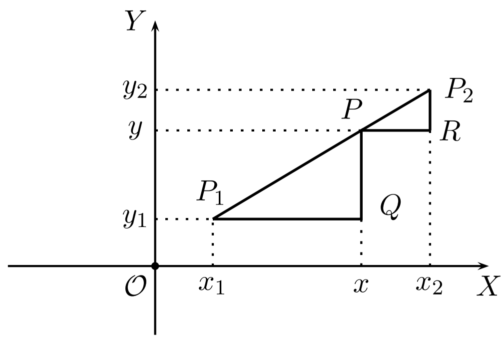


Figura 4.34: Razón Dada

Los triángulos P_1QP y PRP_2 son semejantes, por tanto $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x} = \dfrac{m}{n}$
de donde

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n} \tag{4.23}$$

por otro lado

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{m}{n}$$

de donde

$$y = \frac{ny_1 + my_2}{m + n} \,. \tag{4.24}$$

Como un caso particular tenemos las coordenadas del punto medio de un trazo. Tomando $m = n = 1$ en las ecuaciones (4.23) y (4.24), obtenemos las coordenadas del punto medio del trazo $\overline{P_1P_2}$:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad ; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Determinación de los puntos de intersección de dos curvas Como cada curva corresponde a una ecuación algebraica, tener dos curvas equivale a tener dos ecuaciones del tipo $F(x, y) = 0$, $G(x, y) = 0$. Como los puntos de intersección de las curvas deben satisfacer ambas ecuaciones, las coordenadas de tales puntos se encuentran resolviendo el sistema algebraico compuesto por las dos ecuaciones.

Curvas representadas por ecuaciones de primer grado

Teorema 4.6.1 Toda recta queda determinada por una ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$, con A , B, C son constantes. Recíprocamente, toda ecuación de primer grado $Ax + By + C = 0$ representa una recta.

Demostración: Supongamos primero que la recta pasa por el origen del sistema.
Por semejanza de triángulos se tiene, para todo punto P_i de la recta, la siguiente relación:

$$\frac{\overline{P_1M_1}}{\overline{OM_1}} = \frac{\overline{P_2M_2}}{\overline{OM_2}} = \frac{\overline{P_3M_3}}{\overline{OM_3}} = \ldots$$

A esta constante de proporcionalidad la podemos llamar a, además los numeradores de la relación son las respectivas coordenadas y de los puntos, y los denominadores son las coordenadas x. Por tanto, tenemos una ecuación de la forma

$$y = ax \qquad \text{con } a = \text{ constante.}$$

Ahora supongamos que la recta no pasa por el origen.
Aplicando el mismo razonamiento a L con los ejes $X'Y$, obtenemos que $y' = ax$, donde $y' = y - b$.
Entonces, la ecuación que satisfacen las coordenadas de los puntos de la recta es:

$$y = ax + b \quad \text{con } a, b \text{ constantes.}$$

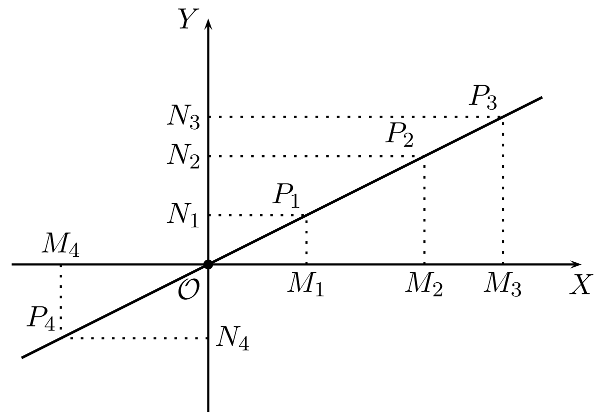


Figura 4.35: Recta que pasa por el origen

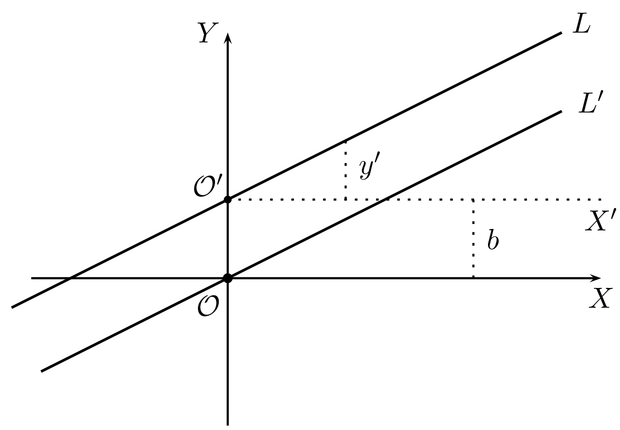


Figura 4.36: Recta que no pasa por el origen

Ahora demostraremos la afirmación recíproca.

Sea la ecuación $Ax + By + C = 0$

Si $B = 0$ entonces $x = -\frac{C}{A}$, es decir $x = K$, con K constante, lo que representa una recta paralela al eje Y.

Si $B \neq 0$, se tiene $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$; como A, B, C son constantes, la ecuación queda como $y = ax + b$, donde $a = -\frac{A}{B}$ y $b = -\frac{C}{B}$ son constantes.

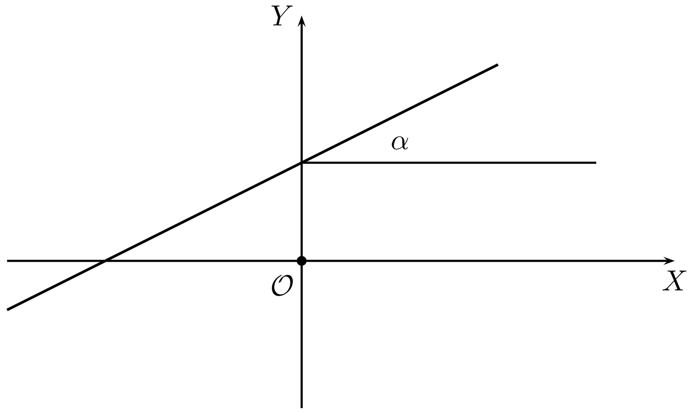


Figura 4.37: Recta

Si $b = 0$ entonces $y = ax$, lo que implica que $\dfrac{y}{x} = a$.
Es decir, son los puntos cuyas coordenadas están en una razón constante, lo que - según lo visto anteriormente -, es una recta que pasa por el origen. Del mismo modo, si $b \neq 0$ se puede ver que la ecuación $y = ax + b$ es una recta que corta el eje Y en $(0, b)$. $\square$

Definición 4.6.2 (i) Llamaremos **pendiente o inclinación** de una recta L, a la tangente del ángulo α formado entre el semieje positivo de las x y la recta medido en la forma convencional en el sentido contrario al movimiento de los punteros del reloj.

(ii) Llamaremos **ángulo formado por dos rectas** L, L' al ángulo $\phi \in [0, \pi]$ formado por la diferencia de los respectivos ángulos α y α' .

La definición (4.6.2) nos dice que $\phi = \alpha' - \alpha$ y usando las fórmulas trigonométricas de la sección 2.3, tenemos:

$$\tan\phi = \tan(\alpha' - \alpha) = \frac{\tan\alpha' - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha' \tan\alpha} \tag{4.25}$$

Si denotamos por m y m' las respectivas pendientes de las rectas L y L', entonces $\tan\phi = \dfrac{m' - m}{1 + m'm}$. Si en particular las rectas son paralelas tenemos que,

$$L \parallel L' \iff \phi = 0 \iff m' = m \tag{4.26}$$

$$L \perp L' \iff \phi = \frac{\pi}{2} \iff \operatorname{cotan}\phi = 0 \iff m'm = -1 \tag{4.27}$$

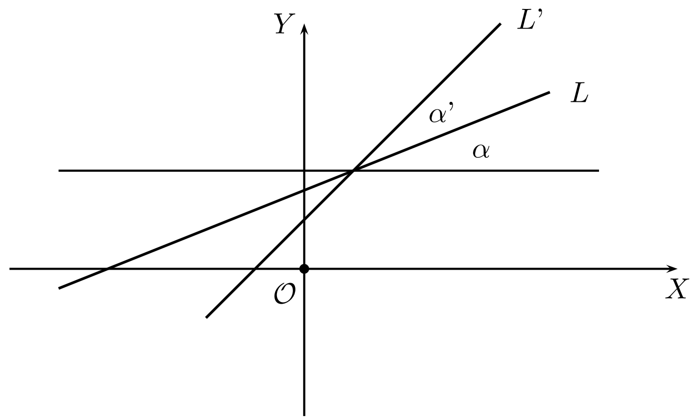


Figura 4.38: Ángulo formado por dos rectas

La geometría de Euclides nos ha enseñado que dados dos puntos existe una única recta que pasa por dichos puntos. ¿Cuál es la ecuación de esta recta ?

Sean $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ dos puntos del plano.

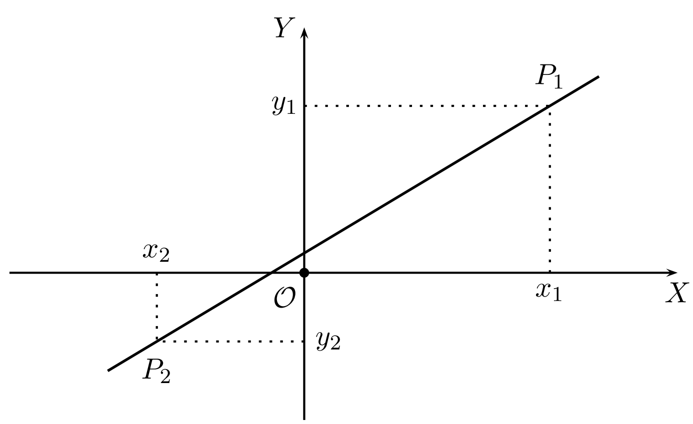


Figura 4.39: Recta que pasa por dos puntos

La recta que pasa por P_1 y por P_2 tiene pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{4.28}$$

La recta de ecuación $y = ax+b$ tiene pendiente a, como puede verse en la demostración del teorema (4.6.1). Para encontrar b reemplazamos en la ecuación de la recta el valor de m dado por (4.28) y las coordenadas x e y por las de uno de los dos puntos dados. Haciendo los cálculos algebraicos, obtenemos finalmente que la ecuación de una recta que pasa por P_1 y P_2 es:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 \tag{4.29}$$

Curvas representadas por ecuaciones de segundo grado

Recordemos el concepto de **lugar geométrico** como el conjunto de puntos del plano que satisfacen una cierta propiedad geométrica. Esta propiedad geométrica, gracias al sistema de coordenadas, puede ser expresada por una ecuación algebraica satisfecha por las coordenadas de los puntos.

Definición 4.6.3 La circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos P cuya distancia a un punto fijo C es constante.

Ecuación de una circunferencia:
Sea P un punto de la circunferencia, entonces

$$\overline{PC} = r\ , \qquad r = constante.$$

Si P tiene coordenadas (x, y) y C tiene coordenadas (a, b), usando la fórmula de la distancia, se obtiene la ecuación:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \tag{4.30}$$

que caracteriza la circunferencia de centro (a, b) y radio r.

Ejemplo 4.6.4 Encontrar la ecuación de una circunferencia de radio dado y tangente al eje Y en el origen. **Solución:**

Según la ecuación (4.30), si $(0, 0)$ pertenece a la circunferencia pedida, entonces $a^2 + b^2 = r^2$. Si el eje Y es tangente a la circunferencia entonces, el radio es $\perp$ al eje Y y el centro está sobre el eje X. Por tanto, la coordenada b del centro vale 0.

Para obtener el valor de la coordenada a usamos el hecho que la distancia entre el centro y el origen es r, lo que implica que $a = r$. Así,

$$(x - r)^2 + y^2 = r^2 \iff x^2 + y^2 - 2rx = 0$$

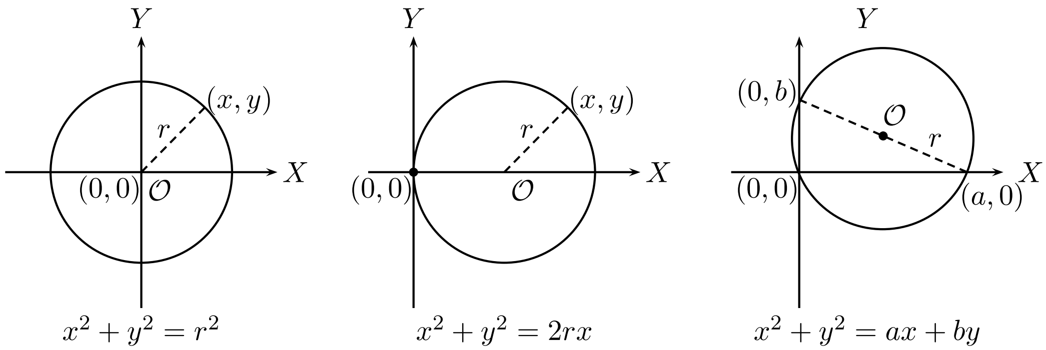


Figura 4.40: Circunferencias

Definición 4.6.5 La elipse es el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya suma de sus distancias a dos puntos fijos F_1, F_2 es constante con una constante mayor que el trazo $\overline{F_1F_2}$.

Ecuación de una elipse
Para obtener la ecuación que satisfacen las coordenadas de los puntos de una elipse, supongamos que la constante sea $2a$ y que los ejes coordenados están ubicados como en la figura 2.6.9.
Sean x e y las coordenadas de un punto P cualquiera de la elipse; y supongamos que $F_1 = (-c, 0)$ y $F_2 = (c, 0)$:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a \tag{4.31}$$

$$\overline{PF_1}^2 = y^2 + (x + c)^2 \tag{4.32}$$

$$\overline{PF_2}^2 = y^2 + (x - c)^2 \tag{4.33}$$

Eliminando $\overline{PF_1}$ y $\overline{PF_2}$ de las ecuaciones (4.31), (4.32) y (4.33), obtendremos una relación entre las variables x e y.
Restando las ecuaciones (4.32) y (4.33):

$$\begin{aligned}
\overline{PF_1}^2 - \overline{PF_2}^2 &= 4cx \\
(\overline{PF_1} + \overline{PF_2})(\overline{PF_1} - \overline{PF_2}) &= 4cx \\
2a(\overline{PF_1} - \overline{PF_2}) &= 4cx
\end{aligned}$$

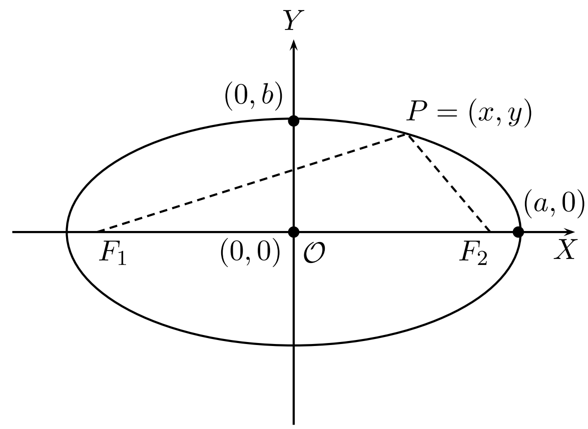


Figura 4.41: Elipse

Así tenemos:
$$\begin{cases} \overline{PF_1} + \overline{PF_2} & = & 2a \\ \overline{PF_1} - \overline{PF_2} & = & \dfrac{2cx}{a} \end{cases}$$

lo que nos da los valores de $\overline{PF_1}$, $\overline{PF_2}$:

$$\overline{PF_1} = a + \frac{cx}{a} \qquad ; \qquad \overline{PF_2} = a - \frac{cx}{a}$$

reemplazando estos valores en (4.32) o en (4.33), nos da la ecuación:

$$\begin{aligned} (a + \frac{cx}{a})^2 &= y^2 + (x + c)^2 \\ a^2y^2 + (a^2 - c^2)x^2 &= a^2(a^2 - c^2) \end{aligned}$$

Por la definición de la elipse $2a > 2c$, es decir, $a > c$, $a^2 - c^2 > 0$ y puede ser representado por un cuadrado b^2, lo que nos da: $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, de donde tenemos la ecuación cartesiana de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{4.34}$$

Para la elipse de ecuación dada en (4.34) se tiene que:

(i) El origen (0,0) corresponde al centro de la elipse.

(ii) Si $y = 0$ entonces $x = \pm a$ y si $x = 0$ se tiene $y = \pm b$. Estos valores determinan los puntos A y A', B y B' donde la curva corta a los ejes y a su vez representan los valores extremos que pueden tomar ambas variables, por tanto A, A', B y B' se llaman **vértices** de la elipse.

(iii) Las distancias a y b del origen a los vértices se llaman **longitudes de los semiejes de la curva**. Los ejes enteros tienen longitudes $2a$ y $2b$.

(iv) Si la elipse no es un círculo, entonces $a \neq b$. Si $a > b$, entonces el trazo $\overline{AA'}$ es el **eje mayor** y $\overline{BB'}$ es el **eje menor**.

(v) Los **focos** F_1, F_2 de la elipse situados sobre el eje mayor tienen coordenadas $(-c, 0)$, $(c, 0)$, con $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. La distancia $\overline{F_1F_2}$ se llama **distancia focal**.

Ejemplo 4.6.6 la ecuación

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$$

representa una elipse con centro en el origen. Escribiendo la ecuación en la forma

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$$

podemos deducir que la longitud del semieje mayor es $a = 2$ y que la longitud del semieje menor es $b = \sqrt{2}$.

Los vértices de la elipse son: $A = (2, 0)$, $A' = (-2, 0)$, $B = (0, \sqrt{2})$, $B' = (0, -\sqrt{2})$. Para encontrar las coordenadas de los focos debemos calcular el valor de c. $c^2 = a^2 - b^2$ implica que $c = \sqrt{2}$ y por tanto los focos tienen coordenadas: $F_1 = (\sqrt{2}, 0)$, $F_2(-\sqrt{2}, 0)$.

La ecuación

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$$

representa una elipse del mismo tipo anterior, pero con su eje mayor sobre el eje Y, donde además están sus focos con coordenadas $F_1 = (0, \sqrt{2}$, $F_2 = (0, -\sqrt{2})$.

Definición 4.6.7 La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano tal que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos F_1, F_2 es una constante menor que $\overline{F_1F_2}$.

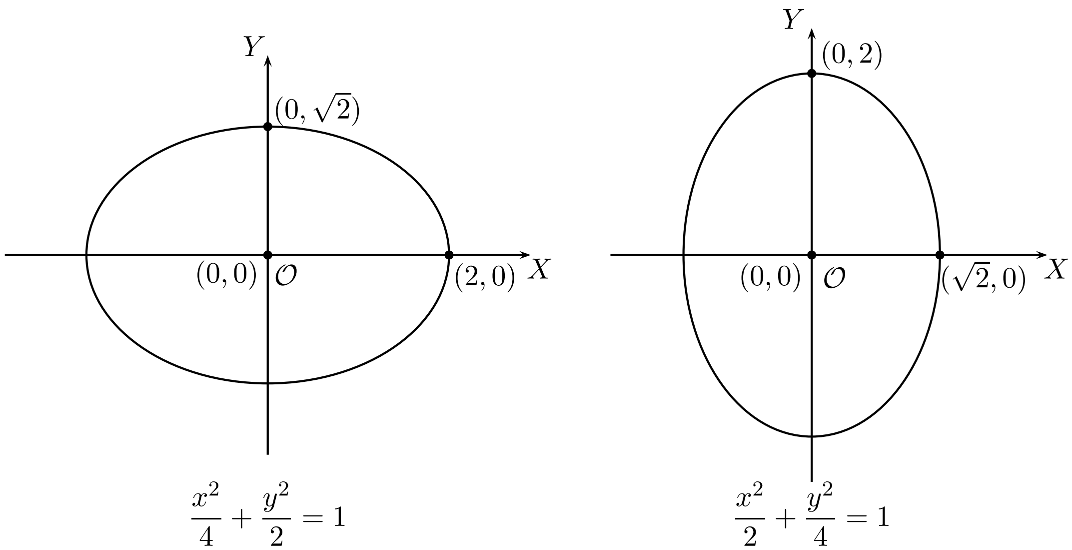


Figura 4.42: Elipses

Ecuación de una hipérbola
Se procede en forma análoga al caso de una elipse:

$$\overline{PF_1}-\overline{PF_2}=2a$$

$$\overline{PF_1}^2=y^2+(x+c)^2$$

$$\overline{PF_2}^2=y^2+(x-c)^2\ .$$

Observando que $a<c$, entonces $a^2-c^2<0$ y lo reemplazamos por $-b^2$ llegándose a la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{4.35}$$

Para la hipérbola de ecuación dada en (4.35) se tiene:

(i) El origen (0,0) corresponde al centro de la hipérbola.

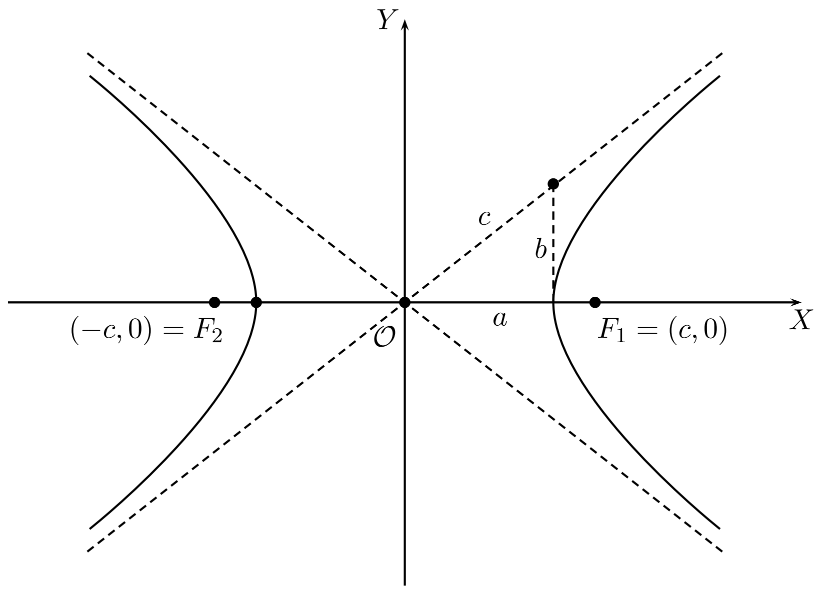


Figura 4.43: Hipérbola

(ii) Si $y=0$ entonces $x=\pm a$, pero cuando $x=0$ tenemos que $y^2=-b^2$. Por tanto la curva intersecta al eje x en los puntos $(-a,0)$ y $(a,0)$, pero no hay intersección con el eje Y. Por tal razón se llama al primero **eje transversal** y tiene longitud $2a$, el segundo suele llamarse **eje conjugado** o **eje imaginario** . Los puntos $(-a,0)$, $(a,0)$ se llaman **vértices** de la hipérbola .

(iii) Los **focos** de la hipérbola son los puntos $(-c,0)$, $(c,0)$.

(iii) Como
$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \tag{4.36}$$
se deduce que ningún punto de la curva puede tener abscisa menor, en valor absoluto, que a, además cuando x crece de a a ∞ o decrece de $-a$ a $-\infty$, el valor absoluto de y crece infinitamente, es decir, sin acotamiento. Así la curva tiene dos arcos infinitos.

(iv) La ecuación (4.35) puede escribirse también como $y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$. Del estudio hecho en la sección 2.2 de la función $\dfrac{1}{x}$, sabemos que cuando $|x|$ crece, entonces $\dfrac{a^2}{x^2}$

disminuye. Por tanto, cuando $|x|$ crece, el $|y|$ se acerca al valor $\pm\frac{b}{a}x$. Por esta razón las rectas $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ se llaman **asíntotas** de la hipérbola.

(v) Observemos que las asíntotas contienen a las diagonales del rectángulo central de lados $2a$ y $2b$. Además, si vemos la diferencia entre la hipérbola y sus asíntotas tenemos:

$$|\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{b}{a}x| = \frac{b}{a}|x - \sqrt{x^2-a^2}| = \frac{b}{a}|\frac{a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}| \tag{4.37}$$

nuevamente aquí podemos apreciar que cuando $|x|$ crece, la expresión (4.37) se hace cada vez más pequeña.

(vi) Las hipérbolas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

se llaman hipérbolas **conjugadas** . Si $a = b$, la hipérbola se llama **equilátera**.

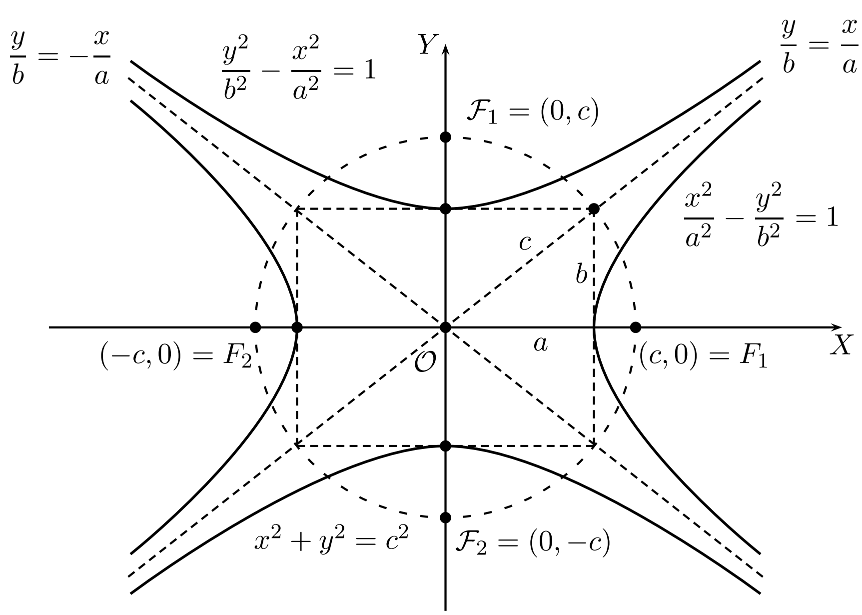


Figura 4.44: Hipérbolas Conjugadas

Ejemplo 4.6.8 La ecuación
$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$$
representa una hipérbola con centro en el origen y eje transversal sobre el eje X. Sus vértices son los puntos $(2,0)$ y $(-2,0)$.

Para conocer las coordenadas de sus focos debemos calcular el valor de c. Como $c^2 = a^2+b^2$ tenemos que $c = \sqrt{6}$ y por tanto $F_1 = (\sqrt{6},0)$ y $F_2 = (-\sqrt{6},0)$. Sus rectas asíntotas son: $y = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$.

La hipérbola conjugada tiene ecuación
$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = -1 \iff \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{4} = 1$$
que tiene su eje transversal sobre el eje Y y sus focos tienen coordenadas $F_1 = (0,\sqrt{6})$ y $F_2 = (0,-\sqrt{6})$. Sus rectas asíntotas son: $x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}y$.

Definición 4.6.9 La parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que están a igual distancia de una recta fija L, y de un punto fijo F.

Ecuación de la parábola

Ubicando los ejes coordenados como en la figura 2. 4.13, consideremos un punto cualquiera $P(x,y)$ de la parábola, llamemos $p = \overline{AF}$, entonces F tiene coordenadas $\left(\dfrac{p}{2},0\right)$. En virtud de la definición de parábola tenemos:
$$\begin{aligned} \overline{PQ}^2 &= \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 \\ \overline{PF}^2 &= y^2 + (x-\frac{p}{2})^2 \end{aligned}$$

por definición de la parábola $\overline{PQ} = \overline{PF}$, de donde obtenemos
$$(x+\frac{p}{2})^2 = y^2 + (x-\frac{p}{2})^2$$
que reducida es:
$$y^2 = 2px \tag{4.38}$$
Para la parábola de ecuación (4.38) tenemos que:

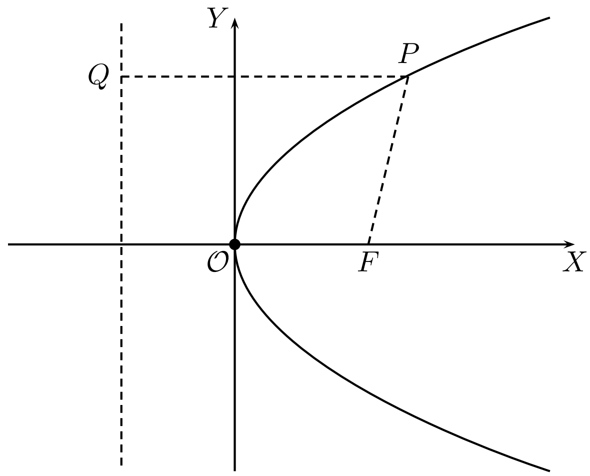


Figura 4.45: Parábola

(i) El punto $O = (0,0)$ se llama **vértice** , el punto $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$, con $p > 0$, se llama **foco** de la parábola y la recta $x = -\frac{p}{2}$ se llama **directriz**.

Ejemplo 4.6.10 (i) La ecuación

$$y^2 = 13x$$

representa una parábola que tiene su vértice en el origen $(0,0)$, su foco en $(\frac{13}{4}, 0)$ y su directriz es la recta $x = -\frac{13}{4}$. Su gráfico es simétrico con respecto al semieje positivo de las x.

(ii) La ecuación

$$y^2 = -13x$$

representa una parábola que tiene su vértice en el origen $(0,0)$, su foco en $(-\frac{13}{4}, 0)$ y su directriz es la recta $x = \frac{13}{4}$. Su gráfico es simétrico con respecto al semieje negativo de las x.

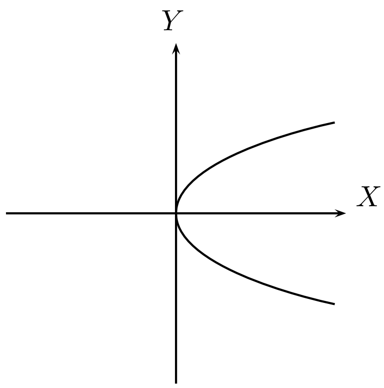


Figura 4.46: $y^2 = 13x$

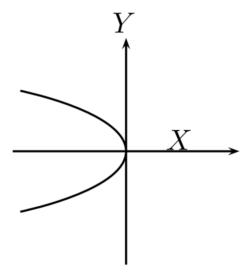


Figura 4.47: $y^2 = -13x$

(iii) La ecuación

$$x^2 = 13y$$

representa una parábola con vértice en el origen, foco en $(0, \frac{13}{4})$ y directriz $y = -\frac{13}{4}$. Su gráfico es simétrico con respecto al semieje positivo de las y.

(iv) La ecuación

$$x^2 = -13y$$

representa una parábola con vértice en el origen, foco en $(0, -\frac{13}{4})$ y directriz $y = \frac{13}{4}$. Su gráfico es simétrico con respecto al semieje negativo de las y.

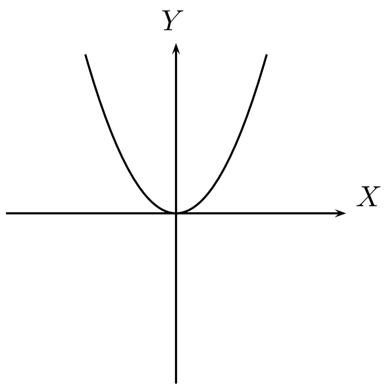


Figura 4.48: $x^2 = 13y$

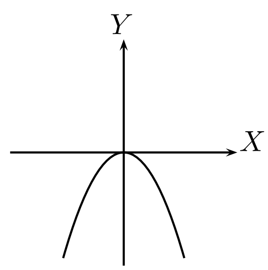


Figura 4.49: $x^2 = -13y$

Comentarios

(i) la circunferencia es un caso particular de la elipse, tomando $a = b$.

(ii) La elipse, la parábola y la hipérbola se llaman **cónicas** pues se obtienen de la intersección de un plano con uno o dos conos.

(iii) Las secciones cónicas fueron estudiadas por **Apolonio** (260 - 200 a.C.). Su estudio fue geométrico y muy completo, tanto que fue usado por **Kepler** (1571-1630), unos dos mil años después, en el establecimiento de sus famosas leyes.

(iv) Aparte de las órbitas de los planetas, las elipses se aplican a ciertos problemas técnicos como la elipse de inercia utilizada en resistencia de materiales.

(v) Fue **Galileo** (1564-1642), quien estableció que una piedra lanzada al aire describe una parábola, lo cual fue aplicado al estudio de la trayectoria que sigue una bala disparada por un cañón. La propiedad de la tangente a una parábola fue usada en la construcción de los telescopios reflectantes, como el inventado por **Newton** (1642-1727). Esto también se usa para los grandes proyectores de seguimiento.

Directrices y excentricidad

Toda curva de segundo grado puede ser considerada como el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a un punto fijo y a una recta fija están en una relación constante. El punto recibe el nombre de **foco** y la recta fija se llama **directriz** , la relación constante se llama **excentricidad** (e). En el caso que haya dos focos, a cada uno le corresponde una directriz.

Si $e < 1$ se tiene una elipse, si $e > 1$ es una hipérbola, en el caso que $e = 1$ se trata de una parábola.

- En la **elipse**, las directrices son: $x = \dfrac{a^2}{c}$ que corresponde al foco $(c, 0)$ y $x = -\dfrac{a^2}{c}$ que corresponde al foco $(-c, 0)$.

  Por otro lado, la excentricidad es $e = \frac{c}{a}$, como $c < a$, entonces $e < 1$ y se puede ver que los puntos de la elipse estan más cerca de cada foco que de la directriz correspondiente.

- En la **circunferencia** los ejes son iguales, la excentricidad es nula, los focos se confunden con el centro y las directrices están a una distancia infinita.

- Las directrices de la **hipérbola** son las rectas: $x = \frac{a^2}{c}$ correspondiente al foco $(c, 0)$ y $x = -\frac{a^2}{c}$ correspondiente al foco $(-c, 0)$.

  Como $c > a$, la distancia $\dfrac{a^2}{c}$ es menor que a, las dos directrices están situadas entre los vértices $(a, 0)$ y $(-a, 0)$.

  Su excentricidad es $e = \dfrac{c}{a}$. Como $c > a$ se tiene $e > 1$, entonces los puntos de la curva están más cerca de la directriz que del foco. Es la situación inversa a la de la elipse.

- En la **parábola** la directriz tiene ecuación $x = -\frac{p}{2}$ y por su misma definición los puntos de la curva están a igual distancia de la directriz que del foco, y por tanto $e = 1$.

Las ecuaciones que hemos deducido de las secciones cónicas se llaman, por su simplicidad, **formas canónicas**.
En general tenemos el siguiente cuadro de formas canónicas de segundo grado, donde a, b y p son constantes distintas de cero:

Cuadro 1

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$: **Elipse**.
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$: **Elipse imaginaria**.
3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$: **Punto**. Par de rectas imaginarias que se cortan en un punto real.
4. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$: **Hipérbola**.
5. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$: **Par de rectas** que se cortan.
6. $y^2 - 2px = 0$: **Parábola**.
7. $x^2 - a^2 = 0$: **Par de rectas paralelas**.
8. $x^2 + y^2 = 0$: **Par de rectas paralelas imaginarias**.
9. $x^2 = 0$: **Par de rectas coincidentes**.

Hasta aquí hemos visto que las secciones cónicas están representadas por ecuaciones de segundo grado bastante simples, cuya simplicidad en parte se debe a la elección del sistema de coordenadas. Pero no siempre encontraremos las curvas ubicadas de manera tan ideal. Una primera generalización de estas ecuaciones se tiene cuando el centro de la curva no coincide con el origen.

Traslación de los ejes de coordenadas

Sea XY un sistema de coordenadas rectangulares y $X'Y'$ el sistema obtenido por traslación paralela de los ejes iniciales.
El nuevo origen O' tiene coordenadas (h, k) con respecto al sistema original. Sea P un punto del plano con coordenadas (x, y) y (x', y'), queremos establecer una relación entre las coordenadas. Es fácil deducir de la figura que:

$$x' = x - h$$

$$y' = y - k$$

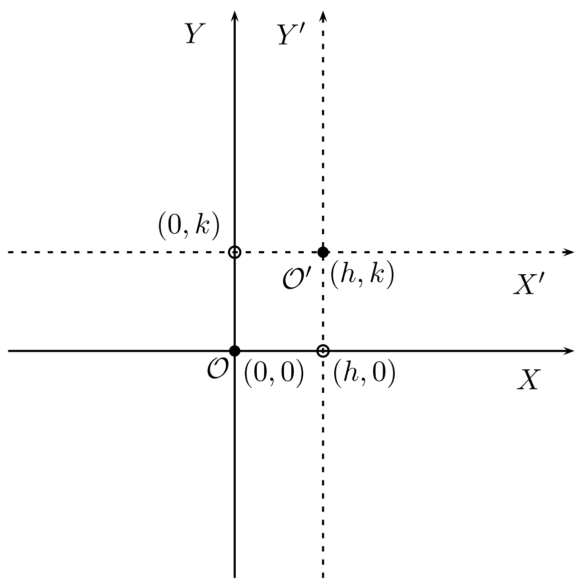


Figura 4.50: Traslación de ejes

de donde se tiene:

$$x = x' + h$$
$$y = y' + k$$

- Siempre es posible encontrar una traslación de los ejes de modo que toda recta pase por el nuevo origen del sistema. Si la recta tiene ecuación $y = ax + b$, la podemos escribir como $y - b = ax$. Esto sugiere la idea de elegir el nuevo origen en $O' = (0, b)$ y su ecuación en el nuevo sistema es:

  $$y' = ax'$$

  que corresponde a una recta que pasa por el origen.

-] Si tenemos una circunferencia con ecuación $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Eligiendo el nuevo origen en el punto $O' = (a, b)$, la ecuación en el nuevo sistema es:

  $$(x')^2 + (y')^2 = r^2$$

  que representa una circunferencia centrada en el origen O'.

- Usando una traslación de ejes podemos reescribir el cuadro de las nueve formas canónicas, encontrando ecuaciones en que aparecen ahora las variables en primer grado, por ejemplo, la ecuación
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}-1=0$$
representa una elipse con centro en (h,k), pero en general la encontraremos en la forma $b^2x^2-2b^2hx+b^2h^2+a^2y^2-2a^2ky+a^2k^2-a^2b^2=0$ y mediante operaciones algebraicas, completación de cuadrados, se puede llegar a la forma canónica trasladada.

Ejemplo

1. La ecuación $x^2+2\sqrt{2}x+y^2-2y-1=0$ representa un círculo con centro en el punto $(-\sqrt{2},1)$ y radio $r=2$. Pues al completar los cuadrados en x y en y, nos queda:
$$(x^2+2\sqrt{2}x+2)+(y^2-2y+1)=1+2+1\ ,$$
es decir,
$$(x+\sqrt{2})^2+(y-1)^2=4\ .$$
2. La ecuación $16x^2-96x+9y^2+90y+225=0$ representa una elipse. En efecto, la ecuación puede transformarse de la siguiente manera:
$$\begin{aligned}16(x^2-6x)+9(y^2+10y)+225 &= 0\\ 16(x^2-6x+9)+9(y^2+10y+25)+225 &= 144+225\\ 16(x-3)^2+9(y+5)^2 &= 144\\ \frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+5)^2}{16} &= 1\end{aligned}$$
Por tanto la ecuación representa una elipse con centro en el punto $(3,-5)$. Como $a=3$ y $b=4$, su eje mayor, donde se encuentran sus focos, es paralelo al eje Y. $c^2=b^2-a^2$ implica que $c=\sqrt{7}$, por tanto las coordenadas de los focos son: $(3,-5+\sqrt{7}),(3,-5-\sqrt{7})$.
3. Con cálculos similares puede demostrarse que la ecuación $3x^2-16y^2-6x+64y-13=0$ representa la hipérbola
$$\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{3}=1\ .$$

4. La ecuación $3x^2-6x+2-y=0$ representa una parábola. Completando el cuadrado en x nos queda:

$$\begin{aligned} 3(x^2-2x+1)+2 &= y+3 \\ 3(x-1)^2 &= y+1 \\ 3(x')^2 &= y' \end{aligned}$$

Considerando la traslación: $x' = x-1$ y $y' = y+1$, por lo cual el vértice de la parábola está en el punto $(1,-1)$ y se abre hacia arriba.

Rotación de los ejes coordenados

Una rotación de los ejes consiste en girar los ejes X e Y en sentido contrario a los punteros del reloj en un ángulo ϕ manteniendo fijo el origen. El siguiente teorema nos dice cómo se relacionan las coordenadas de un mismo punto antes y después de la rotación.

Teorema 4.6.11 Las ecuaciones que describen una rotación de ejes son:

$$(R) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& x'\cos\phi - y'\operatorname{sen}\phi \\ y &=& x'\operatorname{sen}\phi + y'\cos\phi \end{array} \right.$$

o equivalentemente,

$$(R') \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& x\cos\phi + y\operatorname{sen}\phi \\ y' &=& -x\operatorname{sen}\phi + y\cos\phi \end{array} \right.$$

Demostración:
De la figura 4.51 tenemos que:

$$x = \overline{OA} = \overline{OP}\cos(\phi+\alpha)$$

$$y = \overline{AP} = \overline{OP}\operatorname{sen}(\phi+\alpha)$$

como

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\phi+\alpha) &= \operatorname{sen}\phi\cos\alpha + \cos\phi\operatorname{sen}\alpha \\ \cos(\phi+\alpha) &= \cos\phi\cos\alpha - \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\alpha \end{aligned}$$

Así,

$$x = \overline{OP}(\cos\phi\cos\alpha - \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\alpha) \qquad (*)$$

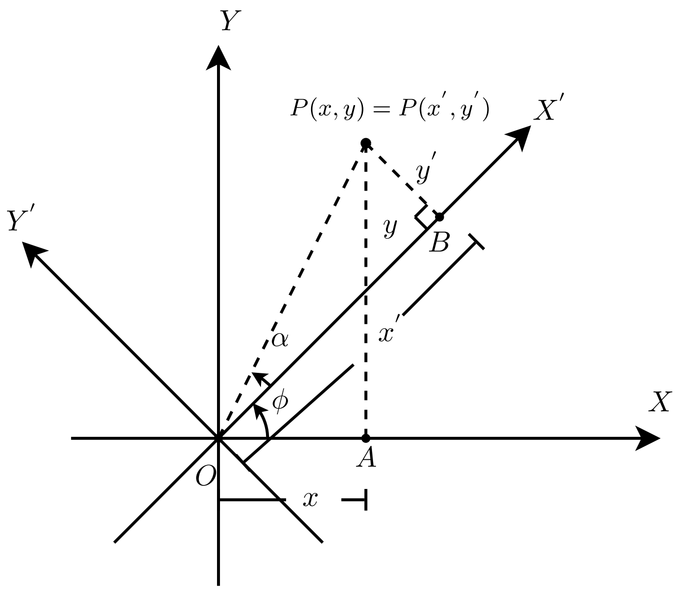


Figura 4.51: Rotación de ejes

$$y = \overline{OP}(\operatorname{sen}\phi\cos\alpha + \cos\phi\operatorname{sen}\alpha) \qquad (**)$$

Del triángulo OBP podemos deducir que $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{y'}{\overline{OP}}$; y $\cos\alpha = \dfrac{x'}{\overline{OP}}$. Es decir,

$$\left.\begin{array}{rcl} y' &=& \overline{OP}\operatorname{sen}\alpha \\ x' &=& \overline{OP}\cos\alpha \end{array}\right\} \qquad (***)$$

reemplazando $(***)$ en $(*)$ y $(**)$ se obtiene la ecuación (R). $\square$

Para conocer la ecuación de una curva $F(x, y) = 0$ después de una rotación de los ejes en un ángulo ϕ, debemos reemplazar x e y por las expresiones respectivas de (R) obteniendo una ecuación de la forma $F(x'\cos\phi - y'\operatorname{sen}\phi, x'\operatorname{sen}\phi + y'\cos\phi) = 0$.

Observemos que las ecuaciones (R) y (R') son de primer grado, así la ecuación de la curva en x', y' también es de segundo grado. Además usando la fórmula del cuadrado del binomio, es fácil deducir que en este caso x, y o x', y' aparecen en la ecuación formando productos mixtos.

Ejemplo Si hacemos una rotación de los ejes en un ángulo $\phi = \dfrac{\pi}{4}$, tenemos que x, y satisfecen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \end{aligned}$$

Entonces una parábola del tipo $y = 4x^2$ se transforma en

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' = 4(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y')^2 \ .$$

Lo que nos da la ecuación en x' e y':

$$4(x')^2 + 4(y')^2 - 8x'y' - \sqrt{2}x' - \sqrt{2}y' = 0 \ .$$

Observe que una rotación de ejes complica la forma de las ecuaciones.

La ecuación general de segundo grado

Veremos ahora que mediante rotaciones y traslaciones paralelas de los ejes, toda ecuación de segundo grado puede ser reducida a una de las nueve formas canónicas.

Teorema 4.6.12 La ecuación:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{4.39}$$

representa una de las nueve formas canónicas del cuadro 1.

Demostración: **Primer paso:** Haciendo una rotación apropiada de ejes podemos hacer desaparecer el término mixto, es decir, queremos obtener una ecuación de la forma:

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \ ,$$

donde el coeficiente B' que acompaña al producto $x'y'$ sea nulo. Para ello usaremos la fórmula (R) en (4.39), lo que nos da:
$A(x' \cos\phi - y' \operatorname{sen}\phi)^2 + B(x' \cos\phi - y' \operatorname{sen}\phi)(x' \operatorname{sen}\phi + y' \cos\phi) + C(x' \operatorname{sen}\phi + y' \cos\phi)^2 +$
$D(x' \cos\phi - y' \operatorname{sen}\phi) + E(x' \operatorname{sen}\phi + y' \cos\phi) + F = 0$
Desarrollando los productos y reduciendo los términos semejantes obtenemos que:

$$\begin{aligned} B' &= -2A \operatorname{sen}\phi \cos\phi + B(\cos^2\phi - \operatorname{sen}^2\phi) + 2C \operatorname{sen}\phi \cos\phi \\ &= B\cos(2\phi) - (A - C)\operatorname{sen}(2\phi) \end{aligned}$$

Igualando $B' = 0$, tenemos que

$$\text{cotan}\,(2\phi) = \frac{A-C}{B} \tag{4.40}$$

como el recorrido de la función cotangente es $\mathbb{R}$, existe ϕ tal que la ecuación (4.40) se satisface.

Segundo paso: Tenemos una ecuación de la forma:

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0. \tag{4.41}$$

Como hemos visto, para hacer desaparecer los términos en primer grado es necesario completar los cuadrados en x e y para hacer una traslación apropiada de ejes:

1. Si $A' \neq 0$ y $C' \neq 0$, se tiene:

   $$A'(x'^2 + \frac{D'}{A'}x' + \left(\frac{D'}{2A'}\right)^2) + C'(y'^2 + \frac{E'}{C'}y' + \left(\frac{E'}{2C'}\right)^2 + F' - \frac{D'^2}{4A'^2} - \frac{E'^2}{4C'^2} = 0$$

   $$A'(x' + \frac{D'}{2A'})^2 + C'(y' + \frac{E'}{2C'})^2 + (F' - \frac{D'^2}{4A'^2} - \frac{E'^2}{4C'^2}) = 0$$

   elegimos la traslación:

   $$x'' = x' + \frac{D'}{2A'}$$

   $$y'' = y' + \frac{E'}{2C'}$$

   y haciendo $F'' = F' - (\frac{D'}{2A'})^2 - (\frac{E'}{2C'})^2$ y hagamos un cambio de notación $F' = F''$, resulta:

   $$A'(x'')^2 + C'(y'')^2 + F' = 0$$

   Si además $F' \neq 0$, podemos escribir:

   $$\frac{(x'')^2}{\frac{-F'}{A'}} + \frac{(y'')^2}{\frac{-F'}{C'}} - 1 = 0$$

   es decir, corresponde a una ecuación del tipo (1), (2) ó (4), según sean los signos de A', C' y F'.

Si $F' = 0$ tenemos:

$$\frac{(x'')^2}{\frac{1}{A'}} + \frac{(y'')^2}{\frac{1}{C'}} = 0$$

obtenemos una ecuación del tipo (3) o (5) dependiendo nuevamente de los signos de A' y C'.

2. Si $A' \neq 0$ y $C' = 0$, pero $E' \neq 0$ se tiene:

$$A'\left(x' + \frac{D'}{2A'}\right)^2 + E'\left(y' + \frac{F'}{E'}\right) = 0$$

con la traslación

$$x'' = x' + \frac{D'}{2A'}$$
$$y'' = y' + \frac{F'}{E'}$$

obtenemos la ecuación $A'(x'')^2 + E'(y'') = 0$, dividiendo por A'

$$(x'')^2 + \frac{E'}{A'}y'' = 0$$

que corresponde a una ecuación del tipo (6) y representa una parábola en torno al eje Y.

3. Si $A' = 0$, $C' \neq 0$, $D' \neq 0$, intercambiando los roles de x e y se obtiene el mismo resultado, es decir, la ecuación representa una parábola.

4. Si $A' \neq 0$, $C' = 0$ y $E' = 0$, la ecuación (4.41) puede escribirse: $A'(x' + \frac{D'}{2A'})^2 + F' = 0$. Haciendo:

$$x'' = x' + \frac{D'}{2A'}$$
$$y'' = y$$

la ecuación queda $A'(x'')^2 + F' = 0$, de donde, dividiendo por A':

$$(x'')^2 + \frac{F'}{A'} = 0$$

que corresponde a una ecuación del tipo (7), (8) o (9).

5. Se obtiene el mismo resultado de (4), intercambiando los roles de x e y cuando $A' = 0$, $C' \neq 0$ y $D' = 0$.

Así hemos visto que toda ecuación de segundo grado puede reducirse a una de las formas canónicas de nuestro cuadro. □

Clasificación de la curvas de segundo grado según los coeficientes de la ecuación

La ecuación:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{4.42}$$

la podemos resolver como una ecuación de segundo grado con respecto a y, suponiendo que $C \neq 0$. Entonces,

$$y = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{(B^2-4AC)x^2 + 2(BE-2CD)x + (E^2-4CF)} \tag{4.43}$$

Es decir $y = -\dfrac{Bx+E}{2C} \pm Y$; donde $Y = \frac{1}{2C}\sqrt{(B^2-4AC)x^2 + 2(BE-2CD)x + (E^2-4CF)}$. Según los valores que pueda tomar Y, veremos qué tipo de curva representa la ecuación (4.42), trazando la recta $y = -\dfrac{Bx+E}{2C}$ y aumentándola o disminuyéndola según los valores que toma Y. Observemos primero que el número Y se debe restar y sumar a la recta en cada x, por lo cual el gráfico de la curva es simétrico con respecto a la recta $y = -\dfrac{Bx+E}{2C}$. Por esta razón dicha recta puede ser considerada el **diámetro** de la curva.

Analizaremos algebraicamente la forma que toma la curva según el signo del coeficiente del trinomio de segundo grado en x que aparece bajo el signo de la raíz.

1. Si $B^2 - 4AC < 0$, entonces el trinomio bajo el radical es negativo para los valores de $\mid x \mid \leq M$, para algún $M \in \mathbb{R}^+$. Además si $\mid x \mid \leq M$, entonces Y es acotado y así también y permanece acotado. Vemos así que la curva y es acotada en todos los sentidos y por tanto representa una elipse.

2. Si $B^2 - 4AC > 0$, tenemos que el trinomio bajo el radical representa un número real cuando $\mid x \mid \geq M$, para algún $M \in \mathbb{R}^+$; como ahora x puede crecer o decrecer en forma indefinida, los valores de Y, y por tanto de la curva y, crecen hacia $+\infty$ o decrecen hacia $-\infty$. La curva que crece indefinidamente en ambos sentidos, tanto para la variable x como para la variable y es una hipérbola.

3. Si $B^2 - 4AC = 0$, entonces $Y = \frac{1}{2C}\sqrt{2(BE-2CD)x + (E^2-4CF)}$.

   Si además $BE - 2CD > 0$, el binomio bajo la raíz es positivo si $x \geq M$, donde M es la raíz de la ecuación de primer grado en x. Es decir, x puede crecer hacia infinito y proporcionalmente crece también Y. Entonces tenemos que y crece hacia el lado de los x positivos indefinidamente a ambos lados del diámetro.

Si $BE - 2CD < 0$, se tiene un resultado del mismo tipo, pero hacia el lado de los x negativos.

El análisis nos permite concluir que y es una curva acotada en una dirección y no acotada en la dirección opuesta, por tanto y representa una parábola.

Ejemplo. Dada la ecuación

$$2x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x - 8y + 9 = 0$$

se tiene

$$y = \frac{1}{2}x + 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{-(x-1)(x-5)}$$

Por tanto, la curva tiene por diámetro a la recta $y = \frac{1}{2}x + 1$ y está comprendida entre las rectas $x = 1$ y la recta $x = 5$. El valor más grande de y se obtiene en el punto medio, es decir, para $x = 3$, al que le corresponden los valores $y = \frac{3}{2}$ e $y = \frac{7}{2}$. El punto medio de estos nos da la ordenada del centro de la elipse 5. Así el centro de la curva es el punto $(3, 5)$.

Algunas curvas de grado mayor que dos

En esta subsectión presentaremos un par de casos de curvas de grado superior a dos en alguna de sus variables. Usando la geometría analítica podemos , a partir de sus definición como legar geométrico, tal como hicimos con las curvas de grado dos, obtener la ecuación algebraica que satisfacen dichos puntos.

1. **La cisoide**

   Dada una circunferencia C y una tangente a ella, sea A el punto de contacto y O el punto diametralmente opuesto. Se hace pasar una secante por O que corta a la circunferencia en un punto I y a la recta tangente en el punto B. Sobre esta secante, a partir del punto O, se toma una longitud $\overline{OM}$, igual a $\overline{IB}$. ¿ Cuál es el lugar geométrico de los puntos M así obtenidos ?

   Solución: Observemos que este lugar geométrico es simétrico respecto a $\overline{OA}$. La distancia $\overline{IB}$ aumenta a medida que la secante se aleja de $\overline{OA}$, y por tanto también crece $\overline{OM}$. El punto M se aleja al infinito cuando la secante $\overline{OB}$ se convierte en tangente en O.

   Sean (x, y) las coordenadas de M. Tenemos $\overline{OP} = x$, $\overline{MP} = y$ y $\overline{OA} = a$. Por semejanza de triángulos, se tiene

$$\frac{\overline{MP}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{IQ}}{\overline{OQ}}$$

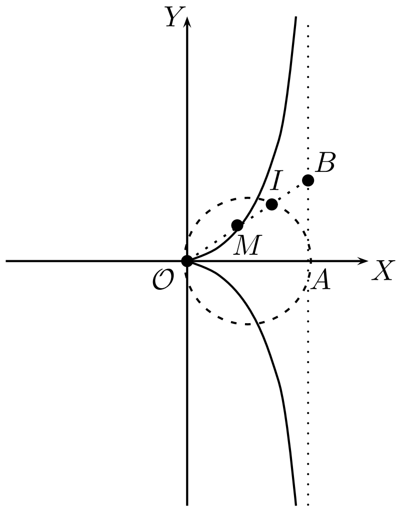


Figura 4.52: Cisoide

es decir:

$$\frac{y}{x} = \frac{\overline{IQ}}{\overline{OQ}}$$

$\overline{OM} = \overline{IB}$, $\qquad \overline{OP} = \overline{AQ}$, por tanto: $\overline{OQ} = \overline{OA} - \overline{AQ} = \overline{OA} - \overline{OP} = a - x$, así:

$$\frac{y}{x} = \frac{\overline{IQ}}{a-x}$$

pero $\overline{IQ}^2 = \overline{OQ}\ \overline{AQ} = (a-x)x$, luego:

$$\begin{aligned} y &= \frac{x\overline{IQ}}{a-x} \\ y^2 &= \frac{x^2(a-x)x}{(a-x)^2} \\ y^2 &= \frac{x^3}{a-x} \qquad (4.44) \end{aligned}$$

la expresión (4.44) representa la ecuación de la **cisoide**.

Observe que esta curva tiene una ecuación de tercer grado.

2. **Lemniscata de Bernoulli**
   Encuentre el lugar geométrico de los puntos tales que el producto de sus distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 sea igual a una constante dada.

Solución: Tomando la recta que contiene a los puntos F_1 y F_2 como eje X, pasando el eje Y por el punto medio del trazo $\overline{F_1F_2}$, llamaremos $2c = \overline{F_1F_2}$ y a^2 a la constante. Sea $P = (x, y)$ un punto del lugar geométrico, entonces,

$$d(F_1, P) \cdot d(F_2, P) = a^2 \iff \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2$$

Elevando al cuadrado toda la ecuación y desarrollando los productos, nos queda la ecuación de cuarto grado en y:

$$y^4 + 2(x^2 + c^2)y^2 + (x^2 - c^2)^2 - a^4 = 0. \qquad (4.45)$$

Como las dos variables aparecen en potencias pares, la curva es simétrica con respecto a ambos ejes y el origen.

$$y^2 = \frac{-2(x^2 + c^2) \pm \sqrt{4(x^2 + c^2)^2 - 4[(x^2 - c^2)^2 - a^4]}}{2}$$

La cantidad subradical se reduce a $4(4c^2x^2 + a^4)$ que es siempre positiva, entonces y^2 existe como número real.

Si $(x^2 - c^2)^2 - a^4$ es positivo, los valores de y^2 tienen el mismo signo y como su suma es $-2(x^2 + c^2)$, entonces los dos valores de y^2 son

negativos y por tanto los cuatro valores de y son complejos.

Para que la ecuación tenga raíces reales, es necesario que:

$$(x^2 - c^2)^2 - a^4 < 0$$

lo que es equivalente a

$$(x^2 - c^2 - a^2)(x^2 - c^2 + a^2) < 0$$

por lo tanto,

$$x^2 < a^2 + c^2 \quad \text{y} \quad x^2 > c^2 - a^2$$

entonces uno de los valores de y^2 es positivo y el otro negativo.

Ahora tenemos que analizar los tres casos posibles: $a < c$, $a = c$, $a > c$.

Veremos solamente el caso $a = c$. Los otros se dejarán como ejercicios.

Cuando $a = c$, la ecuación se escribe como:

$$y^4 + 2(x^2 + c^2)y^2 + (x^2 - c^2) - c^4 = 0 \; .$$

Si $x = 0$, entonces $y^4 + 2c^2y^2 = 0$, por lo cual sólo es posible que $y = 0$.

Si $x = c\sqrt{2}$ entonces $y^4 + 6c^2y^2 = 0$, por tanto, nuevamente y debe ser igual a 0.

Como las dos variables aparecen en potencias pares, existe simetría con respecto a ambos ejes. La curva resultante se llama **lemniscata de Bernoulli** que está representada en la figura 2.6.19.

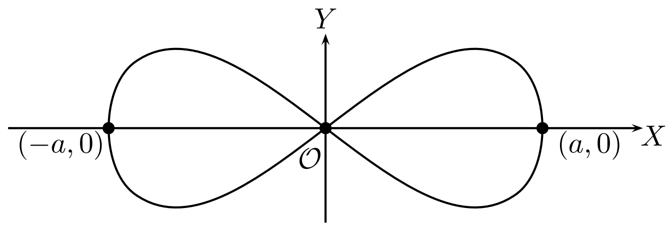


Figura 4.53: Lemniscata de Bernoulli

Ejercicios resueltos

1. Determine el lugar geométrico de los puntos del plano de coordenadas (x, y) tales que $|x| + |y| = 1$.

   Solución:

   - Si $x \geq 0, y \geq 0$, entonces $|x| + |y| = x + y = 1$. implica $y = 1 - x$.
   - Si $x \leq 0, y \geq 0$, entonces $|x| + |y| = -x + y = 1$. implica $y = 1 + x$.
   - Si $x \leq 0, y \leq 0$, entonces $|x| + |y| = -x - y = 1$. implica $y = -1 - x$.
   - Si $x \geq 0, y \leq 0$, entonces $|x| + |y| = x - y = 1$. implica $y = x - 1$.

   En consecuencia los puntos cuyas coordenadas satisfacen $|x|+|y| = 1$, es el cuadrado con vértices en $(1, 0),\ (0, 1),\ (-1, 0),\ (0, -1)$.

2. **Resolución geométrica de un sistema de ecuaciones de primer grado o lineales**.

   Demuestre que el conjunto de las soluciones del sistema

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned}$$

   donde a, b por un lado y a', b' por otro no se anulan simultáneamente, es el conjunto de los puntos de intersección de las dos rectas de ecuaciones:

$$ax + by - c = 0\ ,\ a'x + b'y - c' = 0.$$

   Solución:

   Es una aplicación directa de lo dicho en la subsección 4.6.1 sobre intersección de curvas y del hecho que una ecuación de la forma $ax + by - c = 0$, en que a y b no se anulan al mismo tiempo, es una línea recta.

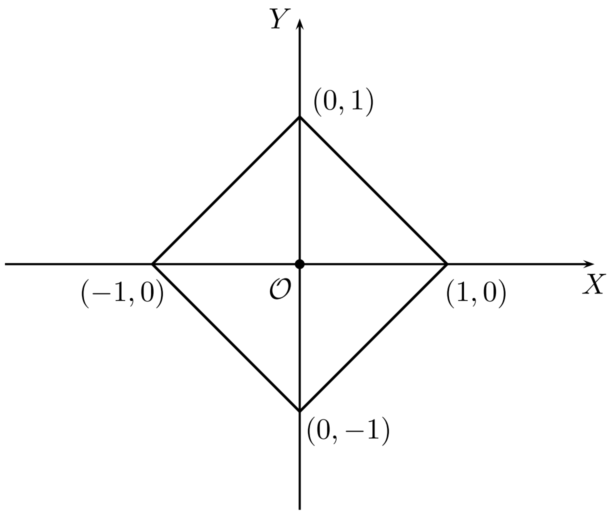


Figura 4.54:

En particular el sistema tiene una única solución si las rectas no son paralelas, es decir, cuando $\frac{a}{b} \neq \frac{a'}{b'}$. El sistema no tiene solución si las rectas son paralelas, es decir, cuando $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, con $a \neq a'$, $b \neq b'$. El sistema tiene infinitas soluciones cuando ambas rectas son iguales.

3. **Distancia de un punto a una recta**

Dado un punto P y una recta L, encontrar la distancia de P a L.

Solución:

Si el punto P pertenece a la recta, entonces la distancia es cero. Por lo cual supondremos que P no es un punto de la recta L. Geométricamente la distancia es el trazo de la perpendicular trazada desde P hasta la recta L.

Sean $ax + by + c = 0$ la ecuación de la recta L, (x_0, y_0) las coordenadas del punto P y (x^*, y^*) las coordenadas de Q, punto de intersección entre la recta L y la recta ortogonal a L que pasa por P. Así tenemos que

$$d = \overline{PQ} = \sqrt{(x_0 - x^*)^2 + (y_0 - y^*)^2}.$$

Para poder calcular d debemos encontrar las coordenadas de Q, lo que nos lleva a encontrar la ecuación de la recta que pasa por P y que es perpendicular a L.

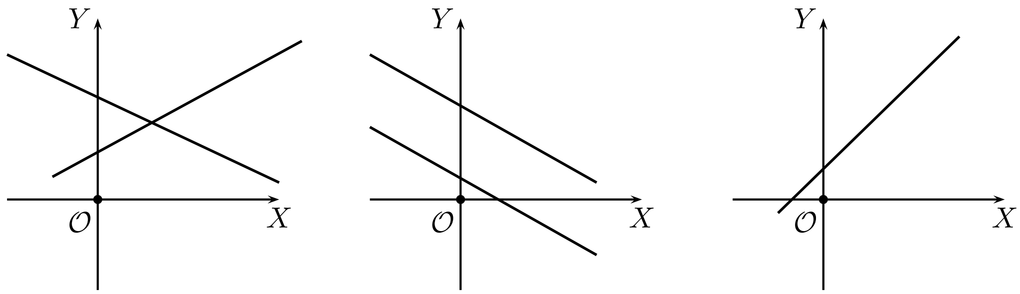


Figura 4.55:

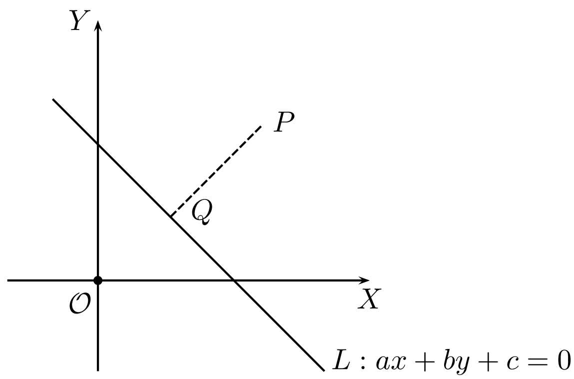


Figura 4.56: Distancia desde un punto a una recta

Como L tiene pendiente $-\dfrac{a}{b}$, la ecuación de la recta perpendicular a L es:

$$y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0).$$

La que también puede escribirse como

$$ay - bx = ay_0 - bx_0.$$

según el ejercicio resuelto 2, el punto Q es la intersección de las dos rectas y, por tanto, tiene por coordenadas la solución del sistema:

$$\begin{aligned} ay - bx &= ay_0 - bx_0 \\ by + ax &= -c. \end{aligned}$$

Cuya resolución algebraica nos da los valores:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2+b^2} \\ y^* &= \frac{-abx_0 + a^2y_0 - bc}{a^2+b^2} \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} (\overline{PQ})^2 &= (x_0 - x^*)^2 + (y_0 - y^*)^2 \\ &= \left[\frac{(a^2+b^2)x_0 - b^2x_0 + aby_0 + ac}{a^2+b^2}\right]^2 + \left[\frac{(a^2+b^2)y_0 - a^2y_0 + abx_0 + bc}{a^2+b^2}\right]^2 \\ &= \left[\frac{a^2x_0 + aby_0 + ac}{a^2+b^2}\right]^2 + \left[\frac{b^2y_0 + abx_0 + bc}{a^2+b^2}\right]^2 \\ &= \left[\frac{a(ax_0 + by_0 + c)}{a^2+b^2}\right]^2 + \left[\frac{b(ax_0 + by_0 + c)}{a^2+b^2}\right]^2 \\ &= \frac{a^2(ax_0 + by_0 + c)^2 + b^2(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2+b^2} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

4. Recuerde que la simetral de un triángulo es la perpendicular trazada en el punto medio de un lado. Demuestre que las tres simetrales de un triágulo concurren en un mismo punto que equidista de los tres vértices del triángulo, por lo que constituye el centro de la circunferencia circunscrita.

   Solución: Según la ecuación (4.28), la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Usando la ecuación (4.29), la recta perpendicular a ella tiene pendiente $-\dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$. Así la ecuación de la recta normal a la que pasa por P_1 y P_2 y que a su vez pasa por el punto medio del trazo $\overline{P_1P_2}$ es, usando la ecuación (4.29),

$$y - \frac{y_2 + y_1}{2} = \frac{x_2 - x_1}{y_1 - y_2}\left(x - \frac{x_2 + x_1}{2}\right) \tag{4.46}$$

Haciendo pasar uno de los ejes por un lado del triángulo, tenemos una situación como en la figura 4.57.

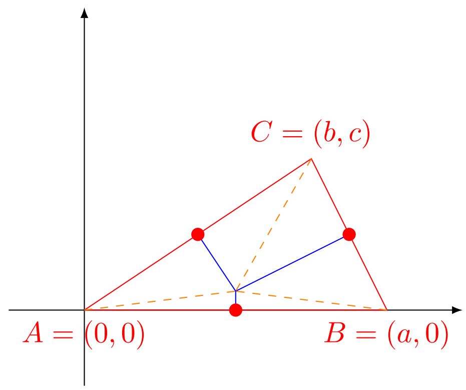


Figura 4.57: Simetrales de un triángulo

Los vértices del triángulo son $(0, 0)$, $(a, 0)$, (b, c). Usando (4.46) podemos encontrar la ecuación de cada una de las rectas que contienen a las medianas del triángulo. Sean: $M_1 = \left(\frac{a}{2}, 0\right)$, $M_2 = \left(\frac{(a+b)}{2}, \frac{c}{2}\right)$, $M_3 = \left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$, los puntos medios de cada lado.

Llamando L_i a la recta que pasa por M_i y es perpendicular al respectivo lado del triángulo, tenemos las siguientes ecuaciones:

$$L_1\colon \quad x = \frac{a}{2} \tag{4.47}$$

$$L_2\colon \quad y - \frac{c}{2} = \frac{b-a}{-c}(x - \frac{a+b}{2}) \tag{4.48}$$

$$L_3\colon \quad y - \frac{c}{2} = \frac{-b}{c}(x - \frac{b}{2}) \tag{4.49}$$

Trabajando algebraicamente las ecuaciones (9.2), (9.3), (9.9), tenemos:

$$L_1\colon \quad x = \frac{a}{2} \tag{4.50}$$

$$L_2\colon \quad 2(a-b)x - 2cy = a^2 - b^2 - c^2 \tag{4.51}$$

$$L_3\colon \quad 2bx + 2cy = b^2 + c^2 \tag{4.52}$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (9.26) y (4.52) obtenemos el punto

$$x = \frac{a}{2} \;\; ; \;\; y = \frac{b^2 + c^2 - ab}{2c}$$

Reemplazando estas coordenadas en la ecuación (4.51), podemos verificar con un cálculo simple que dicho punto también pertenece a la recta L_2.

Verificar que este punto equidista de los vértices del triángulo se deja al lector.

5. **Resolución gráfica de inecuaciones lineales con dos variables.**

   Sean a, b, c números reales fijos, a y b no se anulan simultáneamente.

   a) Demuestre que toda recta de ecuación $ax + by + c = 0$ divide al plano en dos semiplanos tales que la expresión $ax + by + c$ es positiva para las coordenadas de los puntos de uno de los semiplanos y es negativa para las coordenadas de los puntos del otro semiplano.

   b) Deduzca que el conjunto de las soluciones de la inecuación $ax + by < c$ (respectivamente $ax + by > c$) , es uno de los semiplanos limitados por la recta $ax + by + c = 0$.

   c) Deduzca que el conjunto de las soluciones de la inecuación $ax+by \leq c$ (respectivamente $ax+by \geq c$), es uno de los semiplanos incluyendo la recta $ax+by-c = 0$.

   d) Deduzca que el conjunto de las soluciones de un sistema de inecuaciones lineales en $\mathbb{R}^2$ es la intersección de los semiplanos que representan las soluciones de cada inecuación del sistema.

   Solución:

   a) Dado que $a, b, c \in \mathbb{R}, (x, y) \in \mathbb{R}^2$, por tricotomía la expresión $ax + by + c$ puede ser positiva, negativa o nula.

   Sabemos que $ax + by + c = 0$ si y sólo si x e y son las coordenadas de la recta $ax + by = -c$. Por tanto, los restantes puntos de $\mathbb{R}^2$ pueden hacer positiva o negativa la expresión $ax + by + c$.

   Consideremos un punto fuera de la recta $ax + by + c = 0$, supondremos $b > 0$, pues si no multiplicamos la ecuación de la recta por -1.

   Sea (x_0, z) un punto bajo la recta. Reemplazando x en la ecuación de la recta obtenemos el número $y_0 = -\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b}$. De la figura podemos ver claramente que $y_0 > z$. Así,

$$\begin{aligned} -\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b} &> z \\ -ax_0 - c &> bz, \quad \text{pues } b > 0 \\ -ax_0 - bz - c &> 0 \\ ax_0 + bz + c &< 0. \end{aligned}$$

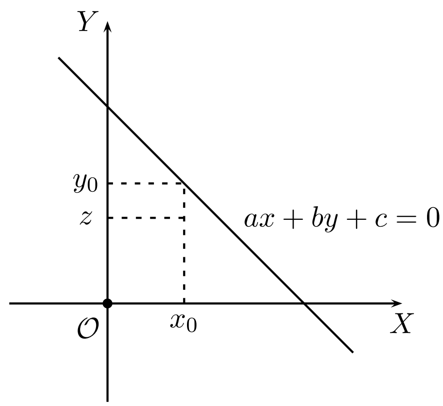


Figura 4.58:

b) Esto como los puntos siguientes son aplicaciones inmediatas de la parte (a) y de las propiedades elementales de los conjuntos.

6. Resuelva gráficamente el sistema

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 2 &\leq 0 \\ x + y - 1 &\leq 0. \end{aligned}$$

Solución:

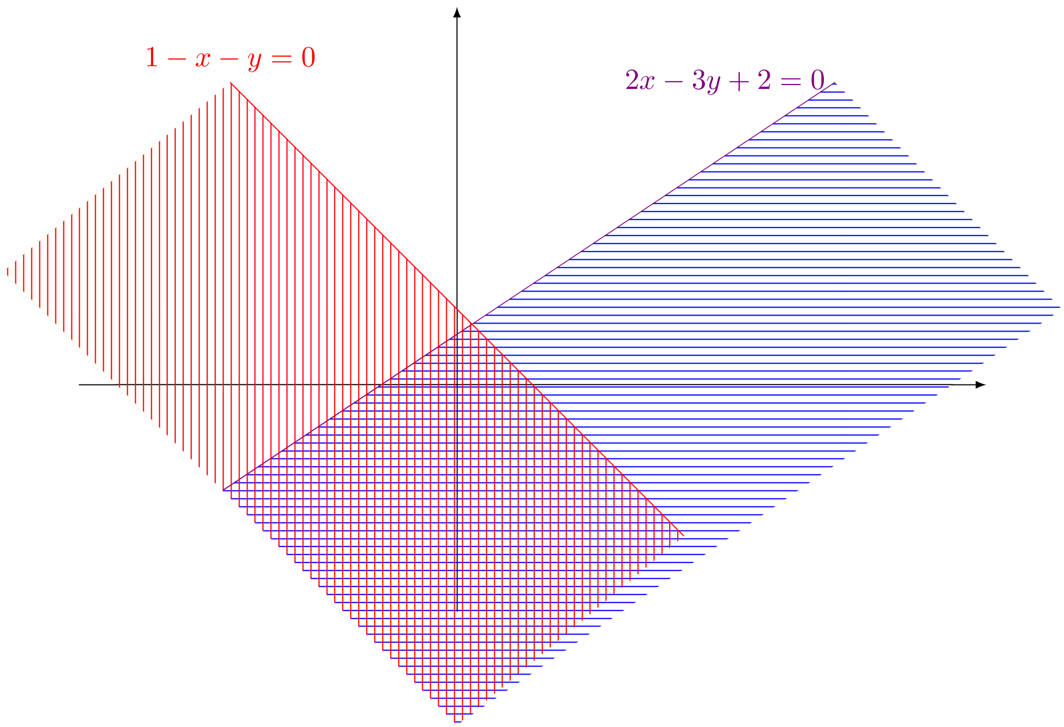


Figura 4.59:

Primero debemos graficar cada una de las rectas $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{2}{3}$, $y = 1-x$. La solución al sistema es la región común bajo ambas rectas tal como se muestra en la figura.

7. Una caja contiene monedas de 20 gramos y de 30 gramos.

   a) Escriba el sistema de inecuaciones que describe el peso total de las monedas que está comprendido estrictamente entre 300 y 330 gramos.

   b) Determine todos las posibles soluciones al problema.

   c) Determine gráficamente los puntos cuyas coordenadas enteras positivas verifican las hipótesis del problema.

Solución:

a) Sea x el número de monedas de 20 gramos y sea y el número de monedas de 30 gramos. Entonces, tenemos:

$$20x + 30y > 300$$
$$20x + 30y < 330.$$

Este sistema puede ser reducido a

$$2x + 3y > 30$$
$$2x + 3y < 33$$

b) Del gráfico se deduce que todas las posibles soluciones al problema es la región del primer cuadrante comprendida entre ambas rectas, sin incluirlas a ellas. las soluciones negativas no tienen sentido en el contexto del problema.

c) Del gráfico vemos que las soluciones con coordenadas enteras son: $(5,7),(8,5),(9,4),(11,3),(14,1)$.

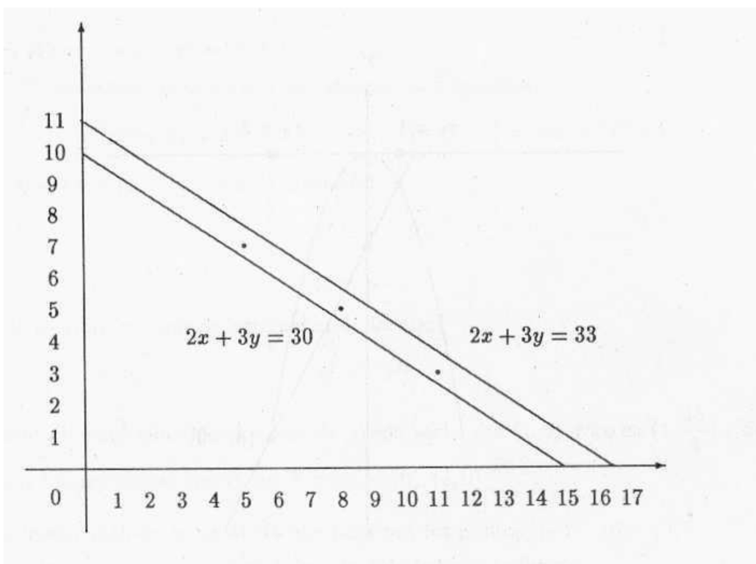


Figura 4.60:

8. **Resolución geométrica de una ecuación de segundo grado**

   a) Demuestre que las raíces de la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0,\ a \neq 0,\ x \in \mathbb{R}$, corresponden a los puntos de intersección de una parábola con una recta.

   b) Obtenga geométricamente las soluciones de la ecuación $-x^2+2x+3=0$.

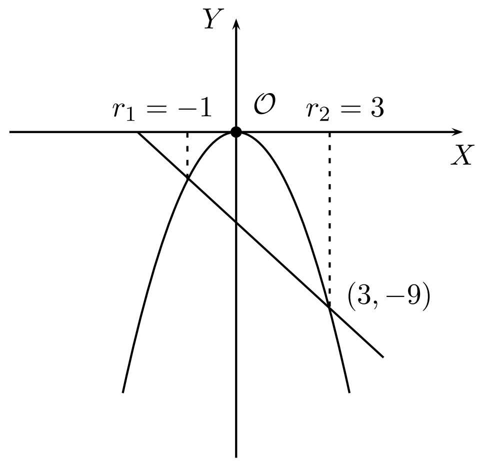


Figura 4.61:

Solución:

a) La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, puede ser escrita como

$$ax^2 = -bx - c,$$

por lo tanto, los puntos que satisfacen dicha relación pueden ser considerados, de acuerdo a lo dicho en la subsección 4.6.1, como la intersección de la parábola $y = ax^2$ con la recta $y = -bx - c$.

b) De acuerdo a lo visto en el item anterior, las soluciones de la ecuación $-x^2 + 2x + 3 = 0$ son los puntos de intersección de la parábola $y = -x^2$ y la recta $y = -2x - 3$.

9. **Estudio de la parábola** $y = ax^2 + bx + c$.

Demuestre que la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ representa una parábola. Encuentre su vértice, foco, directriz y los puntos de intersección con el eje X.

Solución: Completando el cuadrado de binomio en x podemos escribir:

$$y = ax^2 + bx + c = a\ \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] = a\ \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2\right] + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Haciendo la traslación de los ejes en la forma:

$$\begin{aligned} x' &= x + \frac{b}{2a} \\ y' &= y - \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

La ecuación puede escribirse como

$$y' = a(x')^2,$$

la cual representa una parábola con vértice en el nuevo origen O' cuyas coordenadas en el antiguo sistema son

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right).$$

Su directriz es la recta $y = \dfrac{4ac - a^2 - b^2}{4a}$, su foco es el punto $(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac + a^2 - b^2}{4a})$. La curva corta al eje X en los puntos $(\dfrac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0)$ si $b^2 - 4ac > 0$. Corta al eje X en un único punto $(\dfrac{b}{2a}, 0)$ si $b^2 - 4ac = 0$. No corta al eje X si $b^2 - 4ac < 0$.

10. Caracterice la curva $y = -x^2 + 2x + 3$.

    Solución: Completando el cuadrado de binomio en x tenemos:

    $$y = -x^2 + 2x + 3 = -[(x^2 - 2x + 1) - 3 - 1] = -(x - 1)^2 + 4.$$

    Por tanto, $y - 4 = -(x - 1)^2$. Así, la traslación

    $$x' = x - 1$$

    $$y' = y - 4$$

    nos permite escribir la ecuación original en la forma:

    $$y' = -x'^2,$$

    que representa la parábola abierta hacia abajo con vértice en $(1, 4)$, foco en $(1, \dfrac{15}{4})$ y directriz $y = \dfrac{17}{4}$. Sus intersecciones con el eje X son $(-1, 0), (3, 0)$.

11. Encuentre la ecuación de la parabola que pasa por los puntos $(-2, 16)$, $(0, 2)$ y $(1, 4)$.

Solución: Como la ecuación general de la parábola tiene la forma

$$y = ax^2 + bx + c,$$

ella está completamente determinada conociendo los valores de los coeficientes a, b, c. Para ello tenemos que si el punto (x, y) pertenece a la curva, entonces los números x, y, satisfacen la ecuación de la curva. Por lo tanto, tenemos tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} a(-2)^2 + b(-2) + c &= 16 \\ a0^2 + b0 + c &= 2 \\ a1^2 + b1 + c &= 4. \end{aligned}$$

Que se reducen al sistema:

$$\begin{aligned} 4a - 2b + c &= 16 \\ c &= 2 \\ a + b + c &= 4, \end{aligned}$$

Cuya solución es:

$$a = 3,\ b = -1,\ c = 2.$$

Así, la ecuación de la parábola es $y = 3x^2 - x + 2$

12. Encuentre la ecuación de un círculo que pasa por tres puntos dados.

    Solución: Si los tres puntos son colineales, entonces el problema no tiene solución.

    Sean $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_3 = (x_3, y_3)$, tres puntos del plano no colineales. Cómo encontrar el centro del círculo, lo hemos visto en el ejercicio 1. Pero también se puede hacer usando la ecuación de la circunferencia (4.30).

    Sea $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ la ecuación del círculo pedido, por tanto cada punto P_i satisface esta ecuación; así obtenemos el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas a, b, r.

$$\begin{aligned} (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 &= r^2 \\ (x_2 - a)^2 + (y_2 - b)^2 &= r^2 \\ (x_3 - a)^2 + (y_3 - b)^2 &= r^2 \end{aligned}$$

Desarrollando los cuadrados podemos escribir,

$$a^2 + b^2 - r^2 - 2x_1a - 2y_1b = -x_1^2 - y_1^2 \tag{4.53}$$

$$a^2 + b^2 - r^2 - 2x_2a - 2y_2b = -x_2^2 - y_2^2 \tag{4.54}$$

$$a^2 + b^2 - r^2 - 2x_3a - 2y_3b = -x_3^2 - y_3^2 \tag{4.55}$$

Restando las ecuaciones (4.53) y (4.54) y las ecuaciones (4.53) y (4.55), obtenemos:

$$\begin{aligned}
2(x_2 - x_1)a + 2(y_2 - y_1)b &= (x_2^2 - x_1^2) + (y_2^2 - y_1^2) \\
2(x_3 - x_1)a + 2(y_3 - y_1)b &= (x_3^2 - x_1^2) + (y_3^2 - y_1^2)
\end{aligned}$$

Este sistema puede ser resuelto usando regla de Cramer y obtenemos las coordenadas del centro:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} (x_2^2 - x_1^2) + (y_2^2 - y_1^2) & 2(y_2 - y_1) \\ (x_3^2 - x_1^2) + (y_3^2 - y_1^2) & 2(y_3 - y_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(x_2 - x_1) & 2(y_2 - y_1) \\ 2(x_3 - x_1) & 2(y_3 - y_1) \end{vmatrix}}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 2(x_2 - x_1) & (x_2^2 - x_1^2) + (y_2^2 - y_1^2) \\ 2(x_3 - x_1) & (x_3^2 - x_1^2) + (y_3^2 - y_1^2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(x_2 - x_1) & 2(y_2 - y_1) \\ 2(x_3 - x_1) & 2(y_3 - y_1) \end{vmatrix}}$$

13. Dada la ecuación $4x^2 - 16x + 9y^2 + 18y - 11 = 0$,

   a) Escribirla en una de las formas canónicas.

   b) Encontrar las coordenadas de sus focos y de sus vértices.

   c) Encontrar las ecuaciones de sus directrices y calcular su excentricidad.

   d) Escribir la ecuación de la curva después de una rotación de los ejes en un ángulo $\phi = \frac{\pi}{6}$.

   Solución:

   a) Completando los cuadrados en x y en y, la ecuación queda en la forma: $4(x-2)^2 + 9(y+1)^2 = 36$, la que es equivalente a $\dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{(y+1)^2}{4}$. Por tanto la curva representa una elipse.

   b) $a^2 = 9$ y $b^2 = 4$, entonces $c^2 = 5$.
   El centro de la elipse es el punto $(2, -1)$, por tanto las coodenadas de sus focos son: $(2 + \sqrt{5}, -1)$ y $(2 - \sqrt{5}, -1)$.
   Los vértices son $(5, -1)$, $(-1, -1), (2, 1), (2, -3)$.

   c) Las directrices de la elipse son las rectas $x = \pm\frac{a^2}{c} + 2$. Así, $x = \pm\frac{9}{\sqrt{5}} + 2$ y su excentricidad es $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

d) Usando las fórmulas (R) del teorema 2.4.11, tenemos que:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\frac{\pi}{6} - y' \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \\ y &= x' \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} + y' \cos\frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Lo que nos da las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y' \\ y &= \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' \end{aligned}$$

Reemplazando estos valores en la ecuación de la elipse obtenemos:

$$4(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y')^2 - 16(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y') + 9(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y')^2 + 18(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y') - 11 = 0 \ .$$

Trabajando algebraicamente esta expresión llegamos finalmente a la nueva ecuación que tiene la forma:

$$21x'^2 + (36 - 32\sqrt{3})x' + 31y'^2 + (32 + 36\sqrt{3})y' + 10\sqrt{3}x'y' - 44 = 0 \ .$$

14. Dada la ecuación de segundo grado $2x^2 - 3xy + 3y^2 + x - 7x + 1 = 0$, determine la forma de la curva y escríbala en la forma canónica correspondiente.

Solución: $A = 2, B = -3, C = 3, D = 1, E = -7, F = 1$. Como $B^2 - 4AC = -15 \leq 0$, la curva representa una elipse. $\operatorname{tg}(2\phi) = \frac{B}{A-C} = 3$. Usando tablas se tiene que $\phi = 35^0 46' 57''$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} A' &= A\cos^2\phi + B\cos\phi\operatorname{sen}\phi + C\operatorname{sen}^2\phi \\ C' &= A\operatorname{sen}^2\phi - B\cos\phi\operatorname{sen}\phi + C\cos^2\phi \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} A' + C' &= A + C \\ A' - C' &= (A - C)(\cos^2\phi - \operatorname{sen}^2\phi) + 2B\operatorname{sen}\phi\cos\phi \\ &= (A - C)\cos 2\phi + B\operatorname{sen} 2\phi \end{aligned}$$

Como $\operatorname{tg}(2\phi) = 3$, podemos pensar en un triángulo rectángulo de catetos 3 y 1, entonces:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2\phi &= \frac{B}{\pm\sqrt{B^2 + (A - C)^2}} \\ \cos 2\phi &= \frac{A - C}{\pm\sqrt{B^2 + (A - C)^2}} \end{aligned}$$

Reemplazando estos valores en la expresión de $A' - C'$, obtenemos:

$$\begin{aligned} A' - C' &= \frac{(A-C)^2}{\pm\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} + \frac{B^2}{\pm\sqrt{B^2+(A-C)^2}} \\ A' - C' &= \pm\sqrt{B^2 + (A-C)^2} \end{aligned}$$

Así obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned} A' + C' &= 5 \\ A' - C' &= -\sqrt{10} \end{aligned}$$

Para la segunda ecuación se elige el signo menos, pues A' y C' deben tener el mismo signo. Por tanto, $A' = \frac{5-\sqrt{10}}{2}$ y $C' = \frac{5+\sqrt{10}}{2}$. Para calcular los otros coeficientes, usaremos las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} D' &= E \operatorname{sen}\phi + D\cos\phi \\ E' &= E\cos\phi - D\operatorname{sen}\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\phi &= \sqrt{\frac{1-\cos 2\phi}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{10}}} \\ \cos\phi &= \sqrt{\frac{1+\cos 2\phi}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{10}}} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} D' &= -7\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{10}}} + \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{10}}} \\ E' &= -7\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{10}}} + \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{10}}} \end{aligned}$$

Después de efectuar estos largos cálculos aritméticos obtenemos que $F'' = -\frac{15}{9}$, por lo cual la curva puede escribirse como

$$(5-\sqrt{10})(x'')^2 + (5+\sqrt{10})(y'')^2 = \frac{50}{9}$$

15. Sea la parábola $y^2 = 2px$, con foco F, directriz d y $P(x^*, y^*)$ un punto cualquiera de ella.

a) Calcule la tangente del ángulo α formado por el eje X y el trazo $\overline{FP}$.

b) Calcule la tangente del ángulo β (pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $P(x^*, y^*)$).

c) Calcule $\operatorname{tg} 2\beta$.

d) Deduzca que $\gamma = \beta$, siendo γ el ángulo formado por la recta tangente y $\overline{FP}$.

e) Usando la ley de reflexión de un rayo de luz, deduzca el camino que sigue un rayo de luz que emerge del foco F de la parábola.

Solución:

a) Como $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$, el triángulo FAP es rectángulo en A, por tanto $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y^*}{x^* - \dfrac{p}{2}}$.

b) La pendiente de la recta tangente puede calcularse usando los puntos P y C. De la geometría clásica vemos que C es el punto medio del trazo $\overline{DF}$, así, $C = \left(0, \frac{y^*}{2}\right)$ y,

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{y^* - \frac{y^*}{2}}{x^*} = \frac{y^*}{2x^*}$$

Pero, $2x^*p = {y^*}^2$, entonces $\operatorname{tg}\beta = \frac{p}{y^*}$.

c) Usando la fórmula de la tangente para un ángulo doble tenemos:

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{\frac{2p}{y}}{1 - \frac{p^2}{y^2}} = \frac{2py}{y^2 - p^2} = \frac{2py}{2px - p^2} = \frac{y}{x - \frac{p}{2}}.$$

d) Por propiedad de los ángulos de un triángulo tenemos que, $\alpha = \beta + \gamma$ y $2\beta = \alpha$, por tanto $\gamma = \beta$.

e) En virtud de la ley de la reflexión de un rayo de luz, ángulo de incidencia igual al ángulo de reflexión, un rayo que emerja del foco F y que se refleje en un punto de la parábola, cuya dirección en ese punto es el de su recta tangente partirá en una dirección paralela al eje de simetría de la parábola. En esta propiedad se basa la construcción de los telescopios reflectantes, los proyectores de seguimiento, los focos de los vehículos.

16. Dada la ecuación $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 36x + 100$, determine qué curva representa y escríbala en la forma canónica correspondiente.

Solución: $A = 4, B = -12, C = 9, D = 36, E = 0, F = 100$.

Como $B^2 - 4AC = 0$, la ecuación representa una parábola.

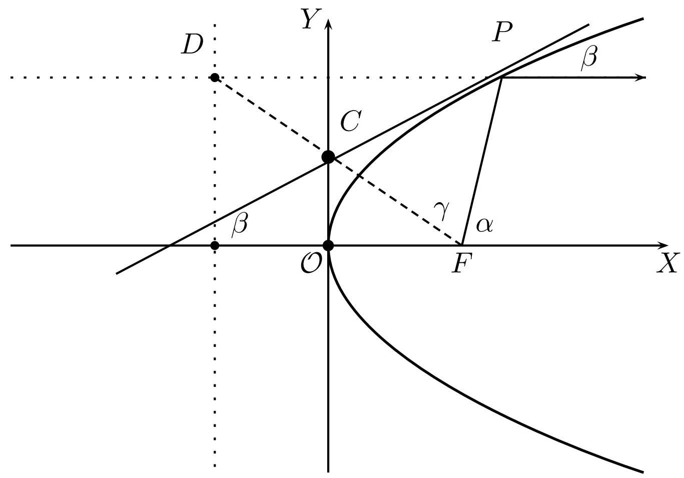


Figura 4.62: Reflejo de la luz en la parábola

$\operatorname{tg}\phi = -\dfrac{B}{2C} = \dfrac{2}{3}$, por tanto, $\operatorname{sen}\phi = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$ y $\cos\phi = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$. Usando una tabla vemos que $\phi = 34^0 41' 25''$. Usaremos las mismas fórmulas que en el ejercicio anterior para calcular los coeficientes. $A' = 0, C' = 13, D' = -\dfrac{108}{\sqrt{13}}, E' = \dfrac{72}{\sqrt{13}}, F' = F$. Así la ecuación se transforma en :

$$13(y')^2 - \frac{72}{\sqrt{13}}, x' + \frac{72}{\sqrt{13}} y' + 100 = 0 \ .$$

Completando el cuadrado en y' y sacando factor común $-\frac{108}{\sqrt{13}}$ para los términos restantes nos queda:

$$13(y' - \frac{36}{13\sqrt{13}})^2 - \frac{108}{\sqrt{13}}(x' - \frac{3901}{27 \cdot 13\sqrt{13}} = 0 \ .$$

Haciendo la evidente traslación de ejes obtenemos:

$$13(y'')^2 - \frac{108}{\sqrt{13}} x'' = 0 \ .$$

17. Demuestre que la ecuación $x^2+xy+y^2-2x-3y+1=0$ representa una circunferencia.

Solución:

$B^2-4AC=1-4=-3$, por tanto, la curva es una elipse.

Para eliminar el término en xy es necesario una rotación en un ángulo ϕ tal que $\cot 2\phi = \dfrac{A-C}{B}=0$, es decir, $2\phi=\dfrac{\pi}{2}$ y por tanto, $\phi=\dfrac{\pi}{4}$.

Como $\cos\dfrac{\pi}{4}=\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, las ecuaciones de la traslación tienen la forma:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y') \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y') \end{aligned}$$

Reemplazando estos valores en la ecuación dada tenemos:

$$\frac{(x'-y')^2}{2}+\frac{(x'-y')(x'+y')}{2}+\frac{(x'+y')^2}{2}-\frac{2(x'-y')}{\sqrt{2}}-\frac{3(x'+y')}{\sqrt{2}}+1=0.$$

Desarrollando los cuadrados y reduciendo los términos semejantes nos queda la ecuación:

$$3\sqrt{2}x'^2+3\sqrt{2}y'^2-10x'-2y'+2\sqrt{2}=0.$$

Ahora debemos completar los cuadrados de binomio en x' e y':

$$3\sqrt{2}\left[x'^2-\frac{10}{3\sqrt{2}}x'+\frac{25}{18}\right]+3\sqrt{2}\left[y'^2-\frac{2}{3\sqrt{2}}y'+\frac{1}{18}\right]+2\sqrt{2}-\frac{75\sqrt{2}}{18}-\frac{3\sqrt{2}}{18}=0$$

$$3\sqrt{2}\left[x'-\frac{5}{3\sqrt{2}}\right]^2+3\sqrt{2}\left[y'-\frac{1}{3\sqrt{2}}\right]^2-\frac{7\sqrt{2}}{3}=0.$$

Dividiendo la ecuación por $3\sqrt{2}$ se obtiene:

$$\left(x'-\frac{5}{3\sqrt{2}}\right)^2+\left(y'-\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^2=\frac{7}{9}.$$

Así podemos ver que la ecuación representa una circunferencia de centro $\left(\dfrac{5}{3\sqrt{2}},\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\right)$ y radio $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

Ejercicios propuestos

1. Determine el lugar geométrico de los puntos del plano cuyas coordenadas (x, y) satisfacen la relación $\text{máx}\{|x|, |y|\} = 1$.

2. Demuestre que las tres bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo concurren en un mismo punto que equidista de los lados del triángulo, por lo que constituye el centro de la circunferencia inscrita.

3. Demuestre que las tres alturas de un triángulo concurren en un mismo punto que se llama **ortocentro**.

4. La transversal de gravedad de un triángulo es la recta que une un vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto. Demuestre que las tres transversales de gravedad concurren en un mismo punto, que se llama centro de gravedad del triángulo.

5. Use las fórmulas encontradas en los ejercicios resueltos para encontrar la ecuación del círculo que pasa por los puntos:

   (i)$(1, 1), (2, 4), (5, 3)$.

   (ii) $(0, 0), (a, 0), (b, c)$.

6. Por un punto fijo A sobre un círculo de diámetro b se traza una secante cualquiera $\overline{AD}$, sobre la cual desde D se trazan dos puntos M y N a una misma distancia a de D. El lugar geométrico de estos puntos M y N se llama **caracol de Pascal**. Encuentre la ecuación que describe esta curva y bosqueje su gráfico separando los casos: $a > b$, $a = b$ y $a < b$.

7. Dada la ecuación $16x^2 + 36y^2 + 16x - 36y - 131 = 0$, determine:

   a) la curva que ella representa.
   b) las coordenadas del centro, de sus focos y sus vértices.
   c) la ecuación de sus directrices.
   d) su excentricidad.

8. Dada la ecuación $36y^2 - 36y - 16x^2 - 16x - 139 = 0$, determine:

   a) la curva que ella representa.
   b) las coordenadas del centro, de sus focos y sus vértices.
   c) la ecuación de sus directrices.
   d) su excentricidad.

9. Dada la ecuación $y - 6x^2 + 2x + 1 = 0$, determine:

a) la curva que ella representa.
b) las coordenadas del foco y del vértice.
c) la ecuación de su directriz.
d) su excentricidad.

10. Dada la ecuación $2x^2-5xy+5y-1=0$, determine la curva que representa y escríbala en la forma canónica correspondiente.

11. Determine y caracterice la curva que representa cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $4x^2+2y^2+8x-4y-2=0$.
b) $y^2-4y+4+12x=0$.
c) $9y^2-25x^2+18y+50-241=0$.
d) $2y^2-5y+2x-6=0$.
e) $4x^2-9y^2=0$.
f) $9x^2+4y^2-54x+8y+61=0$.
g) $4x^2+9y^2-8x+27y+49=0$.
h) $-3x^2+2x+4y+2=0$.
i) $x^2-4y^2-8x+8y+11=0$.
j) $x^2-y^2+2x+6y-14=0$.
k) $4x^2-9y^2+14x+21y=0$.
l) $9x^2+4y^2-18x-40y+109=0$.

12. Escribir en su forma canónica y graficar cada una de las siguientes curvas:

a) $4x^2-4xy+y^2-3x+2y=0$.
b) $x^2-4xy+4y^2+2x-4y-4=0$.
c) $x^2-4xy+4y^2+2x-4y+1=0$.
d) $x^2-4xy+4y^2+2x-4y+6=0$.
e) $x^2-2xy-4y+4=0$.
f) $x^2-xy+y-1=0$.
g) $2x^2-2xy+y^2+2x-2y-3=0$.

4.6.2. Análisis de curvas en coordenadas rectangulares

Cuando las variables x e y aparecen en potencias superior o igual a tres, en la mayoría de los casos, es imposible despejar explícitamente una variable en términos de la otra, para poder aplicar el análisis de funciones de la sección 4.5 para conocer el comportamiento de la curva. Veamos los siguientes casos:

Ejemplo 4.6.13 1. **La estrofoide recta** (Barrow (1630-1677)), cuya ecuación general es

$$y^2(a-x) = x^2(a+x); \quad a > 0. \tag{4.56}$$

contiene la variable y en grado dos y la x en grado tres, lo cual permite analizar cada una de sus ramas como función tradicional:

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{x^2(a-x)}{a+x} \\ y &= \pm\sqrt{\frac{x^2(a-x)}{a+x}}, \text{ cuando } \frac{a-x}{a+x} \geq 0. \end{aligned}$$

Entonces, cada rama de y puede analizarse como función siguiendo el esquema de la sección 4.5

2. En cambio, curvas como el folio de una hoja de Descartes(1638), descrito por la ecuación:

$$x^3 + y^3 = 3axy; \; a > 0$$

que es simétrica con respecto a X e Y, no resulta práctico despejar una variable en función de la otra. Si usted quiere hacerlo, tendría que usar la formula de Cardano-Tartaglia, la cuál complica mucho la expresión y sus derivadas.
Para analizar el comportamiento de este tipo de curva, es más práctico utilizar el método de derivación implícita.

Derivación Implicita Para conocer el comportamiento de una curva $f(x,y) = 0$, en un entorno de un punto (x_0, y_0) tal que $f(x_0, y_0) = 0$, supongamos que para $(x, y) \in I \times J$ y , donde $I = (x_0 - r, x_0 + r)$, $r > 0$ y $J = (y_0 - s, y_0 + s)$, $r > 0$, $s > 0$, se puede "despejar" y como función de x y que esta función es dos veces derivable, entonces usando la regla de la cadena, podemos conocer $y'(x)$, $y''(x)$ y conocer su comportamiento, al menos localmente.

Bajo estas hipótesis podemos imaginar o escribir la curva:

$$x^3 + (y(x))^3 = 3axy(x); \; x \in I.$$

Y aplicando regla de la cadena, derivar la ecuación.

$$\frac{d}{dx}\left(x^3 + (y(x))^3\right) = \frac{d}{dx}\left(3axy(x)\right).$$

Lo cual implica:

$$3x^2 + 3(y(x))^2 \cdot \frac{d}{dx}y(x) = 3ay(x) + 3ax \cdot \frac{d}{dx}y(x).$$

O lo que es lo mismo:

$$3x^2 + 3(y(x))^2 y'(x) = 3ay(x) + 3axy'(x). \tag{4.57}$$

Despejando $y'(x)$:

$$y'(x)\left(3y^2(x) - 3ax\right) = 3ay(x) - 3x^2$$

Si $3y^2(x) - 3ax \neq 0$

$$y'(x) = \frac{3ay(x) - 3x^2}{3y^2(x) - 3ax}.$$

Si en particular nos interesa $y'(x_0)$ entonces

$$\begin{aligned} y'(x_0) &= \frac{3ay(x_0) - 3x_0^2}{3y^2(x_0) - 3ax_0} \\ &= \frac{3ay_0 - 3x_0^2}{3y_0^2 - 3ax_0} \end{aligned} \tag{4.58}$$

más en concreto

Si $a = \dfrac{2}{3}$, entonces:

$$x^3 + y^3 = 2xy \tag{4.59}$$

Entonces el punto $(x_0, y_0) = (1, 1)$ pertence a dicha curva, pues sus coordenadas satisfacen la ecuación 4.59; en efecto:

$$1 + 1 = 2 \cdot 1 \cdot 1$$

Suponiendo que en un rectángulo del plano que contiene al punto $(1, 1)$ se puede despejar y como función de x, y que esta función es derivable, tenemos según la ecuación 4.58 que:

$$y'(1) = \frac{3 \cdot \frac{2}{3} - 3}{3 - 2} = -1$$

En el punto $(1, 1)$ la curva tiene una pendiente de -1. Es decir, la recta tangente a la curva en dicho punto es perpendicular a la recta $y = x$.

¿Por qué este resultado vale sólo en un rectángulo que contiene al punto $(1, 1)$?

Porque si en la ecuación 4.59 reemplazamos x por 1, resulta una ecuación cúbica en y.

$$y^3 - 2y + 1 = 0$$

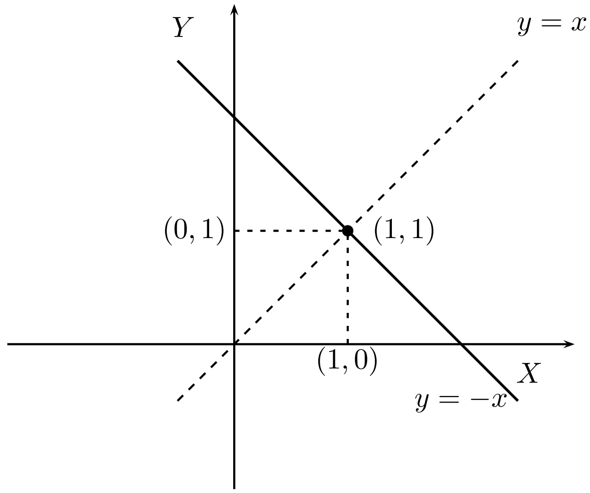


Figura 4.63:

la cual, según el Teorema Fundamental del Álgebra tiene tres raíces en $\mathbb{C}$.
Para buscar las otras raíces, basta dividir el polinomio $y^3 - 2y + 1$ por $y - 1$, por cuanto ya sabemos que $y = 1$ es una raìz de éste.

$$
\begin{array}{l}
\quad y^3 - 2y + 1 : y - 1 = y^2 + y - 1 \\
\underline{-(y^3 - y^2)\qquad\quad} \\
\quad 0 + y^2 - 2y + 1 \\
\quad\underline{-(y^2 - y)\qquad\quad} \\
\qquad 0 - y + 1 \\
\qquad\underline{-(-y + 1)\quad} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Así, $y^3 - 2y + 1 = (y - 1)(y^2 + y - 1)$

$$y^2 + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2}$$

Por lo tanto, para $x = 1$ se tiene $y = \begin{cases} y = 1 \\ \\ y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{cases}$ Esto significa geométricamente que si trazamos una recta paralela al eje Y a través de $x = 1$, ésta corta a la curva entres puntos que son las raices que hemos encontrado. Esta figura geométrica se puede expresar diciendo que $x = 1$ tiene tres "imágenes", por lo cual, globalmente la curva no es una función. Pero, localmente puede serlo. Así, localmente podemos analizar el comportamiento de la curva.

Por ejemplo, si nos interesa saber en cuáles puntos la curva tiene tangente paralela al eje X, debemos buscar los puntos que anulan la primera derivada.Usando la ecuación 4.58, tenemos:

$$\begin{aligned} y'(x) = 0 \quad & \Longleftrightarrow \quad \frac{2y(x) - 3x^2}{3y^2(x) - 2x} = 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2y = 3x^2 \\ 3y^2 \neq 2x. \end{cases} \end{aligned}$$

Para calcular los puntos, reemplazamos la ecuación $2y = 3x^2$ 3n la ecuación **??** y obtenemos:

$$x^3 \left(\frac{27}{8} x^3 - 2 \right) = 0.$$

Esta ecuación tiene dos raíces reales:

$$x = 0 \;\text{ y }\; x = \frac{2\sqrt[3]{2}}{3}.$$

Por lo tanto, el punto $\left(\dfrac{2\sqrt[3]{2}}{3}, 2\sqrt[3]{4} \right)$ satisface las condiciones. En cambio el punto $(0, 0)$ no satisface la relación $3y^2 \neq 2x$, por lo cual hasta el momento no podemos concluir nada.

Ejemplo 4.6.14 Encontrar los puntos donde la tangente a la lemniscata de Bernoulli es paralela al eje X.

Solución: La ecuación de esta curva fue deducida en la subsección **??** y corresponde a la ecuación 4.45:

$$(x^2 + y^2 9^2 = a^2(x^2 - y^2)\ ,\ a > 0.$$

Derivando implícitamente:

$$2(x^2 + y^2)(2x + 2yy') = a^2(2x - 2yy').$$

Despejando y?:

$$y'(x) = \frac{a^2x - 2xx^3 - 2xy^2}{2yx^2 + 2y^3 + a^2y} = \frac{1}{a^2 + 2y^2 + 2x^2} \cdot \frac{x(a^2 - 2x^2 - 2y^2)}{y}. \tag{4.60}$$

Observando esta ecuación podemos deducir que

$$y'(x) = 0 \iff (x = 0) \text{ ó } (a^2 - 2x^2 - 2y^2) = 0,\ y \neq 0.$$

- Si $a^2 - 2x^2 - 2y^2 = 0$, entonces:

  $$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}. \tag{4.61}$$

  Reemplazando la ecuación 4.61 en la ecuación de la lemniscata, nos queda:

  $$\frac{a^4}{4} = a^2(x^2 - y^2). \tag{4.62}$$

  Para calcular los puntos (x, y) correspondientes, debemos resolver el sistema:

  $$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2} \\ x^2 - y^2 = \frac{a^2}{4}, \end{cases} \tag{4.63}$$

  cuyas soluciones son,

  $$x = \pm\frac{a\sqrt{6}}{4}\ ,\ y = \pm\frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

- Si $x = 0$; reemplazando este valos en la ecuación 4.45 nos da $y = 0$. Este resultado nos da, para y' una forma indeterminada, por lo tanto no podemos concluir nada.

Naturaleza de los puntos críticos: Para poder clasificarlos calcularemos implícitamente la segunda derivada de $y(x)$, suponiendo que existe: Derivando la ecuación 4.60 obtenemos,

$$y''(2yx^2 + 2y^3 + a^2y) + y'(2y'x^2 + 4yx + 6yy' + 2ay') = a^2 - 6x^2 - 2y^2 - 4xyy'.$$

Como en los puntos que nos interesa calcular la segunda derivada son los que anulan y', la ecuación se reduce a :

$$y''(2yx^2 + 2y^3 + a^2y) = a^2 - 6x^2 - 2y^2.$$

Así,

$$y''(x) = \frac{a^2 - 6x^2 - 2y^2}{y(a^2 + 2y^2 + 2x^2)} = frac1a^2 + 2y^2 + 2x^2 \cdot \frac{a^2 - 6x^2 - 2y^2}{y}. \tag{4.64}$$

Observando la ecuación 4.64, vemos que el signo de la segunda derivada depende del signo de $\dfrac{a^2-6x^2-2y^2}{y}$. Evaluando esta expresión en las soluciones del sistema 4.63 obtenemos que ,

$$\begin{aligned} y''(\pm\frac{a\sqrt{6}}{4}\ ,\ \frac{a\sqrt{2}}{4}) &< 0 \\ y''(\pm\frac{a\sqrt{6}}{4}\ ,\ -\frac{a\sqrt{2}}{4}) &> 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$(\pm\frac{a\sqrt{6}}{4}\ ,\ \frac{a\sqrt{2}}{4}) \text{ son máximos y } (\pm\frac{a\sqrt{6}}{4}\ ,\ -\frac{a\sqrt{2}}{4}) \text{ son mínimos.}$$

Ejercicios propuestos

1. Dada la curva $f(x,y)=0$ y el punto (x_0,y_0) suponga que en un entorno de éste punto,existe $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{dx}{dy}$.
   - Verifique que (x_0,y_0) pertenece a la curva.
   - Calcule $\dfrac{dy}{dx}(x_0,y_0)$ $\dfrac{dx}{dy}(x_0,y_0)$.
   - Interprete geométricamente los resultados.

   a) $x^7+y^5x-3x^7y^2+y-1=0,\ \ (x_0,y_0)=(0,1)$.
   b) $x^3\cos(xy)=1=0,\ \ (x_0,y_0)=(-1,\pi)$.
   c) $\cos(x+y)+\operatorname{sen}(x-y)=1=0,\ \ (x_0,y_0)=(\pi/2,0)$.

2. Sea C una circunferencia de radio r y centro en el origen.

   a) Utilice derivación implícita para obtener el valor de la pendiente m_C, en cualquier punto $P(x_0,y_0)$. ¿Depende del radio este valor ?
   b) Sea C_1 la semicircunferencia de C que está en el primer y segundo cuadrante y C_2 la semicircunferencia de C que está en el tercer y cuarto cuadrante. Determine una expresión para C_1 y C_2 colocando y como función de x.
   c) Utilice el resultado anterior para encontrar el valor de $m_C(x_0,y_0)$, sólo en terminos de x_0.

3. Dada la ecuación de la curva llamada **Hoja de Descartes**:

$$y^3-2xy+x^3=0$$

a) Verifique que el punto $(1,1)$ pertenece a la curva definida por la ecuacion dada.

b) Si $x=1$, la ecuación resultante es de tercer grado en y.Encuentre los tres valores de y correspondientes a $x=1$, usando (a) y división de polinomios.

c) Calcule la ecuación de las rectas tangentes a la curva en cada uno de los puntos encontrados en (b).

4. La curva llamada **Rosa de cuatro pétalos** tiene por ecuación:

$$(x^2+y^2)^3-4a^2x^2y^2=0$$

a) Haciendo $x=r\cos\alpha$ y $y=r\operatorname{sen}\alpha$, $r>0$, $\alpha\in[0,2\pi]$. Encuentre la ecuación equivalente en función de r α.

b) Encuentre el ángulo α para el cual se obtiene el mayor valor de r y calcule los correspondientes puntos (x,y).

c) Encuentre la recta tangente a la curva en cada uno de los puntos encontrados en el item anterior. Diga en qué región del plano se ubica la curva.

d) Analice la simetría de la curva con respecto a los ejes coodenados, al origen y a la recta $y=x$.

e) Considerando la simetría estudiada, establezca la región mínima donde se debe analizar la curva para obtener su gráfico.

5. La ecuación

$$(x^2+y^2-ax)^2=a^2(x^2+y^2), \qquad a>0,$$

representa una curva llamada **Cardioide**.

a) Calcule todos los puntos de la curva cuya abscisa es $x=0$.

b) Calcule las rectas tangentes a la curva en los puntos obtenidos en (a).

c) Encuentre los puntos de la curva donde su tangente es horizontal.

d) Haciendo el cambio de variable $x=r\cos\alpha$ y $y=r\operatorname{sen}\alpha$, $r>0$, $\alpha\in[0,2\pi]$, demuestre que la ecuación se escribe como :

$$r=a(\cos\alpha+1).$$

e) Deduzca en que región del plano está ubicada la curva.

6. Dada la curva:

$$(x^2+y^2)^2=36x^2$$

a) Calcule los puntos donde la curva corta al eje X.

b) Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ para cada uno de los puntos encontrados en la pregunta e interprete el resultado.

c) Determine los puntos críticos de la curva y clasifíquelos en máximos o mínimos.

d) Deduzca la región del plano donde se encuentra la curva.

e) Deduzca que la curva dada representa dos circunferencias tangentes. Encuentre dichas circunferencias.

7. Dada la cónica:

$$\mathcal{C} : x^2 - y^2 = \sigma^2; \text{ con } \sigma > 0$$

Se define a partir de ella el conjunto $\mathcal{B}$, como:

$$\mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathcal{C} : y \geq 0\}$$

a) Esboce el gráfico de $\mathcal{B}$.

b) Determine que puntos de $\mathcal{B}$ son los más cercanos al punto (0,3).

c) Se define la distancia vertical cuadrática de un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ a una función dada $y = f(x)$, como la distancia al cuadrado que hay entre P_0 y $(x_0, f(x_0))$. O sea,

$$\mathcal{V}^2(P_0, f(x)) = \mathcal{D}^2\left((x_0, y_0), (x_0, f(x_0))\right)$$

Considere la parte de $\mathcal{C}$ que esta en el primer cuadrante del plano XY como $f(x)$. ¿Cuál debe ser el valor de σ, para que la suma de las distancias verticales de los puntos $(1, 0)$ y $(1, 2)$ a $f(x)$, sea mínima?.

d) Sea E el valor de la suma de las distancias verticales de los puntos $(1, 0)$ y $(1, 2)$ a $f(x)$. ¿Cuál es el mínimo valor posible para E?. ¿Por qué, se puede garantizar que $E \neq 0$?.

4.6.3. Análisis de curvas dadas por ecuaciones paramétricas

Introducción

Una de las tantas preguntas, respecto de los fenómenos naturales, que podemos hacernos es cómo describir la trayectoria de un objeto en movimiento.
Por ejemplo, supongamos que una rueda de radio a gira por un camino recto. En esta rueda hemos marcado un punto P y queremos describir la trayectoria de dicho punto.

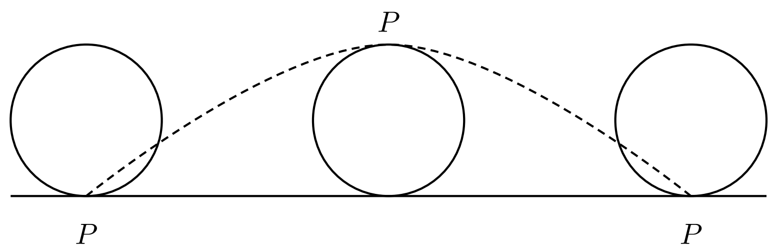


Figura 4.64:

Para obtener las ecuaciones de dicha trayectoria hacemos lo siguiente.

Supongamos por un instante que la rueda está fija.Sea C su centro y M el punto de la rueda en que tiene contacto con el camino como se muestra en la Figura 2.5.2.

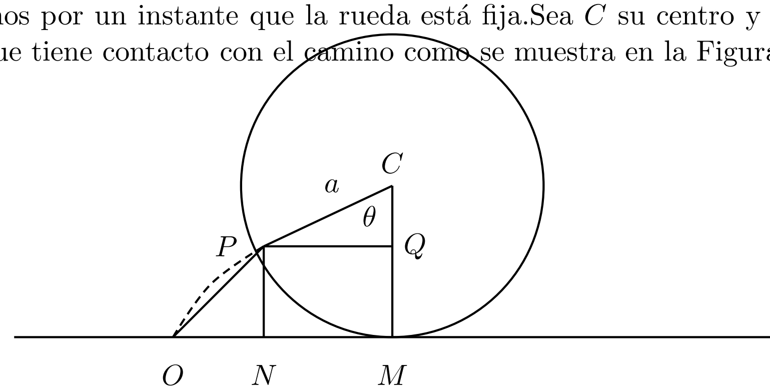


Figura 4.65:

Sea θ el ángulo PCM y O el origen del movimiento.

Por las condiciones del problema $\overline{OM}$ = longitud arco PM.

En el triángulo CPQ se cumple $\overline{PQ} = a \text{ sen}\,\theta$ y $\overline{CQ} = a\cos\theta$

Sean (x, y) las cordenadas de P.

$x = \overline{ON} = \overline{OM} - \overline{NM} = a\theta - a\,\text{sen}\,\theta = a(\theta - \text{sen}\,\theta)$
$y = \overline{NP} = \overline{MC} - \overline{MQ} = a - a\cos\theta = a(1 - \cos\theta)$

Luego las ecuaciones de (x, y) en función del ángulo θ son:

$$\begin{aligned} x &= a(\theta - \text{sen}\,\theta) \\ y &= a(1 - \cos\theta) \end{aligned} \tag{4.65}$$

Así, a medida que P varía, varía el ángulo θ entre 0 y 2π. De esta forma, las ecuaciones del punto $P(x, y)$ tienen la representación paramétrica dada por las ecuaciones 4.65 en función de θ.

En general una curva puede tener mas de una representación paramétrica.

A manera de ejemplo; Si consideramos una circunferencia de centro (0,0) y radio a tenemos que un punto típico de la circunferencia, (x, y) satisface la ecuación:

$$x^2 + y^2 = a^2 \tag{4.66}$$

Si denotamos por θ el ángulo que forma el segmento $\overline{OP}$ con el eje X entonces,

$$\begin{aligned} x &= a\cos\theta \\ y &= a\,\text{sen}\,\theta \end{aligned} \tag{4.67}$$

es una representación paramétrica del punto (x, y).

Así, la misma circunferencia puede representarse en la forma cartesiana 4.66 o en la forma 4.67 que es la forma polar.

En general, si tenemos una curva $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ entonces tendremos que describir cada $x = (x_1, \cdots, x_1) \in \gamma$ en la forma $x_1 = x_1(t), \cdots, x_n = x_n(t), t \in [a, b]$ donde t es un parámetro conveniente para la escritura de la curva.

Ahora mostraremos como aplicar la información que proporcionan la primera y segunda derivada para analizar el comportamiento de curvas en el plano que vienen dada mediante

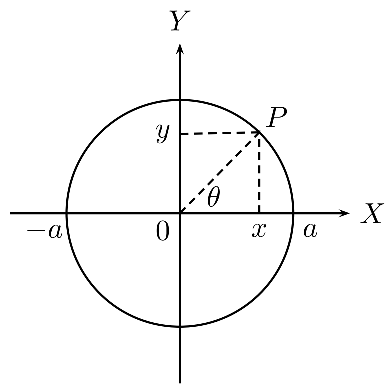


Figura 4.66: Coordenadas polares de un punto en el plano

ecuaciones paramétricas. Como se dijo en la introducción, dichas curvas se pueden pensar como el camino que sigue un objeto en movimiento y al parámetro se puede pensar como el tiempo.

Para analizar el comportamiento de una curva y bosquejar su gráfico en el plano XY, debemos calcular $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. Como nuestros datos - las ecuaciones paramétricas - están en función del parámetro t, estas derivadas quedan también expresadas en términos de t.Para calcular estas derivadas se deben usar dos importantes teoremas del cálculo diferencial: la regla de la cadena y el teorema de al función inversa.

Definición 4.6.15 Llamaremos **curva en el plano** a una función γ de $[a,b] \mapsto \mathbb{R}^2$ tal que :

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (f(t), g(t)),$$

donde f y g son funciones continuas.

En los casos que veremos supondremos que las componentes de $\gamma(t)$ son derivables al menos dos veces.

La variación de la abscisa respecto a la ordenada , $\dfrac{dy}{dx}$, es muy importante, pues representa la dirección de la recta tangente a la curva $y(x)$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ representa su curvatura.

Ahora mostraremos como se calculan estas derivadas.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}.$$

Es importante observar que esta fórmula sólo tiene sentido cuando $x'(t) = f'(t) \neq 0$, lo que es equivalente a la inyectividad de la función diferenciable $x(t) = f(t)$ como consecuencia del teorema de la función inversa, teorema 4.3.22.

Para conocer la curvatura de $\gamma(t)$, debemos calcular $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{g'(t)}{f'(t)}\right)}{f'(t)} = \frac{g''(t)f'(t) - g'(t)f''(t)}{(f'(t))^3}.$$

Inductivamente, se puede demostar que, cuando existen las derivadas necesarias, se tiene que:

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)}{\dfrac{dx}{dt}},$$

fórmula que con paciencia se puede escribir en términos de las derivadas $f^k(t), g^k(t), k = 1, \ldots, n$.

Por ejemplo calculemos $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ para la campana de la cicloide

$$\begin{cases} x(t) &= at \\ y(t) &= a(1 - \cos t) \end{cases}$$

con $0 \leq t \leq 2a\pi$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{a \operatorname{sen} t}{a} = \operatorname{sen} t.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{d}{dt}(\operatorname{sen} t)}{a} = \frac{\cos t}{a}.$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\cos t}{a}\right)}{a} = -\frac{\operatorname{sen} t}{a^2}.$$

Ejemplo 4.6.16 Dada la curva llamada **lemniscata de Gerono** y cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \operatorname{sen}(2t), \qquad t \in [0, \pi]. \end{cases}$$

1. Determine la región del plano donde se encuentra la curva.

2. Calcule los puntos (x, y) correspondientes a $t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$.

3. Encuentre los puntos donde la tangente es paralela al eje X.

4. Encuentre los puntos donde la tangente es paralela al eje Y.

5. Analice el crecimiento de la curva.

6. Demuestre que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{-2(\cos t)(2\operatorname{sen}^2 t + 1)}{\operatorname{sen}^3 t}$ y analice la concavidad de la curva

Solución:

1. Como $\begin{cases} -1 & \leq & \cos t \leq 1 \\ -1 & \leq & \operatorname{sen} 2t \leq 1 \end{cases}$

   se tiene que $x(t) \in [-1, 1]$; $y(t) \in [-1, 1]$.
   Por lo tanto la curva se encuentra en el cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$

2. Evaluando para cada valor de t en $x(t)$ e $y(t)$, obtenemos:

$$t = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x(0) = \cos 0 = 1 \\ y(0) = \operatorname{sen} 0 = 0 \end{cases} ; \qquad (1,0)$$

$$t = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow \begin{cases} x = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ y = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1 \end{cases} ; \qquad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$$

$$t = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \begin{cases} x = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \\ \\ y = \operatorname{sen}\pi = 0 \end{cases} ; \qquad (0,0)$$

$$t = \frac{3\pi}{4} \Longrightarrow \begin{cases} x = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ y = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = -1 \end{cases} ; \qquad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right)$$

$$t = \pi \Longrightarrow \begin{cases} x = cos\pi = -1 \\ y = \operatorname{sen} 2\pi = 0 \end{cases} ; \qquad (-1,0)$$

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

La curva tiene tangente paralela al eje $X \Longleftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = 0 \Longleftrightarrow \left(\dfrac{dy}{dt} = 0 \text{ y } \dfrac{dx}{dt} \neq 0\right)$

$$\frac{dy}{dt} = 0 \Longleftrightarrow \frac{d}{dt}(\operatorname{sen} 2t) = 0 \Longleftrightarrow 2\cos 2t = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2t = \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow t = \frac{\pi}{4} \\ \qquad\quad \text{o} \\ 2t = \frac{3\pi}{2} \Longleftrightarrow t = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

Según lo calculado en (b), la curva tiene tangente paralela al eje X en los puntos:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) \text{ y } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right)$$

4. La curva tiene tangente paralela al eje Y

$$\Longleftrightarrow \frac{dx}{dt} = 0 \text{ y } \frac{dy}{dt} \neq 0$$

$$\frac{dx}{dt} = 0 \Longleftrightarrow -\text{sen}t = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} t & = & 0 \\ & \text{o} & \\ t & = & \pi \end{cases}$$

5. Para analizar el crecimiento de la curva, se debe estudiar el signo de $\dfrac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2\cos 2t}{-\text{sen}t} = -2\frac{\cos\ 2t}{\text{sen}t}$$

- Si $t \in [0, \frac{\pi}{4}] \Longrightarrow \frac{dy}{dx} < 0$, por lo cual para estos valores de t, la curva es decreciente.
- Si $t \in [\frac{\pi}{4}, 3\frac{\pi}{4}]$; $\frac{dy}{dx} > 0$, por lo tanto la curva es creciente.
- Si $t \in [\frac{3\pi}{4}, \pi]$; $\frac{dy}{dx} < 0$, por lo cual la curva decrece para estos tiempos.

6.

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(-2\frac{\cos 2t}{\text{sen}t}\right) \\ &= \frac{\frac{d}{dt}\left(-2\frac{\cos 2t}{\text{sen}t}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(-2\frac{\cos 2t}{\text{sen}t}\right)}{-\text{sen}t} \quad (*) \end{aligned}$$

Calculando:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\cos 2t}{\text{sen t}}\right) = \frac{-2\text{sen}t\text{sen}2t - \cos 2t \cdot \cos t}{\text{sen}^2 t} \quad (**)$$

Usando las fórmulas de los ángulos dobles, el numerador puede ser expresado como:

$-[2\operatorname{sen} t \cdot 2\operatorname{sen} t \cdot \cos t + (1-2\mathrm{sen}^2 t)\cos t] = -[\cos t(4\mathrm{sen}^2 t + 1 - 2\mathrm{sen}^2 t)] = -\cos t(2\mathrm{sen}^2 t + 1)$

Reemplazanto este valor en (**), se tiene:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\cos 2t}{\mathrm{sen} t}\right) = -\frac{\cos t(2\mathrm{sen}^2 t + 1)}{\mathrm{sen}^2 t}$$

Ahora este valor se reemplaza en $(*)$ para obtener el valor de la segunda derivada.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2\cos t(2\mathrm{sen}^2 t + 1)}{\mathrm{sen}^3 t}$$

Como $t \in (0, \pi)$, $\mathrm{sen}^3 t > 0$ y $(2\mathrm{sen}^2 t + 1) > 0, \forall t$ el signo de $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ depende del signo de $\cos t$.

- Si $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} < 0$, entonces la curva es cóncava
- Si $t \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} > 0$, entonces la curva es convexa.

Es decir:

Si $x \in]-1, 0[$, la curva es convexa.
Si $x \in]0, 1[$, la curva es cóncava.

El gráfico de la curva es el que se muestra y corresponde a una vuelta completa, es decir, cuando $t \in [0, 2\pi]$. el gráfico correspondiente a $t \in [0, \pi]$ es la parte de la curva que está en el primer y tercer cuadrante.

Ejemplo 4.6.17 Dada la curva llamada **hipocicloide de cuatro vértices o astroide** y definida por las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} x(t) &= 2\cos^3 t \\ y(t) &= 2\operatorname{sen}^3 t \ , \ t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

1. Determine el rango de valores que pueden tomar x e y. Deduzca la región del plano XY, donde se encuentra el gráfico de la curva y calcule los puntos (x, y) correspondientes a $t = 0$, $\dfrac{\pi}{2}$, π, $\dfrac{3\pi}{2}$, 2π.

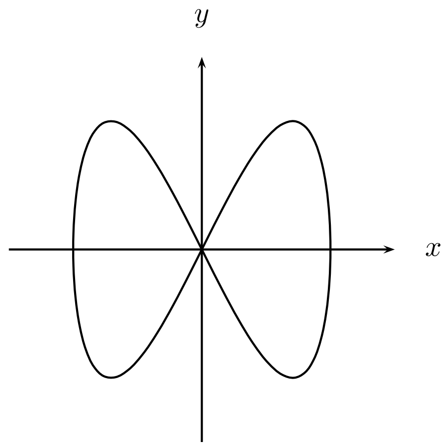


Figura 4.67: Lemniscata de Gerono

2. Determine los puntos del plano XY donde la tangente a la curva es paralela al eje X y al eje Y.
3. Analice el crecimiento de la curva en el plano XY cuando $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
4. Demuestre que para $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la curva es convexa.
5. Demuestre que $\sqrt[3]{(x(t))^2} + \sqrt[3]{(y(t))^2} = \sqrt[3]{4}$.
6. Utilice la información de los ítemes anteriores) para graficar la curva.

Solución:

1. Como $-1 \leq \operatorname{sen} \alpha \leq 1$ y $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$:
   $x(t) \in [-2, 2]$; $y(t) \in [-2, 2]$.
   Esto significa que la curva se encuentra dentro del rectángulo $[-2, 2] \times [-2, 2]$.
   - Si $t = 0$: $(x(t), y(t)) = (2, 0)$
   - Si $t = \frac{\pi}{2}$: $(x(t), y(t)) = (0, 2)$
   - Si $t = \pi$: $(x(t), y(t)) = (-2, 0)$

- Si $t = \dfrac{3\pi}{2}$: $(x(t), y(t)) = (0, -2)$
- Si $t = 2\pi$: $(x(t), y(t)) = (2, 0)$

2. - La tangente es paralela al eje X cuando $\dfrac{dy}{dx} = 0$.

$$\frac{dy}{dt} = 6\operatorname{sen}^2 t \cdot \cos t$$

$$\frac{dx}{dt} = 6\cos^2 t(-\operatorname{sen} t)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{6\operatorname{sen}^2 t \cos t}{6\cos^2 t \operatorname{sen} t} = -\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = -\tan t$$

Por lo tanto:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \iff \tan t = 0 \iff t = 0;\ t = \pi;\ t = 2\pi$$

Los puntos correspondientes son según lo calculado en (a):$(2, 0)$, $(-2, 0)$.

- La tangente es paralela al eje Y cuando:

$$\frac{dx}{dy} = 0 \iff \operatorname{cotan} t = 0 \iff t = \frac{\pi}{2};\ \ t = \frac{3\pi}{2}$$

Según lo calculado en (a), los punto
s correspondientes son: $(0, -2)$, $(0, 2)$.

3. Si $t \in [0, \dfrac{\pi}{2}] \Longrightarrow \tan t > 0$. Por lo tanto, $\dfrac{dy}{dx} < 0$. Así, la curva es decreciente para $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

4.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(-\tan t) = -\frac{d}{dt}\tan t \cdot \frac{dt}{dt} = \frac{-\frac{d}{dt}(\tan t)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sec^2 t}{-6\cos^2 t \operatorname{sen} t} = \frac{1}{6\cos^4 t \operatorname{sen} t}$$

Si $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\Longrightarrow \operatorname{sen} t > 0 \Longrightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2} > 0$. Por lo tanto, la curva es convexa en $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

5.
$$x^2(t) = 4\cos^6 t \Longrightarrow \sqrt[3]{x^2(t)} = \sqrt[3]{4}\cos^2 t$$

$$y^2(t) = 4\,\mathrm{sen}^6\, t \Longrightarrow \sqrt[3]{y^2(t)} = \sqrt[3]{4}\,\mathrm{sen}^2\, t$$

Por lo tanto:
$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{4}(\cos^2 t + \mathrm{sen}^2\, t) = \sqrt[3]{4}$$

6. Por (a) sabemos que el gráfico de la curva está en el rectángulo $[-2, 2] \times [-2, 2]$, y por la información obtenida podemos bosquejar su gráfico:

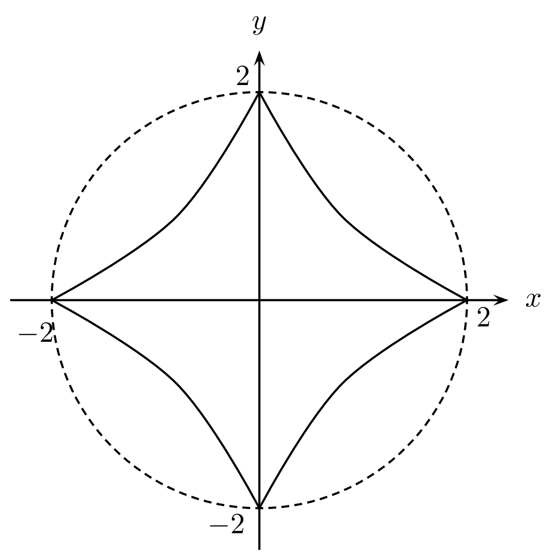


Figura 4.68: Astroide

Ejercicios propuestos En los siguientes ejercicios se pide analizar las ecuaciones paramétricas de la curva para obtener el gráfico dado.

1. Las ecuaciones paramétricas de la **Elipse** son:

$$\begin{cases} x(t) = a\cos(t) \\ y(t) = b\,\mathrm{sen}(t) \end{cases}$$

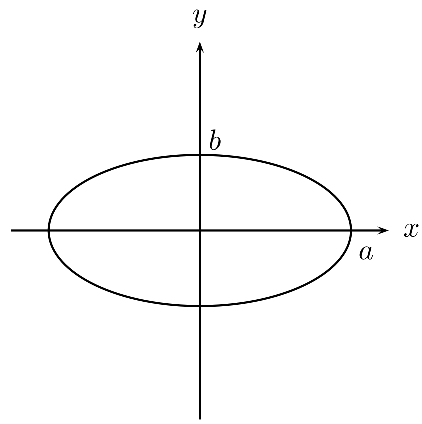


Figura 4.69: Elipse

2. Dada la **cicloide** cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x(t) = a(t - \operatorname{sen}(t)) \\ y(t) = a(1 - \cos(t)) \end{cases}$$

Analícelas para obtener el gráfico:

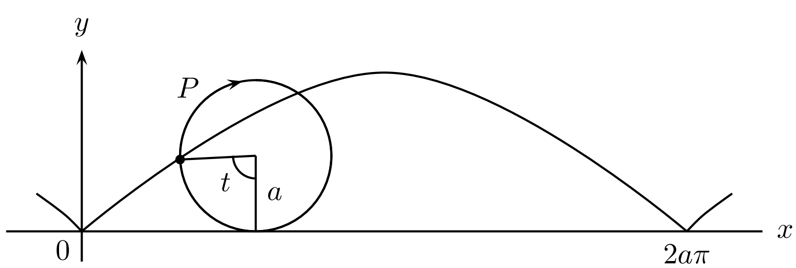


Figura 4.70: Cicloide

3. Demuestre que las curvas:

(i)

$$\begin{cases} x(t) = a\cos(t) \\ y(t) = a\operatorname{sen}(t) \end{cases}$$

(ii)

$$\begin{cases} x(t) = a\operatorname{sen}(t) \\ y(t) = a\cos(t) \end{cases}$$

Representan una circunferencia de centro $(0,0)$ y radio a. Explique en qué consiste la diferencia entre ellas.

4.6.4. Curvas expresadas en coordenadas polares

Un punto P del plano queda completamente determinado conociendo su distancia r al origen y el ángulo θ que forma el trazo $\overline{OP}$ con el semieje X^+ medido en el sentido positivo.

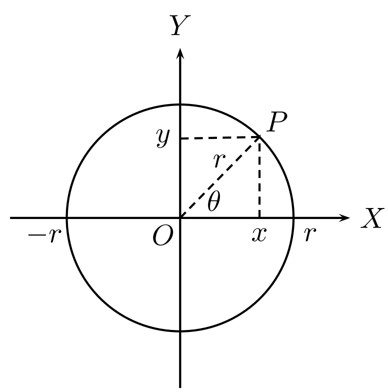


Figura 4.71: Coordenadas polares de un punto en el plano

Repitiendo el razonamiento hecho en la introducción, es fácil, deducir que:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta\ , \qquad \theta \in [0, 2\pi[. \end{cases}$$

Despejando r y θ en las ecuaciones anteriores y considerando que la función arcotangente tiene recorrido $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tenemos:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \dfrac{y}{x}, & \text{si } x > 0, y \geq 0. \\ \theta = \pi + \arctan \dfrac{y}{x}, & \text{si } x < 0. \\ \theta = 2\pi + \arctan \dfrac{y}{x}, & \text{si } x > 0, y < 0. \end{cases}$$

A los números (θ, r) se les llama **coordenadas polares** del punto P.

Para ubicar en el plano XY un punto de coordenadas (θ, r), debemos medir un ángulo θ a partir del semieje X^+, en el sentido antihorario si θ es positivo y en sentido horario si θ es negativo. Sobre la recta que forma el ángulo se mide la distancia r desde el origen. Como r es la distancia del punto al origen en principio es positivo, pero es necesario darle sentido al punto de coordenadas $(\theta, -r)$. Por convención este corresponde al punto $(\pi + \theta, r)$, $r > 0$.

Usando la definición de circunferencia de centro en el origen y radio a, tenemos que la ecuación de esta curva en coordenadas polares es.

$$r = a.$$

Podemos observar que se simplifica mucho, en general las coordenadas polares simplifican las ecuaciones de curvas cuando el movimiento que estas representan son combinaciones de movimientos circulares.
En general una ecuación en coordenadas polares se escribe como:

$$F(r, \theta) = 0 \qquad \text{ó} \qquad r = f(\theta).$$

Simetrías Dada la curva $r = f(\theta)$ diremos que su gráfico es simétrico con respecto:

1. **Al eje** X, si cumple una de las siguientes alternativas:
   - La ecuación $r = f(\theta)$ no cambia al reemplazar en ella θ por $-\theta$.
   - La ecuación $r = f(\theta)$ no cambia al reemplazar en ella θ por $\pi - \theta$ y r por $-r$.
2. **Al eje** Y, si cumple una de las siguientes alternativas:
   - La ecuación $r = f(\theta)$ no cambia al reemplazar en ella θ por $\pi - \theta$.
   - La ecuación $r = f(\theta)$ no cambia al reemplazar en ella θ por $-\theta$ y r por $-r$.
3. **Al origen**, si cumple una de las siguientes alternativas:

- La ecuación $r = f(\theta)$ no cambia al reemplazar en ella r por $-r$.
- La ecuación $r = f(\theta)$ no cambia al reemplazar en ella θ por $\pi + \theta$.

Para analizar su comportamiento y bosquejar su gráfico en el plano XY, debemos calcular $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.
Considerando:

$$\begin{aligned} r &= f(\theta) \\ x &= r(\theta)\cos\theta \\ y &= r(\theta)\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

Podemos observar que para calcular las derivadas que nos interesan, las ecuaciones de x e y pueden ser vistas como las ecuaciones paramétricas de la curva $r = f(\theta)$ en que θ es el parámetro.Así, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= \frac{dr}{d\theta}\cos\theta + r(\theta)(-\operatorname{sen}\theta) \\ &= \cos\theta\frac{dr}{d\theta} - \operatorname{sen}\theta\cdot r(\theta) \\ \frac{dy}{d\theta} &= \frac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + r(\theta)(\cos\theta) \\ &= \operatorname{sen}\theta\frac{dr}{d\theta} + \cos\theta\cdot r(\theta) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} \\ &= \frac{\operatorname{sen}\theta\frac{dr}{d\theta} + \cos\theta\cdot r(\theta)}{\cos\theta\frac{dr}{d\theta} - \operatorname{sen}\theta\cdot r(\theta)}, \end{aligned}$$

donde: $r(\theta) = f(\theta)$ y $\dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{df}{d\theta}$. Para calcular la segunda derivada tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \\
&= \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{d\theta}{dx} \\
&= \frac{\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{d\theta}}.
\end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right) &= \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta \dfrac{dr}{d\theta} + \cos\theta \cdot r(\theta)}{\cos\theta \dfrac{dr}{d\theta} - \operatorname{sen}\theta \cdot r(\theta)}\right) \\
\frac{dx}{d\theta} &= \cos\theta \frac{dr}{d\theta} - \operatorname{sen}\theta \cdot r(\theta)
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.6.18 Dada la curva llamada **lemniscata de Bernoulli**:

$$r = 2\sqrt{\cos 2\theta}$$

1. Escriba su ecuación en coordenadas rectangulares.

2. Analice el tipo de simetría que ella tiene y ubique en plano XY los puntos $(\theta, r(\theta))$ para : $\theta = 0\,, \pm\dfrac{\pi}{6}\,, \pm\dfrac{\pi}{4}$. Bosqueje el gráfico de la curva señalando el sentido del movimiento.

3. Determine los valores de θ para los cuales la tangente a la curva es paralela al eje X.

Solución:

1. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

2. Por ser coseno una función par, la curva es simétrica con respecto al eje X. Además, $r(\theta) = r(\pi - \theta)$, por lo tanto también es simétrica con respecto al eje Y.

$$\begin{aligned}
r(0) &= 2 \\
r\left(\pm\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{2}{\sqrt{2}} \\
r\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) &= 0.
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
x &= r(\theta)\cos\theta \\
y &= r(\theta)\operatorname{sen}\theta \\
\frac{dx}{d\theta} &= \cos\theta\frac{dr}{d\theta} - r\operatorname{sen}\theta \\
\frac{dy}{d\theta} &= \operatorname{sen}\theta\frac{dr}{d\theta} + r\cos\theta \\
\frac{dr}{d\theta} &= \frac{-2\operatorname{sen}2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}.
\end{aligned}$$

Los ángulos donde la tangente es paralela al eje X son aquellos tales que:

$$\frac{dy}{d\theta} = 0 \text{ y } \frac{dx}{d\theta} \neq 0.$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}2\theta + 2\cos 2\theta\cos\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} = \frac{2\cos 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{-2\operatorname{sen}3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

Por lo tanto, los ángulos que satisfacen la condición son:

$$\theta = \pm\frac{\pi}{6}\ ,\ \pi \pm \frac{\pi}{6}.$$

4. Su gráfico es:

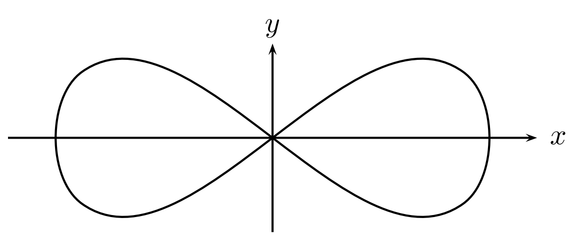


Figura 4.72:

Ejemplo 4.6.19 Curva Polar $r = \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Tangentes Horizontales Para encontrar las tangentes horizontales debemos encontrar los puntos donde $\dfrac{dy}{dx} = 0$.

Por regla de la cadena sabemos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$$

Luego $\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{d\theta} = 0 \quad \wedge \quad \frac{dx}{d\theta} \neq 0$
Sabemos que las coordenadas cartesianas de la curva se definen por:

$$x = r\cos(\theta) = \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos(\theta) \quad (1)$$

$$y = r\operatorname{sen}(\theta) = \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{sen}(\theta) \quad (2)$$

De (2) obtenemos $\frac{dy}{d\theta}$ y la igualamos a cero para obtener los ángulos en los cuales la derivada se anula:

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}(\theta) + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos(\theta) = 0 \quad (3)$$

Resolvemos esta ecuación trigonométrica usando:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{2}}\,;\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(\theta)}{2}}$$

en (3) queda:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\operatorname{sen}(\theta)\sqrt{\frac{1+\cos(\theta)}{2}} + \sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{2}}\cos(\theta) &= 0 \quad / \quad \cdot\sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{2}} \\
\frac{1}{2}\operatorname{sen}(\theta)\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{2} + \frac{(1-\cos(\theta))}{2}\cos(\theta) &= 0 \qquad \cdot 4 \\
\operatorname{sen}^2(\theta) + (2-2\cos(\theta))\cos(\theta) &= 0 \\
1-\cos^2(\theta) + 2\cos(\theta) - 2\cos^2(\theta) &= 0 \qquad \cdot(-1) \\
3\cos^2(\theta) - 2\cos(\theta) - 1 &= 0 \\
\cos(\theta) = \frac{2 \pm \sqrt{4+4\cdot 3}}{6} &= \frac{2 \pm 4}{6}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

1. $\cos(\theta) = 1$ y

2. $\cos(\theta) = \frac{-1}{3}$

Para (a) tenemos:

$$\cos(\theta) = 1 \Leftrightarrow \theta = 0 + 2k\pi \quad k = 0, 1, 2 \Rightarrow S_\theta^1 = \{0, 2\pi, 4\pi\}$$

Para (b) tenemos:

$$\cos(\theta) = \frac{-1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta \approx \frac{7}{12}\pi + 2k\pi & k = 0, 1 \Rightarrow S_\theta^2 = \left\{\frac{7}{12}\pi, \frac{31}{12}\pi\right\} \\ \theta \approx \frac{17}{12}\pi + 2k\pi & k = 0, 1 \Rightarrow S_\theta^3 = \left\{\frac{17}{12}\pi, \frac{41}{12}\pi\right\} \end{cases}$$

Luego el conjunto solución para esta ecuación trigonométrica es:

$$S_\theta = S_\theta^1 \bigcup S_\theta^2 \bigcup S_\theta^3 = \left\{0, 2\pi, 4\pi, \frac{7}{12}\pi, \frac{17}{12}\pi, \frac{31}{12}\pi, \frac{41}{12}\pi\right\}$$

Debemos comprobar ahora que $\frac{dx}{d\theta}(\theta) \neq 0 \quad , \forall \theta \in S_\theta$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos(\theta) - \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Luego:

$$\frac{dx}{d\theta}(0) = \frac{1}{2} \neq 0 \quad ; \frac{dx}{d\theta}(2\pi) = \frac{-1}{2} \neq 0 \quad ; \frac{dx}{d\theta}(4\pi) = \frac{1}{2} \neq 0$$

$$\frac{dx}{d\theta}\left(\frac{7}{12}\pi\right) \approx -0,845 \neq 0 \quad ; \frac{dx}{d\theta}\left(\frac{17}{12}\pi\right) \approx 0,845 \neq 0$$

$$\frac{dx}{d\theta}\left(\frac{31}{12}\pi\right) \approx 0,845 \neq 0 \quad ; \frac{dx}{d\theta}\left(\frac{41}{12}\pi\right) \approx -0,845 \neq 0$$

Así S_θ está compuesto por todos los ángulos θ para los cuales la derivada $\dfrac{dy}{dx}$ se anula.

Ejercicios propuestos

A continuación se da una lista de las curvas más conocidas en coordenadas polares. Para cada una de ellas se pide:

- Hacer una tabla mínima de valores y ubicar los puntos en el plano XY.
- Analizar si la curva tiene algún tipo de simetría.
- Estudiar el acotamiento y deducir en qué región del plano se encuentra.

- Calcular los ángulos para los cuales la curva pasa por el origen.
- Encontrar los puntos donde la curva tiene tangente paralela al eje X.
- Encontrar los puntos donde la curva tiene tangente paralela al eje Y.
- En los casos que las ecuaciones sean accesibles, determine la concavidad de la curva analizando el signo de la segunda derivada.
- Al bosquejar el gráfico señale con una flecha el sentido del movimiento.

1. La **cardioide** tiene la siguiente ecuación en coordenadas polares

$$r = a(\cos(\theta) + 1)$$

o

$$r = a(\cos(\theta) - 1).$$

En coordenadas rectangulares es $(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$

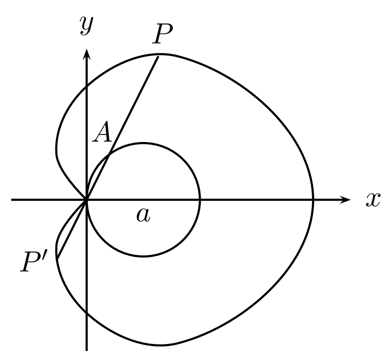


Figura 4.73:

2. **Bifolio.**

$$r = a \operatorname{sen}(\theta) \cos^2(\theta).$$

En coordenadas rectangulares: $(x^2 + y^2)^2 = ax^2y$.

3. **Lemniscata de Bernoulli.**

$$r^2 = a^2 \cos(2\theta).$$

En coordenadas rectangulares: $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

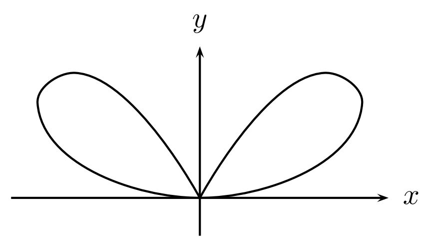


Figura 4.74:

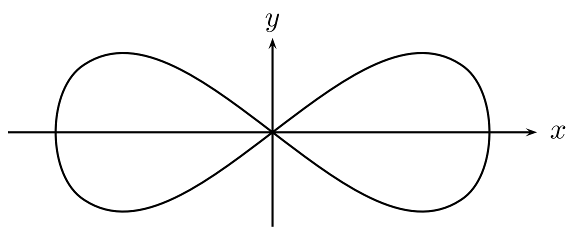


Figura 4.75:

4. **Concoide de Nicomedes.**
$$r = a\sec(\theta) \pm b.$$
En coordenadas rectangulares: $(x-a)^2(x^2+y^2) = b^2x^2$.

5. **Caracol de Pascal.**
$$r = b + a\cos(\theta).$$

6. **Ovalos de Cassini.**
$$(x^2+y^2+a^2)^2 - 4a^2x^2 = c^4.$$

7. **Rosa de tres pétalos.**

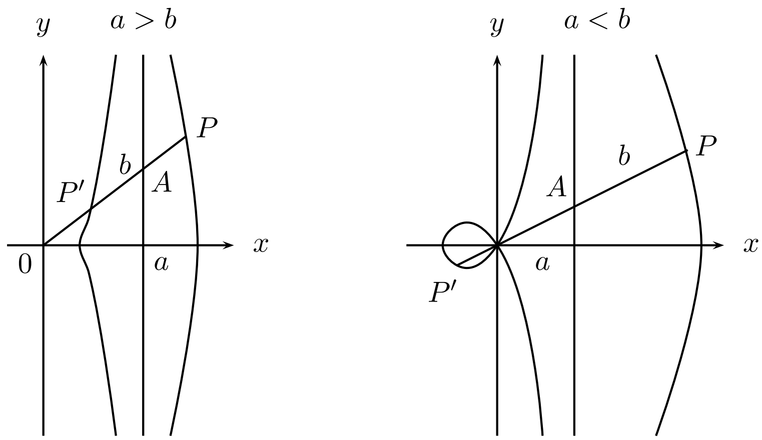


Figura 4.76:

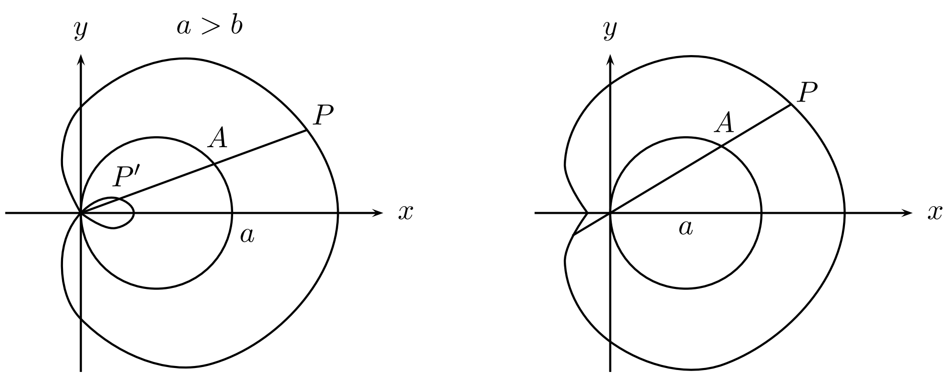


Figura 4.77:

8. **Rosa de cuatro pétalos.**

9. **Rosa de n pétalos.**

   Si k es par, $n = 2k$, si k es impar, $n = k$.

10. **Espiral de Arquimedes.**

$$r = a\theta.$$

11. **Espiral hiperbólica.**

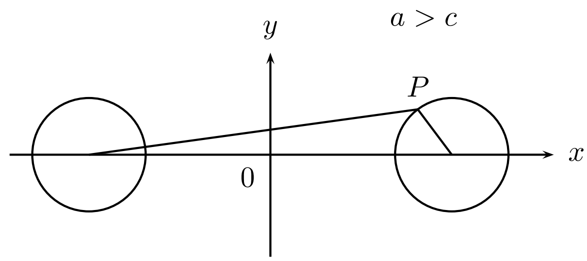


Figura 4.78:

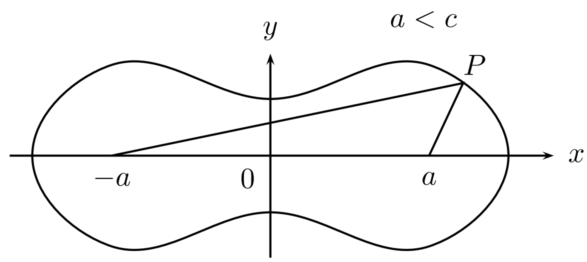


Figura 4.79:

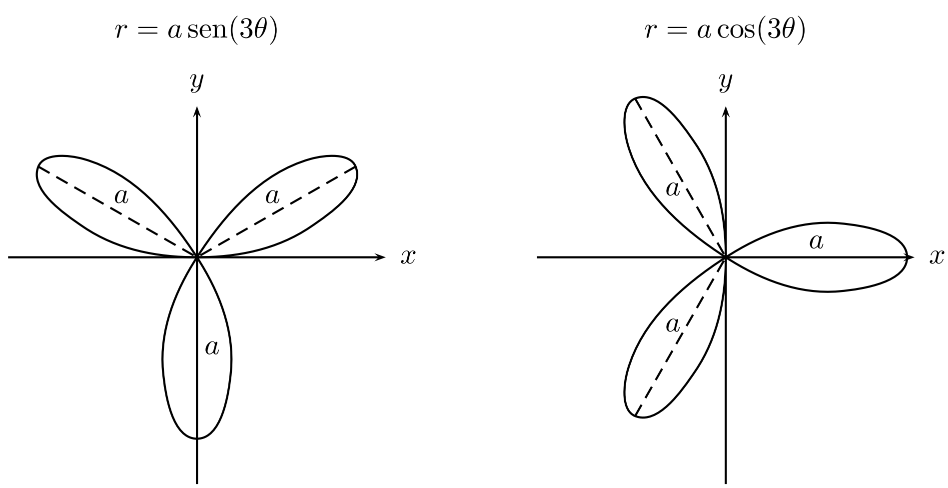


Figura 4.80:

$r = a\,\mathrm{sen}(2\theta)$ $\qquad$ $r = a\cos(2\theta)$

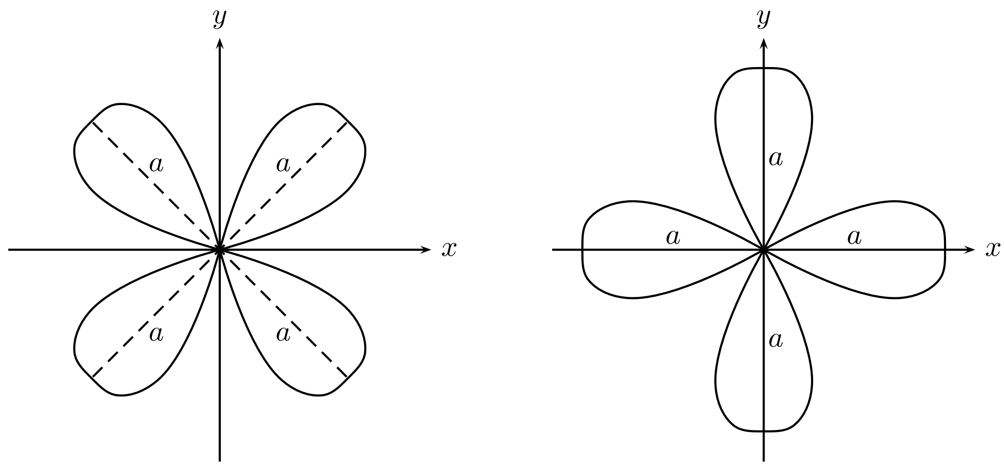


Figura 4.81:

$r = a\,\mathrm{sen}(k\theta)$ $\qquad$ $r = a\cos(k\theta)$

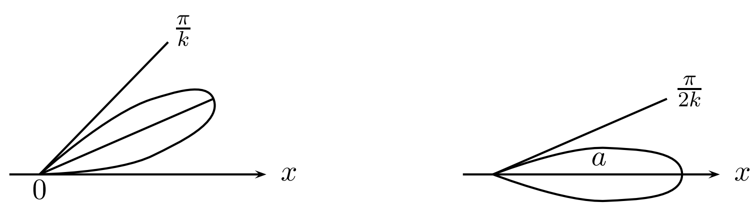


Figura 4.82:

$$r\theta = a.$$

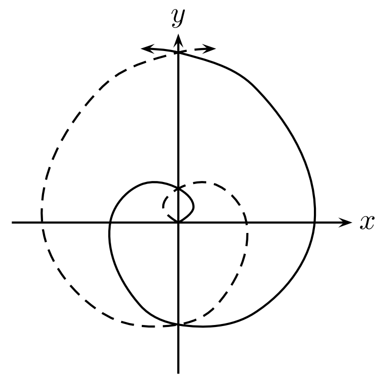


Figura 4.83:

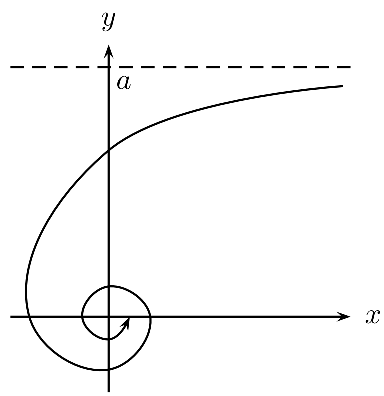
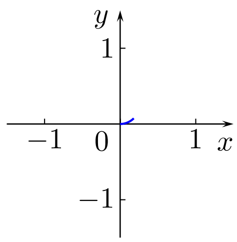
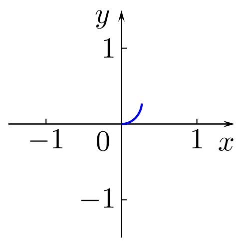


Figura 4.84:

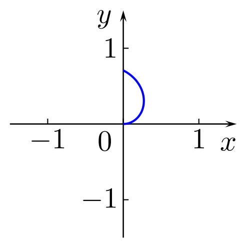
Gráfica parcelada de $r = \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$



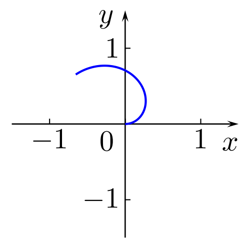
(a) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{8}$



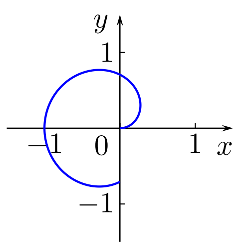
(b) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$



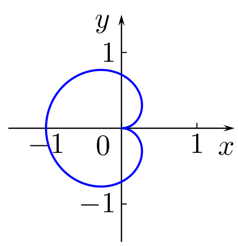
(c) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$



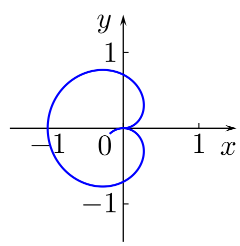
(d) $0 \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$



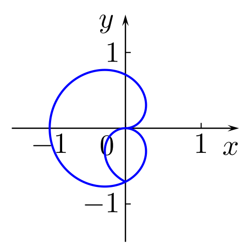
(e) $0 \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$



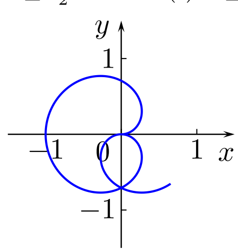
(f) $0 \leq \theta \leq 2\pi$



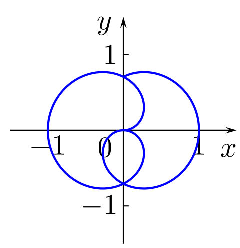
(g) $0 \leq \theta \leq \frac{17\pi}{8}$



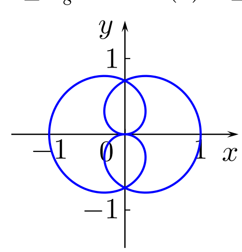
(h) $0 \leq \theta \leq \frac{5\pi}{2}$



(i) $0 \leq \theta \leq \frac{11\pi}{4}$



(j) $0 \leq \theta \leq \frac{7\pi}{2}$



(k) $0 \leq \theta \leq 4\pi$

4.7. Aplicaciones IV: problemas de máximo y mínimo

Los problemas de máximo y mínimo tienen cierta rutina que es bueno practicar. En general, del enunciado debe encontrarse la función a optimizar. Si ésta resulta una función que depende de más de una variable, entonces de los datos del problema se deben deducir relaciones entre las variables de modo que estas permitan reemplazar en la expresión de la función las otras variables para que la función que nos interesa sea una función de una variable. Sólo entonces se aplican los teoremas que permiten determinar máximos y mínimos.

1. Demuestre que entre todos los rectángulos con diagonal dada $d = 1$, el que tiene mayor área, es el cuadrado.

Solución: Considerar un rectángulo de lados x e y.

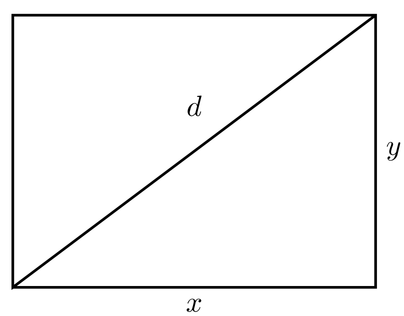


Figura 4.85:

Como $d = 1$, se tiene:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

La función que debemos ser máximizar es:
$A(x, y) = xy = x\sqrt{1 - x^2}$. Se elige el signo positivo para x e y, pues son longitudes.

$$A(x) = x\sqrt{1 - x^2}; \qquad x \in [0, 1]$$

Así tenemos:

$$A'(x) = \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{1-}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Entonces,

$$A'(x) = 0 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Por lo tanto:
$x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, maximiza $A(x)$. El correspondiente valor de y es
$y = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Luego,
$x = y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. El rectángulo pedido es un cuadrado.

2. Se necesita fabricar una caja rectangular, de base cuadrada, sin tapa y cuya capacidad (volumen) sea de 500 cm^3. Calcule las dimensiones que debe tener dicha caja de manera que el material empleado sea mínimo.

Solución: Para que el material empleado sea mínimo, debe ser mínima el área total de la caja $A = x^2 + 4xy = A(x,y)$.

Como $V = x^2y \iff 500 = x^2y \iff y = \dfrac{500}{x^2}$; reemplazando esta igualdad en A, queda.

$$\begin{array}{lclcl}
A(x) & = & x^2 & + & 4x\dfrac{500}{x^2} \\
A(x) & = & x^2 & + & \dfrac{2000}{x} \\
A'(x) & = & 2x & + & 2000(-1)x^{-2} \\
A'(x) & = & 0 & \iff & 2x - \dfrac{2000}{x^2} = 0 \\
 & & & \iff & 2x^3 - 2000 = 0 \\
 & & & \iff & (x-10)(x^2+10x+100) = 0 \\
 & & & \iff & x = 10;\ \text{ya que} \\
 & & & & x^2+10x+100 \text{ no tiene raíces reales}
\end{array}$$

Usando Criterio de la segunda derivada, se tiene que:

$A''(x) = 2 - 2000(-2)x^{-3}$
$A''(10) = 2 + \dfrac{4000}{1000} = 2 + 4 > 0$

Por lo tanto:

$$\begin{array}{rcl} x &=& 10 \text{ minimiza } A(x) \\ y &=& \dfrac{500}{100} = 5 \end{array}$$

$x = 10, y = 5$ son las dimensiones que minimizan $A(x, y)$.

3. Se va a cortar una viga con sección transversal rectangular de un tronco de sección tranversal circular con radio r conocido. Se supone que la resistencia de la viga es directamente proporcional al producto del ancho por el cuadrado de la altura de su sección transversal.Encuentre las dimensiones de la sección transversal que dé a la viga la mayor resistencia.

Solución:

- (1) $R(x, y) = Cxy^2$; C constante positiva.
- (2) $y^2 + x^2 = (2r)^2$ (Teorema de Pitágoras en el rectángulo.)

La función a maximizar es $R(x, y)$. En la ecuación (2) se despeja y^2, y se reemplaza en (1):

$$\begin{array}{rcl} R(x) &=& Cx(4r^2 - x^2) \\ &=& 4Cr^2x - Cx^3 \\ R'(x) &=& 4Cr^2 - 3Cx^2 \\ R'(x) = 0 \Longleftrightarrow C(4r^2 - 3x^2) &=& 0 \Longleftrightarrow 4r^2 - 3x^2 = 0 \Longleftrightarrow \\ (2r - \sqrt{3}x)(2r + \sqrt{3}x) &=& 0 \Longleftrightarrow x = \pm\dfrac{2r}{\sqrt{3}} \end{array}$$

Por ser x una longitud, se elige $x = \dfrac{2r}{\sqrt{3}}$.

Para verificar que este valor de x maximiza la resistencia, se puede usar el criterio de la segunda derivada.

$$R''(x) = -6Cx$$

$$R''\left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right) = -6C \cdot \frac{2r}{\sqrt{3}} < 0$$

Por lo tanto, en $x = \dfrac{2r}{\sqrt{3}}$ la función $R(x)$ alcanza un máximo, el correspondiente valor de y es:

$$y^2 + \frac{4r^2}{3} = 4r^2$$

$$y^2 = \frac{8r^2}{3} \Longrightarrow y = 2r\sqrt{\frac{2}{3}}$$

.

4. **Problema de la vaca perezosa que se convirtió en física**

   Este es un viejo problema que aparece bajo diferentes formas en muchos textos.

   Al atardecer, las vacas entran a un corral por una puerta ubicada en un punto A; luego se dirigen automáticamente a un estero a tomar agua. El estero sirve como límite del canal. Después se dirigen a la puerta del establo, ubicada en B.

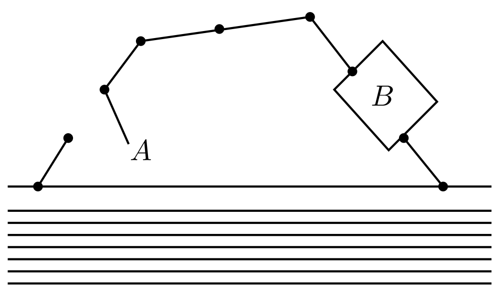
   

   Figura 4.86:

   Una vaca muy perezosa y, por lo tanto, inteligente, quiso minimizar el número de pasos que debería efectuar para ir primero al estero, beber agua y entrar al establo a dormir. Procedió de la siguiente forma:

   El estero está sobre una recta que tomó como el eje X; el eje Y lo tomó como la perpendicular de A al eje X. Llamó $P = (x, 0)$ al punto en el estero en el cual debería beber para minimizar el número de pasos.

   Como en la figura 2.6.2, sean $A = (0, a)$, $B = (c, b)$,

$$s = |AP| + |PB| = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(c - x)^2 + b^2}.$$

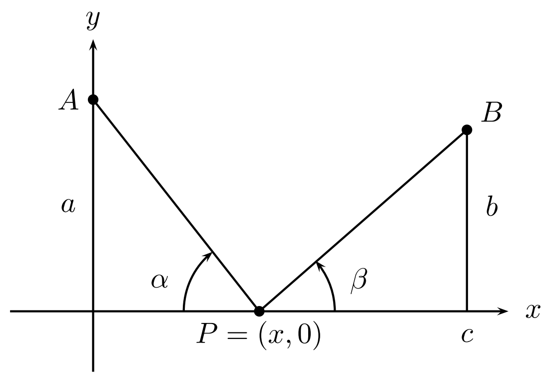


Figura 4.87:

para hallar donde s es mínima, la vaca procedió como sigue:

$$\frac{ds}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{c - x}{\sqrt{(c - x)^2 + b^2}},$$

luego

$$\frac{ds}{dx} = 0 \text{ si y sólo si } \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{c - x}{\sqrt{(c - x)^2 + b^2}}.$$

Esta ecuación debe resolverse para $x \in (0, c)$. Si x no estuviese en el intervalo, los signos de los miembros de la ecuación serían distintos.

Elevando al cuadrado se obtiene:

$$x^2 \left[(c - x)^2 + b^2\right] = (c - x)^2(x^2 + a^2),$$

cancelando $x^2(c - x)^2$ se llega a $b^2x^2 = a^2(c - x)^2$, luego $bx = \pm a(c - x)$. Como se debe estar en el intervalo $(0, c)$ sólo sirve el signo $+$. Por lo tanto,

$$x = \frac{ac}{a + b}.$$

Calculando ahora la segunda derivada de s respecto a x tenemos:

$$\frac{d^2s}{dx^2} = \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{b^2}{[(c - x)^2 + b^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Esta derivada es positiva para todo $x \in \mathbb{R}$; por tanto, s tiene un mínimo relativo en $x = \dfrac{ac}{a+b}$ y por ser $\dfrac{d^2s}{dx^2}$ de signo constante, este mínimo es absoluto.
Como el problema inicial es un problema geométrico, observemos que si α y β son los ángulos indicados en la figura 2.6.2, entonces :

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} \text{ y } \cos\beta = \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2+b^2}},$$

por lo tanto, la ecuación $\dfrac{ds}{dx} = 0$ se convierte en $\cos\alpha = \cos\beta$. Como α y β son ángulos agudos, la única solución es $\alpha = \beta$. Luego, la vaca se dirigió a beber agua a un punto P en la orilla del estero, de tal modo que éste forma ángulos iguales con las rectas que van de P a la puerta A y a la puerta B.

Esa noche nuestra vaca pensó que un rayo de luz tiene un comportamiento similar al problema que acabamos de resolver. Imaginó que R es la superficie de un espejo en un medio de índice de refracción constante y que un haz de luz decide ir de A hasta B, reflejándose en el espejo. Para minimizar el tiempo, la luz debe seguir el camino ya calculado. En este contexto α se llama **ángulo de incidencia** y β es el **ángulo de reflexión** y se tiene el conocido principio que al reflejarse un rayo de luz sobre un espejo en el vacío, los ángulos de reflexión y de incidencia son iguales. Lamentablemente para nuestra vaca este principio fue anunciado por el gran físico-matemático Pierre de Fermat en el siglo XVII y se llama en óptica **ley de reflexión**.

Use este principio en su mesa favorita: la mesa de pool.

5. Con un trozo de material rectangular, se forma una caja abierta suprimiendo de cada esquina cuadrados iguales y doblando los lados hacia arriba. Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que se puede construir de esta manera, si el material tiene dimensiones a y b.

   Solución:

   La situación geométrica es la siguiente:

   Volumen de la caja $= V(x) = (a-2x)(b-2x)x$. Luego

   $$V(x) = 4x^3 - 2(a+b)x^2 + abx$$

   y su derivada es:

   $$V'(x) = 12x^2 - 4(a+b)x + ab.$$

   $V'(x)$ se anula en $x_{\pm} = \dfrac{(a+b) \pm \sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}$. Ambas raíces son reales y positivas, entonces, como

   $$V''(x_{\pm}) = \pm 4\sqrt{a^2+b^2-ab},$$

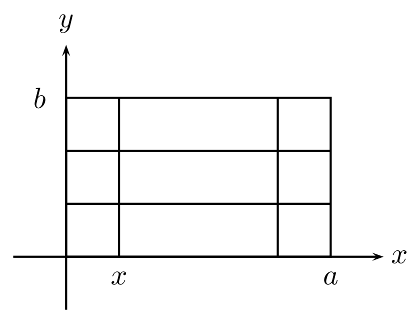


Figura 4.88:

se tiene un máximo en x_- y un mínimo en x_+. Las dimensiones de la caja son: largo $= a - 2x_-$, ancho $= b - 2x_-$ y alto $= x_-$.

6. Una tropa de scouts saldrá de campamento y necesitan comprar genero para construir carpas cónicas, sin piso y de un volumen dado. Para disminuir los costos del campamento necesitan comprar el mínimo de genero. Entonces se preguntan: ¿Qué relación debe existir entre la altura de la tienda y el radio del suelo para que el área lateral sea mínima?

   Solución:

   El volumen es $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ y se quiere minimizar $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$. Podemos despejar h en función de r en la expresión del volumen y reemplazar en S para que nos quede una función de una variable $S(r)$ a la cual podemos aplicar los procedimientos de la sección 2.5. Pero esta vez utilizaremos un método diferente que puede ser útil en situaciones más complejas.

   Queremos minimizar $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$, lo que es equivalente a minimizar $W = \left(\dfrac{S}{\pi}\right)^2 = r^4 + r^2h^2$.

   Derivando V y W respecto a r obtenemos,

$$0 = \frac{dV}{dr} = \frac{\pi}{3}\left(2rh + r^2\frac{dh}{dr}\right),$$

   lo que implica $\dfrac{dh}{dr} = -\dfrac{2h}{r}$.

$$\frac{dW}{dr} = 4r^3 + 2rh^2 + 2r^2h\frac{dh}{dr}.$$

Por tanto, $\dfrac{dW}{dr} = 2r(2r^2 - h^2)$, y las raíces de esta ecuación se obtienen para $h = r\sqrt{2}$. Como $\dfrac{d^2W}{dr^2} = 12r^2 + 6h^2 > 0$, se advierte que S tiene un único mínimo absoluto cuando $\dfrac{h}{r} = \sqrt{2}$.

7. De todos los triángulos isósceles inscritos en una circunferencia de radio r, ¿ Cúal es el que tiene área máxima ? **Solución:**

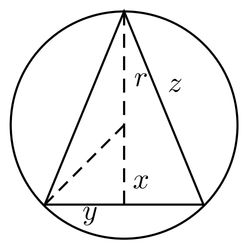


Figura 4.89:

Área $= y(r+x)$, usamos la relación $x^2 + y^2 = r^2$ para reemplazar una de la variables en función de la otra, y nos queda

$$A(y) = y(r + \sqrt{r^2 - y^2}).$$

$$\begin{aligned} A'(y) &= r + \sqrt{r^2 - y^2} + \frac{1}{2}\frac{-2y^2}{\sqrt{r^2 - y^2}} \\ &= \frac{r\sqrt{r^2 - y^2} + r^2 - 2y^2}{\sqrt{r^2 - y^2}}. \end{aligned}$$

$A'(y) = 0$, es equivalente a $r\sqrt{r^2 - y^2} + r^2 - 2y^2 = 0$, ecuación que tiene solución $y = \dfrac{r\sqrt{3}}{2}$. Con este valor de y podemos calcular x :

$$x^2 = r^2 - \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{r^2}{4}.$$

Es decir, $x = \dfrac{r}{2}$.

Para calcualr el lado z del triángulo de la figura, aplicamos nuevamente el teorema de Pitágoras:

$$z^2 = (r+x)^2 + y^2 = \left(\frac{3r}{2}\right)^2 + \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3r^2.$$

Por lo tanto $z = r\sqrt{3}$.

Verifiquemos que el valor de y encontrado es efectivamente un máximo para el área calculando el signo de la segunda derivada en $\dfrac{r\sqrt{3}}{2}$.

$$\begin{aligned} A''(y) &= \frac{'5r^2y + 2y^3}{(r^2-y^2)\sqrt{r^2-y^2}} \\ A''\left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right) &= {'5}r^2\frac{r\sqrt{3}}{2} + \frac{3r^3\sqrt{3}}{4} \\ &= -\frac{7r^3\sqrt{3}}{4} \ < \ 0. \end{aligned}$$

8. Entre todos los triángulos rectángulos con perímetro $2p$, ¿ cúal es el que tiene área máxima ?.

Solución:

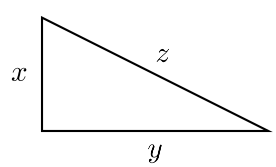


Figura 4.90:

De la figura tenemos

$$\begin{aligned} x+y+z &= 2p && (4.68) \\ x^2+y^2 &= z^2 && (4.69) \\ A &= \frac{xy}{2}. && (4.70) \end{aligned}$$

De la ecuación (4.68) tenemos:

$$
\begin{aligned}
z &= 2p - x - y \ \text{, elevando al cuadrado se tiene} \\
z^2 &= 4p^2 + x^2 + y^2 - 4px - 4py + 2xy \ \text{ , en virtud de la ecuación 4.69 nos queda} \\
4p^2 &= 4px + 4py - 2xy \text{ , despejando y obtenemos} \\
y &= \frac{2p(p-x)}{2p-x}.
\end{aligned}
$$

Este valor de y lo reemplazamos en la ecuación (4.70) para dejar el área expresada como función de una variable:

$$A(x) = \frac{(px - x^2)p}{2p - x}.$$

Entonces,

$$A'(x) = \frac{(x^2 - 4px + 2p^2)p}{(2p-x)^2}.$$

Para que se anule $A'(x)$, basta que se anule el numerador, por lo que debemos resolver la ecuación

$$x^2 - 4px + 2p^2 = 0,$$

cuyas soluciones son:

$$x = p(2 \pm \sqrt{2}).$$

De estas dos posibles soluciones debemos elegir $x = p(2 - \sqrt{2})$, pues el otro valor es mayor que el perímetro, lo cual no puede ser. Con este valor de x calculamos y y z. Así, $y = p(2 - \sqrt{2})$, $z = 2p(\sqrt{2} - 1)$, lo que nos dice que el triángulo es isósceles.

Ahora verificaremos que los valores corresponden a un máximo usando el criterio de la segunda derivada.

$$
\begin{aligned}
A''(x) &= \frac{p[(2p-x)^2(2x-4p) - (x^2 - 4px + 2p^2)(2(2p-x)(-1))]}{(2p-x)^4} \\
&= \frac{p(2p-x)\left[(2p-x)(2x-4p) + 2x^2 - 8px + 4p^2\right]}{(2p-x)^4} \\
&= \frac{2p-x}{(2p-x)^4}[-4p^3] \ < \ 0.
\end{aligned}
$$

El signo de la segunda derivada nos confirma que los valores obtenidos corresponden a un máximo.

9. *a*) Si la suma de dos variables x e y es constante, ¿pueden la suma de sus cuadrados y la suma de sus cubos tener un máximo y un mínimo ?

   b) Una recta de longitud l está dividida en dos segmentos que sirven de diámetros a dos esferas. ¿Cúal es el máximo y el mínimo de la suma de los volúmenes de las dos esferas ?

   Solución:

   a) Si $x+y=c$ entonces, $x=y-c$. la función por analizar es $f(y)=(c-y)^2+y^2$. $f'(y)=0$ implica $-2(c-y)+2y=0$. Lo que nos da los valores $x=y=\dfrac{c}{2}$. Como $f''(y)=4$, quiere decir que x^2+y^2 alcanza su mínimo para $x=y=\dfrac{c}{2}$. Como tanto x como y varían entre 0 y c , f alcanza su máximo en los extremos $x=0$ e $y=c$. Sea $g(y)=(c-x)^3+y^3=c^3-3c^2y+3cy^2-y^3+y^3$ la suma de los cubos.
   $g'(y)=-3c^2+6cy=0$ implica $y=\dfrac{c}{2}$ lo que a su vez determina el valor de $x=\dfrac{c}{2}$. Como $g''(y)=6c$, los valores obtenidos dan un mínimo de la función.

   b) $x+y=l$, usando el resultado anterior tenemos que la función $\dfrac{\pi x^3}{6}+\dfrac{\pi y^3}{6}$ alcanza su mínimo para $x=y=\dfrac{l}{2}$ y el máximo cuando x o y es nulo, es decir, cuando sólo hay una esfera.

10. Determine las bases del trapecio de área máxima inscrito en un semicírculo de radio r

    Solución: Supondremos, para obtener área máxima, que la base mayor del trapecio esta sobre el diámetro del semicírculo.

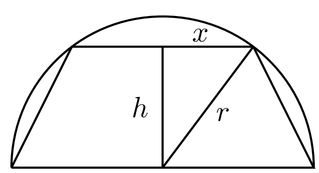


Figura 4.91:

El área del trapecio es $A=2(\dfrac{rh}{2})+2(\dfrac{xh}{2})=(r+x)h=(r+x)\sqrt{r^2-x^2}>0.$

Máximizar A es equivalente a máximizar $A^2=(r+x)^2(r^2-x^2)$, pues A es positiva.

$$\frac{d\,A^2}{d\,x} = 2(r+x)^2(r-2x) = 0 \iff x = \frac{r}{2} \text{ pues } (r+x)^2 \neq 0$$
$$\frac{d^2\,A^2}{d\,x^2} = -4x(r+x) < 0$$

Luego las bases del trapecio son $2r$ y r. El área máxima es $A = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}r^3$.

11. Se tiene una cuerda de longitud l con un lazo corredizo que envuelve una columna cilíndrica de radio r. En el extremo P de la cuerda se ejerce una fuerza de tal magnitud que la rompe.

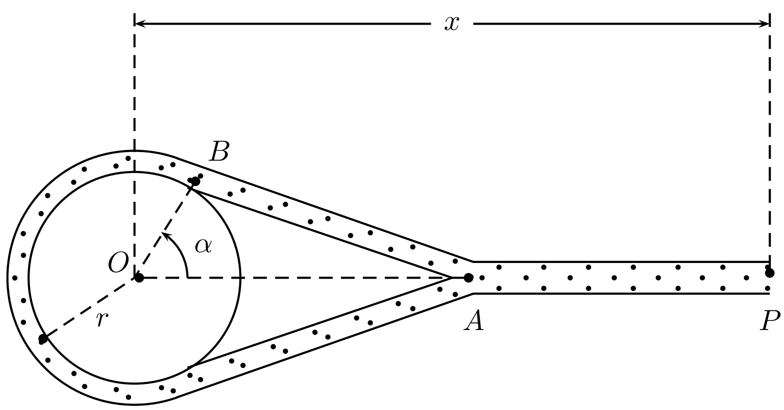


Figura 4.92:

Determinar la distancia x del centro O del cilindro al punto P.

Solución: Sean:

$$\begin{cases} x = OA + AP \\ l = 2\pi r - 2r\alpha + 2AB + AP \end{cases}$$

Entonces,

$$x - OA = AP = l - 2\pi + 2r\alpha - 2AB,$$

esto es:

$$x = l + OA - 2r(\pi - \alpha) - 2AB.$$

Como $OA = \dfrac{r}{\cos\,\alpha}$ y $BA = r\tan\alpha$, se tiene :

$$x(l) = l + r\left[\frac{1}{\cos\,\alpha} - 2(\pi - \alpha + \tan\alpha)\right]$$

Busquemos los valores extremos de esta función:

$$\frac{d\,x}{d\,\alpha} = r\left[\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\,\alpha} + 2 - \frac{2}{\cos^2\,\alpha}\right] = r\left[\frac{\operatorname{sen}\alpha - 2\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\,\alpha}\right]$$

Si $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, $\frac{d\,x}{d\,\alpha} = 0 \iff \operatorname{sen}\alpha - 2\operatorname{sen}^2\alpha = \operatorname{sen}\alpha(1 - 2\operatorname{sen}\alpha) = 0 \iff \alpha = 0$ o bien $\alpha = \frac{\pi}{6}$

Como $\dfrac{d\,x}{d\,\alpha}$ pasa de positiva a negativa en $\alpha = \frac{\pi}{6}$ y de negativa a positiva en $\alpha = 0$, tenemos en $\alpha = \frac{\pi}{6}$ un punto de máximo.

También se puede obtener este resultado evaluando $x(0)$ y $x(\frac{\pi}{6})$:

$$\begin{cases} x(0) = l + r((1 - 2\pi) \approx l - 5,2832r \\ x(l) = 2 + r(\frac{2}{\sqrt{3}} - 2\left(\pi - \frac{\pi}{6} + \frac{1}{\sqrt{3}})\right) \approx l - 5,2358r \end{cases}$$

Luego se tiene $x(\frac{\pi}{6}) > x(0)$, lo que implica que x tiene un máximo en $\frac{\pi}{6}$.

12. Una cancha de futbol mide 90×61 metros, y los arcos tienen un largo de 11 metros. Un puntero izquierdo, que chutea muy bien, se mueve pegado a su costado. ¿A que distancia del banderin del corner debe chutear para obtener las máximas posibilidades de marcar un gol?

    Solución: Veamos primeramente la situación geométrica:

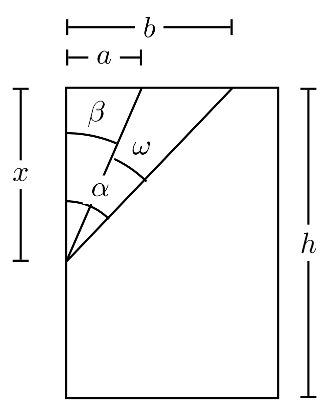


Figura 4.93:

Queremos máximizar $\omega = \alpha - \beta$, lo que es equivalente a máximizar su tangente.

$$\tan\omega = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{b}{x} - \frac{a}{x}}{1 + \frac{b}{x}\frac{a}{x}} = \frac{bx - ax}{x^2 + ab}$$

Como $\dfrac{d\tan\omega}{dx} = \dfrac{(b-a)(x^2+ax) - 2x(b-a)x}{(x^2+ab)^2} = 0 \iff ax^2 - bx^2 + ab^2 - a^2b = 0 \iff x^2(a-b) - ab(a-b) = 0$, y esto ocurre solo si $x = \sqrt{ab}$ (pues $(a-b) \neq 0$)

Por otro lado, se tiene que $2a + 11 = 61$ y $a + 11 = b$, lo que implica que $a = 25$ y $b = 36$. Luego $x = \sqrt{ab} = \sqrt{25 \cdot 36} = 30$ metros.

13. Dada una circunferencia de radio r. De todos los tríangulos isóceles circuncritos, determine el de menor área.

Solución:

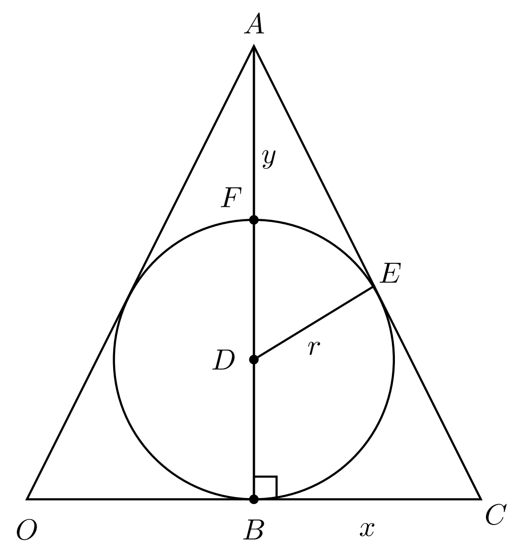


Figura 4.94:

Observe que el $\triangle ADE$ es rectángulo en E.

Consideremos $x = \overline{BC}$ e $y = \overline{FA}$, luego

$$\overline{AE}^2 = (y + r)^2 - r^2 = y^2 + 2ry.$$

De los teoremas de semejanza de triángulos, tenemos que:

$$\triangle ABC \cong \triangle AED.$$

Entonces,

$$\frac{x}{r} = \frac{y+2r}{\overline{AE}},$$

esto es,

$$\frac{x}{r} = \frac{y+2r}{\sqrt{y^2+2ry}}.$$

Por lo tanto,

$$x = \frac{r(y+2r)}{\sqrt{y^2+2ry}}. \tag{4.71}$$

La función que queremos minimizar es el área A del triángulo OCA. Como Area= $x \cdot h = x(2r+y)$, entonces el área está dependiendo de dos variables x e y. Para dejarla como función de una variable usaremos la ecuación 4.71 y nos queda:

$$A(y) = \frac{r(y+2r)^2}{\sqrt{y(y+2r)}}.$$

$$\begin{aligned} A'(y) &= \frac{2r(y+2r)\sqrt{y^2+2ry} - \dfrac{r(y+2r)^2(y+r)}{\sqrt{y^2+2ry}}}{y^2+2ry} \\ &= \frac{2r(y+2r)(y^2+2ry) - r(y+2r)^2(y+r)}{(y^2+2ry)\sqrt{y^2+2ry}}. \end{aligned}$$

Si $A'(y) = 0$ se debe tener que $2yr((y+2r)^2 - r(y+2r)^2(y+r) = 0$, es decir, $r(y+2r)^2(y-r) = 0$, esto es,

$$\begin{cases} y = -2r \\ y = r. \end{cases}$$

El valor $y = -2r$ se descarta pues es negativo, por tanto $y = r$.

El valor correspondiente de x es:

$$x = \frac{r(3r)}{\sqrt{r^2+2r^2}} = \frac{3r}{\sqrt{3}} = r\sqrt{3}.$$

y el área mínima es $3\sqrt{3}r^2$. Ahora, debemos verificar que este valor de x y de y minimizan el área. En este caso , debido a la factorización de A', es inmediato usando el criterio de la primera derivada.

14. Doble una hoja de papel rectangular haciendo coincidir el vértice C con un punto del lado AD. Determine x para que la longitud del pliege l sea mínima. Obtenga además la longitud del pliege mínimo.

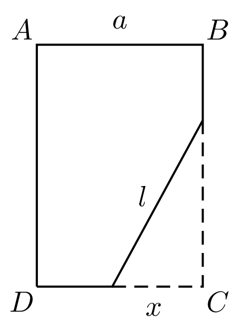


Figura 4.95:

Solución:

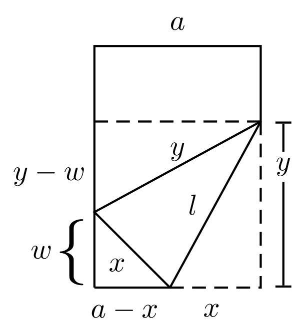


Figura 4.96:

Usando el teorema de Pitágoras, tenemos:

$$w^2 = x^2 - (a-x)^2 \tag{4.72}$$

$$l^2 = x^2 + y^2 \tag{4.73}$$

$$(y-w)^2 + a^2 = y^2 \tag{4.74}$$

Por (4.74) tenemos que

$$y = \frac{w^2 + a^2}{2w}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} l^2 &= x^2 + \left(\frac{w^2+a^2}{2w}\right)^2 \\ &= x^2 + \frac{(w^2+a^2)^2}{4w^2} \end{aligned}$$

y usando (4.72) se tiene que

$$\begin{aligned} l^2 &= x^2 + \frac{[x^2-(a-x)^2+a^2]^2}{4(x^2-(a-x)^2)} \\ &= x^2 + \frac{[x^2-a^2+2ax-x^2+a^2]^2}{4(x^2-a^2+2ax-x^2)} \\ &= x^2 + \frac{ax^2}{2x-a}. \end{aligned}$$

Así,

$$l = \sqrt{x^2 + \frac{ax^2}{2x-a}}.$$

Por otro lado, como $\sqrt{x}$ es creciente, basta minimizar la cantidad subradical, es decir:

$$f(x) = x^2 + \frac{ax^2}{2x-a}.$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x + \frac{2ax(2x-a)-2ax^2}{(2x-a)^2} \\ &= \frac{2x(2x-a)^2+4ax^2-2a^2x-2ax^2}{(2x-a)^2} \end{aligned}$$

Si $f'(x)=0$ se debe tener que

$$2x(4x^2-4ax+a^2)+2ax^2-2a^2x=0,$$

esto es,

$$x(4x-3a)=0.$$

Por lo tanto, $x=\dfrac{3a}{4}$.
La verificación que este valor de x minimiza l y el cálculo del valor mínimo de l se deja al estudiante.

Ejercicios propuestos

1. Entre todos los rectángulos de perímetro dado, encuentre el de mayor área.

2. Entre todos los cilindros circulares rectos de volumen dado, hallar el de menor área.

3. Se quiere cerrar un potrero en forma rectangular y dejar uno de los lados en un río recto. Si se dispone de 1,000 metros de alambre y el cerco debe ocupar 3 corridas de este alambre, ¿cuál es el potrero de mayor área que se puede cercar con este alambre?

4. Una escalera de 6 metros está apoyada sobre una pared de $2,80$ metros de altura. Determinar la proyección horizontal máxima del saliente de la escalera al desplazar de la pared el pie de la escalera.

   Indicación: Use como variable independiente el ángulo que forma la escalera con el suelo.

5. Considere el punto (a, b) en el primer cuadrante. Hallar los puntos de la curva señalada más próximos al punto (a, b).

   a) $y = x^2$.

   b) $x^2 + \dfrac{y^2}{2} = 1$.

   c) $x^2 - y^2 = 1$.

6. El agua sale de un estanque hemisférico (base circular) por un orificio del fondo. Sea h la altura del agua por encima del orificio y V el volumen del agua que queda en el estanque en el tiempo t. La física dice que $\dfrac{dV}{dt}$ es proporcional a $\sqrt{h}$. Pruebe que el descenso del nivel del agua es mínimo cuando la profundidad es dos tercios del radio de la base.

7. Un camión debe recorrer $500 Km$ a una velocidad constante $v\ \frac{Km}{h}$. El litro de bencina cuesta \$200 y el consumo del camión es $10 + \frac{v^2}{100}$ litros por hora.

   El conductor cobra \$7.500 por hora y cumple (excepcionalmente) las reglas del transito, es decir, $50 \leq v \leq 100$. Determine la velocidad más económica y el costo del viaje.

4.8. Aplicaciones V: Razón de cambio y diferenciales

4.8.1. Razones de cambio

La **razón de cambio** de una función $y = f(x)$ es una forma de interpretar la derivada de la función como veremos a continuación.

Observemos que si el argumento x se incrementa en Δx, entonces a la función y le corresponde un incremento Δy. Así tenemos:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

El incremento de la función Δy correspondiente al incremento del argumento Δx se obtiene de:

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= f(x + \Delta x) \\ y &= f(x) \end{aligned}$$

Restando miembro a miembro las dos ecuaciones anteriores, se tiene:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Definición 4.8.1

1. La **razón de cambio promedio** de la función y en el intervalo de valores del argumento desde x hasta $x + \Delta x$ se expresa por la razón:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

El cuociente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ indica el número de unidades del incremento de la función por unidades del incremento del argumento.

2. **La razón de cambio instantánea** de la función y, como ya lo hemos visto, es:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Ejercicios resueltos

1. Encontrar la razón de cambio promedio de una función $y = 4x^3 - 2x + 1$ cuando x cambia de 2 a $2,5$.

   Solución: Sean $x_1 = 2$ y $x_2 = 2,5$, entonces $\Delta x = 2,5 - 2 = 0,5$. Como $y_1 = 29$, $y_2 = 58,5$; por lo tanto, $\Delta y = y_2 - y_1 = 29,5$. Luego,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{29,5}{0,5} = 59.$$

Ahora calcularemos la razón de cambio para cualquier valor del argumento.

$$y + \Delta y = 4(x + \Delta x)^3 - 2(x + \Delta x) + 1,$$

y como

$$y = 4x^3 - 2x + 1$$

Restando obtenemos:

$$\Delta y = 12x^2 \Delta x + 12x(\Delta x)^2 + 4(\Delta x)^3 - 2(\Delta x),$$

entonces

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 12x^2 + 12x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 2.$$

Observemos que si $\Delta x \to 0$, entonces $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to 12x^2 - 2$.

2. Calcular la razón de cambio del área de un círculo con respecto a su radio.

   Solución: El área de un círculo es $A = \pi r^2$. Luego

$$\frac{\Delta A}{\Delta r} = \frac{\pi(r + \Delta r)^2 - \pi r^2}{\Delta r} = 2\pi r + \pi \Delta r.$$

   Entonces, cuando $\Delta r \to 0$ queda la longitud de la circunferencia.

   Si se tiene un círculo cuyo radio es $2cm$ ¿Cuánto se incrementa el área si el radio crece en $1cm$?

   Como $r = 2$, $\Delta r = 1$, entonces de $\dfrac{\Delta A}{\Delta r} = 2\pi r + \pi \Delta r$, se tiene $\Delta A = 5\pi$.

Ejercicios propuestos

1. Encuentre la razón de cambio promedio de las siguientes funciones:

$$y = 6x^2 - 3x + 1 \ ; \ y = \cos\ x^2 \ ; \ y = \frac{1 + \operatorname{sen} x}{x^2},$$

   cuando x cambia de 3 a 5 y de -1 a 1.

2. Calcule la razón de cambio del área de un tríangulo respecto a su perímetro.

3. Calcule la razón de cambio del volumen de un cilindro respecto del área de su base, manteniendo fija la altura. ¿Es esta razón de cambio la misma si ahora mantenemos fija el área de la base y movemos la altura?

4. *a)* Un objeto circular va aumentando de tamaño de manera cuando el radio es 6, la tasa de variación del mismo es 4. Encuentre la tasa de variación del área cuando el radio es 6.

   b) Suponga que el objeto circular de (a) es la sección transversal de un objeto esférico. Encuentre la tasa de variación del volumen cuando el radio es 6. (Volumen de la esfera = $\frac{4}{3}\pi r^3$.)

   c) Suponga que la tasa de variación del área de la sección transversal circular es 5 cuando el radio es 3. Encuentre la tasa de variación del volumen cuando el radio es 3.

5. Si la población de una ciudad crece a partir de 10^6 habitantes a una cantidad $P(t)$ dada por :
$$P(t) = 10^6 + 10^3 t^2,$$
donde t se mide en años.

   a) Determine la rapidez con crece la población.

   b) Determine la población despues de 10 años.

   c) ¿Cuál es la tasa de creciemiento cuando $t = 10$ años ?

4.8.2. Diferenciales

La **diferencial** de una función $y = f(x)$ se define como:
$$df(x) = f'(x)dx \text{ o simplemente } dy = f'(x)dx.$$
Por ejemplo si $f(x) = 3x^4 - 2x + 1$, entonces $dy = (12x^3 - 2)dx$. Si $g(x) = \operatorname{sen}^2 3x$, entonces, $dy = -6 \operatorname{sen} 3x \cos\ 3x dx$.
Observemos que si $y = f(x)$, entonces su diferencial es $dy = f'(x)dx$ y como ya hemos visto $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, por lo tanto podemos escribir $dy = \dfrac{dy}{dx}dx$.
Gracias a esta observación podemos realizar formalmente las reglas de operación del cálculo de derivadas con diferenciales. Por ejemplo:
$$d(u \pm v) = \frac{du}{dx}dx \pm \frac{dv}{dx}dx = du \pm dv.$$
$$d(u \cdot v) = u\frac{dv}{dx}dx + v\frac{du}{dx}dx = udv + vdu.$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx}dx - u\dfrac{dv}{dx}dx}{v^2} = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

La regla de la cadena para $y = f(x)$, $x = g(\theta)$ toma la forma:

$$dy = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\theta}d\theta = f'(x)g'(\theta)d\theta = f'(g(\theta))g'(\theta)d\theta.$$

Interpretación geométrica de la razón de cambio y el diferencial. Observemos primeramente que el incremento $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ lo podemos pensar como una función que depende de x y de Δx, es decir, $\Delta y = \Delta(x, \Delta x)$.

Fijemos x como x_0 y definamos $\Delta x = h$ pequeño, entonces el incremento Δy es :

$$\Delta y = \Delta_f(h) = f(x_0 + h) - f(x_0).$$

Sea $T(x)$ la ecuación de la recta tangente a f en x_0, cuya ecuación es:

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Como $T(x)$ es la mejor aproximación lineal de $f(x)$ en una vecindad de x_0, o lo que es no mismo, $f(x) \approx T(x)$ para valores de x muy cercanos a x_0.

El incremento de Δy para $T(x)$ es:

$$\Delta_T(h) = T(x_0 + h) - T(x_0).$$

Pero,

$$T(x_0+h) - T(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x_0 + h - x_0) - [(f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x_0)],$$

Luego,

$$\Delta_T(h) = f'(x_0)h.$$

Comparemos en un gráfico Δy y dy.

Figura 2.9.1: Comparación entre Δy y dy.

La diferencial tambien puede interpretarse como una **función lineal de** $\mathbb{R}$ **en** $\mathbb{R}$, de la siguiente manera: $h \to f'(x_0)h$. Es usual denotar esta función por $dy(h)$, es decir, $dy(h) = f'(x_0)h$.

Observemos que $x \mapsto dy$ es una función cuyo dominio es el dominio donde f es derivable y su recorrido está en el espacio de las funciones lineales de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Esta interpretación es muy útil, pues para funciones de varias variables no es posible generalizar el concepto de derivada pero si el de diferencial, que será una aplicación lineal cuya matriz en las bases canónicas tiene por coeficiente las derivadas parciales.

Ejercicios resueltos

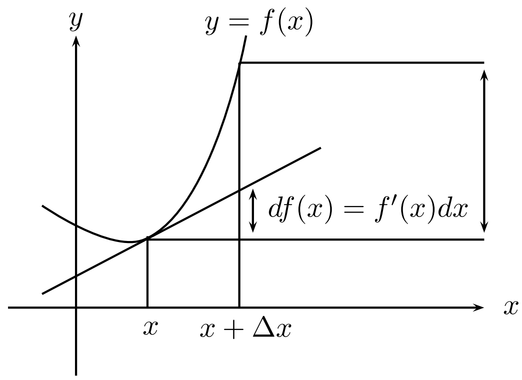


Figura 4.97: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

1. Si $f(x) = 3x^4 - 2x + 1$, entonces $dy = (12x^3 - 2)dx$.
2. Si $g(x) = \operatorname{sen}^2 3x$, entonces $dy = -6 \operatorname{sen} 3x \cos 3x dx$.
3. Si $y = x^3$, entonces $dy = 3x^2 dx$.
4. $d(\operatorname{tg}\theta) = \sec^2\theta d\theta$.
5. Si $y = x^2$, $x = \operatorname{sen}\theta$, entonces $dy = \dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{d\theta}d\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta d\theta$.
6. Calcular $\dfrac{d(\operatorname{sen} x^3)}{dx}$.

$$d(\operatorname{sen} x^3) = (\cos x^3)d(x^3) = \cos x^3(3x^2dx) = 3x^2\cos x^3 dx.$$

7. Calcular $\dfrac{dy}{dx}$ si $x^2 + y^3 - 2xy^2 = 0$.
   Tomando formalmente diferenciales a ambos lados de la ecuación: tenemos,

$$\begin{aligned} 0 &= d(x^2) + d(y^3) + d(-2xy^2) \\ &= 2xdx + 3y^2dy - 2d(xy^2) \\ &= 2xdx + 3y^2dy - 2y^2dx - 4xydy \\ &= (2x - 2y^2)dx + (3y^2 - 4xy)dy \end{aligned}$$

   Despejando en la última ecuación, obtenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2 - 2x}{3y^2 - 4xy}.$$

Observación: Estos diferenciales que, en rigor, se llaman diferenciales de primer orden son de gran utilidad para calcular antiderivadas o primitivas de funciones, como se verá más adelante. También existen los diferenciales de orden superior y su operatoria formal es la de las derivadas de orden superior.

Si $dy = f'(x)dx$, entonces $d^2y = f''(x)dx^2$ y , en general, $d^ky = f^{(k)}(x)dx^k$.

8. Si $y = f(x) = 2\cos^3 x$, entonces $dy = -6\cos^2 x \operatorname{sen} x dx$.

   $d^2y = (12\cos x \operatorname{sen}^2 x - 6\cos^3 x)dx^2$.

9. Encontrar $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ cuando y viene dada implícitamente por la expresión $x^3-2xy+y^4 = 1$.

$$\begin{aligned} 0 &= 3x^2dx - 2ydx - 2xdy + 4y^3dy \\ 0 &= (3x^2 - 2y)dx + (4y^3 - 2x)dy. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 3x^2}{4y^3 - 2x}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(4y^3 - 2x)(2\dfrac{dy}{dx} - 6x) - (2y - 3x^2)(12y^2\dfrac{dy}{dx} - 2)}{(4y^3 - 2x)^2}.$$

Reemplazando $\dfrac{dy}{dx}$ en la última expresión, nos queda:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2x + 2)(2y - 3x^2)(4y^3 - 2x) - 6x(4y^3 - 2x)^2 - 12y^2(2y - 3x^2)^2}{(4y^3 - 2x)^3}.$$

Ejercicios Propuestos

1. Calcule un valor aproximado de dos decimales para:

   a) $\sqrt{4{,}6}$
   b) $\sqrt[3]{7{,}8}$
   c) sen(0,2)
   d) cos(−0,2)

2. Determine una solución aproximada en $[0, \pi]$, con dos decimales, para la ecuación:

$$\cot x - 1,1 = 0$$

3. Determine solución aproximada, con dos decimales, de la ecuación:

$$x^3 + 8,4 = 0$$

4. ¿Cuánto varía el área de un disco, cuando el radio crece de 2 a 2.007 cm?

5. Cuánto varía el volumen de un cubo, cuando su arista varía de a a $a + \Delta l$ cm.

4.9. Aplicaciones VI: Física del movimiento

Supongamos una partícula que se mueve en línea recta en el eje cartesiano. Sea $s(t)$ el **desplazamiento** de la partícula, es decir, la coordenada de la partícula en el instante t. El desplazamiento más elemental ocurre cuando $s(t)$ es una función de tipo lineal de t; en tal caso,

$$s(t) = vt + s_0, \ \text{ con } \ v, s_0 \in \mathbb{R}.$$

s_0 se puede interpretar como la **posición inicial** (posición de la partícula en el tiempo $t = 0$) Veamos ahora como podemos interpretar la constante v.

Observemos que para dos valores cualesquiera de t, digamos, t_1 y t_2 se tiene

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = v$$

v se llamará la **velocidad** de la partícula, que en términos físicos es la variación del desplazamiento durante un intervalo de tiempo dividido por el tiempo transcurrido. El valor absoluto de este número se llama la **rapidez del movimiento**. Si la velocidad es positiva, la partícula se mueve hacia la derecha y si esta velocidad es negativa se mueve hacia la izquierda.

Recíprocamente, supongamos que la velocidad de la partícula es constante e igual a v y su desplazamiento en el instante t_0 es s_0, entonces podemos calcular el desplazamiento en cualquier instante del tiempo por:

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = v \ ,$$

lo que implica $s(t) = s(t_0) + v(t - t_0)$. El gráfico de $s(t)$ es una línea recta con pendiente v.

Ahora si $s(t)$ no es una función lineal de t (como hemos visto en la introducción de este capítulo en un cuerpo en caída libre $s(t) = \dfrac{gt^2}{2}$), entonces la razón:

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

deja de ser constante. ¿Qué entenderemos ahora por velocidad ? A este cuociente lo llamaremos **velocidad media** de la partícula en el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$. Este número da una buena idea de la velocidad promedio; pero nuestro objetivo es dar una idea de **velocidad instantánea**. Queremos $v = v(t)$. Para ello se procede como ya lo hemos explicado, considerando $t_1 = t$, $t_2 = t + h$ y tomando el límite cuando $h \to 0$, es decir,

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t + h) - s(t)}{h} = s'(t)$$

Si conocemos $v(t)$ y el desplazamiento en un instante t_0, ya no es tan fácil calcular el desplazamiento en un instante cualquiera $s(t)$, pues debemos resolver una ecuación del siguiente tipo:

$$s'(t) = v(t), \text{ con } s(t_0) = s_0.$$

Por ejemplo, si $v(t) = gt$, entonces $s(t) = \frac{g}{2}(t - t_0)^2 + s_0$. Estas ecuaciones se llaman ecuaciones diferenciales y la incógnita es una función de la cual se conocen relaciones entre sus derivadas. Volvamos a nuestra partícula. Si suponemos ahora que la velocidad $v(t)$ es una función lineal del tiempo t, es decir,

$$v(t) = at + a_0, \text{ con } a, v_0 \in \mathbb{R}.$$

v_0 se puede interpretar como la **velocidad inicial** (velocidad de la partícula en el tiempo $t = 0$) Veamos ahora como podemos interpretar la constante a. Llamaremos **aceleración media** a la variación de la velocidad durante un intervalo de tiempo dividido por el tiempo transcurrido:

$$\frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = a.$$

De igual manera que la velocidad, el signo de la aceleración significa que la velocidad crece o decrece con el tiempo dependiendo si es positiva o negativa .

Si este cuociente deja de ser constante, procedemos como en la velocidad instantánea para definir la aceleración instantánea:

$$a(t) = \lim_{h \to 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} = v'(t).$$

Como ya sabemos que $v(t) = s'(t)$, entonces $a(t) = v'(t) = (s'(t))' = s''(t)$. Es decir, la aceleración es la segunda derivada del desplazamiento respecto del tiempo.

Realicemos ahora el camino al revés, supongamos que la aceleración es constante e igual a a, la velocidad en el instante t_0 es v_0 y la posición inicial en t_0 es s_0. Calculemos $v(t)$ y $s(t)$. Como

$$\frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = a,$$

entonces $v(t) = v_0 + a(t - t_0)$.

Ahora queremos calcular $s(t)$; primero observemos que $s(t)$ no puede ser una función lineal en t, pues debemos tener,

$$s'(t) = v(t) = v_0 + a(t - t_0).$$

Entonces, pensando en el ejemplo de caída libre y lo que conocemos de cálculo diferencial:

$$s(t) = v_0(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2 + s_0.$$

El problema es más complicado si la aceleración $a(t)$ no es constante, debemos resolver en este caso

$$a(t) = v'(t) \text{ y } s'(t) = v(t)$$

es decir,

$$s''(t) = a(t).$$

que es nuevamente una ecuación diferencial, pero ahora es de segundo orden,pues aparecen involucradas derivadas de orden dos.

Los siguientes ejercicios, que son los típicos de un curso de física elemental ayudarán a entender estas definiciones.

Ejercicios resueltos

1. Estudiemos la siguiente situación:

   Lancemos verticalmente desde el suelo con un resorte una pelota al aire con una velocidad inicial $v_0 = 29,4\,\frac{m}{seg}$ y supongamos que el desplazamiento en el instante t está dado por

   $$s(t) = 29,4\,t - 4,9\,t^2$$

   a) Calculemos la velocidad media en el primer medio segundo, un segundo después y desde el primer al segundo segundo.

   $$\begin{aligned} v &= \frac{s(\frac{1}{2}) - s(0)}{\frac{1}{2}} = 19,6\,\frac{m}{seg} \\ v &= \frac{s(1) - s(0)}{1} = 24,5\,\frac{m}{seg} \\ v &= \frac{s(2) - s(1)}{1} = 14,7\,\frac{m}{seg} \end{aligned}$$

   b) ¿Cuál es la velocidad al cabo de medio segundo, un segundo, tres segundos ?
   Primero calculemos la velocidad en función de t. Esta es:

   $$v(t) = s'(t) = 29,4 - 9,8\,t.$$

   Luego,

   $$v(\frac{1}{2}) = 24,5\frac{m}{seg}, \quad v(1) = 19,6\frac{m}{seg}, \quad v(3) = 0\frac{m}{seg}.$$

   c) ¿Cuándo alcanzará la pelota su altura máxima y cuándo caerá al suelo ?
   En la altura máxima $v(t) = 0$, es decir, $29,4 - 9,8\,t = 0$, lo que implica $t_1 = 3seg$. Caerá al suelo cuando $s(t) = 0$, es decir: $29,4t - 4,9t^2 = 0$ y $t > 0$, lo que implica $t_2 = 6seg$.

d) ¿Cuál es la altura máxima ?
La altura máxima es $s(t_1) = 44,1$ m.

e) ¿Qué velocidad tendrá al caer al suelo ? La velocidad al llegar al suelo es $v(t_2) = -29,4\,\dfrac{m}{seg}$.

f) ¿Cómo se puede saber si la pelota sube o baja?
Si el signo de $v(t)$ es positivo, entonces la pelota sube; si $v(t) < 0$ entonces baja. Luego,

$$v(t) > 0 \iff 29,4 - 9,8\,t > 0 \iff 0 < t < t_1 = 3\,seg.$$

$$v(t) < 0 \iff 29,4 - 9,8\,t < 0 \iff t_1 < t < t_2 = 6\,seg.$$

En $t = 3\,seg$ y $t = 6\,seg$ la pelota está detenida y corresponde a la altura máxima y al momento en que cae al suelo.

g) ¿ Qué se puede decir de la aceleración?

$$a(t) = v'(t) = -9,8\frac{m}{seg^2} \text{ para todo } t \in [0, t_2].$$

Es decir, la aceleración es constante y obviamente corresponde a la aceleración de gravedad promedio $g = -9,8\,\dfrac{m}{seg^2}$.

2. Supongamos que dos partículas parten del mismo punto en línea recta.

Sean $s_1(t) = \dfrac{1}{20}t^5 + \dfrac{1}{6}t^4 - \dfrac{1}{2}t^2 + 3t + 1$ y $s_2(t) = \dfrac{1}{6}t^3 + \dfrac{1}{2}t^2 - 2t + 1$, las ecuaciones del desplazamiento de las partículas. Determinar los instantes t donde ambas aceleraciones coinciden.

Sean $a_1(t)$ y $a_2(t)$ las aceleraciones de las partículas. Entonces,

$$a_1(t) = v_1'(t) = s_1''(t) = t^3 + 2t - 1 = (t^2 + t - 1)(t + 1)$$

$$a_2(t) = v_2'(t) = s_2''(t) = t + 1$$

Luego $a_1(t) = a_2(t)$ si y sólo si $t^2 + t - 2 = 0$, es decir, $t = -2$ o $t = 1$. Pero sólo tiene sentido físico $t = 1\,seg$

El hecho que ambas partículas tengan la misma aceleración en el mismo instante, no significa que estén en el mismo punto ni con la misma velocidad. En efecto, $s_1(1) \neq s_2(1)$ y $v_1(1) = s_1'(1) \neq v_2(1) = s_2'(1)$.

3. El problema fundamental en la mecánica clásica es el problema recíproco del tratado anteriormente, es decir, se quiere encontrar la función desplazamiento conociendo los principios de la dinámica de Newton. El segundo principio por ejemplo, dice en breve, que la aceleración de un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza que actua sobre él e inversamente proporcional a su masa, esto es,

$$F = C \cdot m \cdot a = C \cdot m \, \frac{d^2 s(t)}{dt^2}$$

(Sin pérdida de generalidad podemos suponer $C = 1$)

Esta fórmula es una ecuación diferencial de segundo orden donde la incógnita es la función del tiempo $s(t)$. En definitiva, se quiere calcular el desplazamiento conociendo la ecuación diferencial del movimiento y esto se puede hacer conociendo tanto técnicas de derivación como de integración. El siguiente ejemplo ilustra esta situación:

Supongamos que tenemos una partícula de masa m sujeta a un muro por un resorte que puede deslizarse en forma horizontal. La ley de Hooke dice que un resorte estirado o comprimido reacciona con una fuerza proporcional a su deformación y que tiende a su posición de equilibrio. Esto significa que cuando la masa está en el punto s, la fuerza sobre ella es $-Ks$, donde K es la constante de rigidez del resorte.

La ecuación del movimiento, en este caso, estará dada según el segundo principio de Newton por

$$m \, \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + Ks = 0 \ \ , \, K > 0$$

Esto se puede escribir como:

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} - {\omega_0}^2 s(t) = 0 \ ; \ \text{con} \ \ \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Una solución general de esta ecuación diferencial es $s(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \operatorname{sen} \omega_0 t$.

Por lo ya visto en el capítulo de trigonometría esta solución es una sinusoide del tipo:

$$s(t) = R \cos(\omega_0 t - \alpha) \ ; \ \text{con} \ \ R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \ \ \text{y} \ \ \alpha = \arctan \frac{c_2}{c_1}$$

¿Qué conclusiones físicas se pueden obtener de esta solución? Veamos algunas:

a) El sistema oscila perpetuamente con período $T = \frac{\pi}{\omega_0}$.

b) $s(t)$ oscila entre $-R \leq s(t) \leq R \ \ \forall t \in \mathbb{R}$

c) ω_0 es el número de oscilaciones en un tiempo igual a 2π y se llama **frecuencia natural** del sistema. Esta frecuencia crece si aumenta la rigidez del resorte y disminuye si aumenta su masa.

La ecuación $m\,\dfrac{d^2s(t)}{dt^2} + Ks = 0$ se conoce con el nombre de la ecuación del **movimiento oscilatorio conservativo** (no hay transformación de energía).

Un cuadro un poco más realista es conciderar el **roce ó fricción** de la masa con la superficie de deslizamiento. En este caso el roce es proporcional a la velocidad y tiene sentido contrario a esta. La ecuación del movimiento resulta entonces:

$$m\,\frac{d^2s(t)}{dt^2} + \mu\,\frac{ds}{dt} + Ks = 0 \ \ , \mu > 0$$

La solución general de esta ecuación dependerá de relaciones entre μ, K, y m. Por ejemplo, si $\mu^2 - 4mK \geq 0$, entonces:

$$s(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t}\ ,\ \text{con}\ \ \lambda_{1,2} = \frac{1}{2m}[-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4mK}]$$

Como estos números son negativos, el sistema tiende exponencialmente al equilibrio, sin oscilar.

Si ahora $\mu^2 - 4mK < 0$, entonces:

$$s(t) = Re^{\frac{-\mu}{2m}t} \cos\,(\frac{\sqrt{4mK - \mu^2}}{2m}t - \alpha)$$

es la solución general y concluimos que $s(t)$ oscila tendiendo al equilibrio (grafique $s(t)$ en su calculadora). Esta ecuación se conoce como la ecuación del **movimiento oscilatorio amortiguado** (o disipativo), pues transforma, debido al roce, energía potencial elástica en calórica.

Si estamos interesados en mantener el sistema oscilando, debemos aplicar una fuerza externa a la masa m, por ejemplo, $F(t) = F_0 \cos \omega t$. La ecuación del movimiento es entonces:

$$m\,\frac{d^2s(t)}{dt^2} + \mu\,\frac{}{dt} + Ks = F_0 \cos \omega t$$

Una solución de esta ecuación es:

$$g(t) = \frac{F_0 \cos{(\omega t - \beta)}}{\sqrt{(K - m\omega^2)^2 + \mu^2\omega^2}}\ ,\ \text{con}\ \ \beta = \arctan \frac{\mu\omega}{K - m\omega^2}$$

Compruebe que efectivamente $g(t)$ es una solución y que $g(t) + s(t)$ con $s(t)$ solución de la ecuación amortiguada es la solución general para esta ecuación, que se conoce con el nombre de ecuación del **movimiento oscilatorio amortiguado y forzado.**

.

4. Dos partículas P y Q se encuentran en $t=0$ en los puntos A y B de la recta real respectivamente, con $A<B$. Ambas partículas se están moviendo hacia la derecha. Suponga que P dobla en aceleración a Q en cada instante y Q triplica a P en velocidad en $t=0$. ¿ Es posible determinar en qué instante y lugar se encontrarán?

   Solución: Sean $s_1(t), v_1(t)$ y $a_1(t)$, la posición, velocidad y aceleración de P y $s_2(t), v_2(t)$ y $a_2(t)$, los mismos parámetros para Q.

   Por hipótesis tenemos $s_1(0)=A\,,\, s_2(0)=B\,,\, v_2(0)=3v_1(0)$ y $a_1(t)=2a_2(t)$.

   Esta última expresión es $\dfrac{d^2s_1(t)}{dt^2}=2\dfrac{d^2s_2(t)}{dt^2}$, por lo tanto, por ejercicio resuelto 2.3.3,1(b), se tiene:
$$\frac{ds_1(t)}{dt}(t)=2\frac{ds_2}{dt}(t)+\alpha \;\;,\;\; \alpha\in\mathbb{R}.$$
   Luego $v_1(t)=2v_2(t)+\alpha$, lo que implica por el mismo ejercicio $s_1(t)=2s_2(t)+\alpha t+\beta \;\;,\;\; \beta\in\mathbb{R}$.

   Calculemos ahora α y β: $v_1(0)=2v_2(0)+\alpha$, entonces por hipótesis, $v_1(0)=6v_1(0)+\alpha$ implica $\alpha=-5v_1(0)$.

   Por otro lado $s_1(t)=2s_2(t)-5v_1(0)t+\beta$ y evaluando en $t=0$ se tiene $A=2B-5v_1(0)\cdot 0+\beta$ implica $\beta=A-2B$

   Si T es el instante del encuentro y C el lugar donde este ocurre, tenemos:
$$C=2C-5v_1(0)T+(A-2B)\;,\;\text{es decir}\;,\; C=5v_1(0)T+2B-A$$
   Esto es una relación entre el instante y el lugar del encuentro. Para determinar estos parámetros debemos tener otros datos adicionales. ¿Qué tipo de datos pondría Ud.?

5. Suponga que en $t=0$ un proyectil situado en el punto (x_0,y_0) del plano cartesiano es lanzado con una velocidad inicial v_0. Esta velocidad es vectorial. Si θ_0 es el ángulo que forma este vector con el eje de las abscisas, entonces las componentes de v_0 son:
$$\begin{aligned} v_{0x} &= v_0\cos\,\theta_0\\ v_{0y} &= v_0\,\mathrm{sen}\,\theta_0\end{aligned}$$
   La trayectoria del proyectil está determinada por la fuerza gravitacional que actua sobre él (y la resistencia del ambiente). El segundo principio de Newton, en este caso, escrito en componentes es:
$$F_x=m\cdot a_x \;\text{ y }\; F_y=m\cdot a_y$$
   Entonces las componentes de la aceleración son:
   $a_x=\dfrac{F_x}{m}=0$ y $a_y=\dfrac{F_y}{m}=\dfrac{-mg}{m}=-g$

Pero como ya hemos visto $a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dv_x}{dt} = 0 \implies v_x = Cte = v_{0x}$ y como $v_x = \dfrac{dx}{dt}$, entonces $x = v_{0x}t + x_0$

Tambien $a_y = \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{dv_y}{dt} = -g \implies v_y = -gt + v_{0y}$ y como $v_y = \dfrac{dy}{dt} = -gt + v_{0y}$, entonces $y = -\dfrac{g}{2}t^2 + v_{0y}t + y_0$. Luego reeplazando las condiciones iniciales, tenemos:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + (v_0 \cos\ \theta_0)t \\ y(t) &= y_0 + (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)t - \frac{g}{2}t^2 \end{aligned}$$

La distancia de (x_0, y_0) al proyectil es $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$

La rapidez del proyectil es $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

La dirección de la velocidad en función del ángulo θ es $\tan\theta = \dfrac{v_y}{v_x}$

Supongamos para simplificar que $(x_0, y_0) = (0,0)$. De las ecuaciones de $x(t)$ e $y(t)$, podemos reemplazar t y resulta:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\ \theta_0} \ \text{ y } \ y = (\tan\theta_0)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\ \theta_0}x^2,$$

es decir, la trayectoria $y(x)$ del proyectil es una parábola.

Ejercicios propuestos

1. Realice un estudio similar al del movimiento oscilatorio para la ecuación de un **circuito eléctrico** elemental, constituido por una inductancia (L), una resistencia (R) y un condensador (C). Si un generador produce un voltaje $V(t) = V_0 \operatorname{sen}\omega t$, entonces la corriente I del circuito está dada por la ecuación:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = V_0 \cos\ \omega t$$

   Interprete sus respuestas del punto de vista físico.

2. Considere un proyectil lanzado desde el origen del plano cartesiano con una velocidad inicial $v_0 = 26\dfrac{m}{seg}$ y un ángulo de elevación $\theta_0 = 53^0$.

   a) Determine la posición del proyectil, la magnitud y la dirección de su velocidad cuando $t = 2seg$.

b) Calcule el tiempo que demora el proyectil en alcanzar el punto mas alto de su trayectoria y calcule la altura de dicho punto.

c) Calcule el alcance del proyectil (mayor distancia alcanzada) y el tiempo que se demora en llegar a ese punto.

3. Se lanza una pelota desde el suelo a otra pelota que está a una altura h y a una distancia c. Suponga que al momento de ser lanzada la primera pelota, la segunda es soltada en caída libre.

   Calcule dónde y en qué instante ellas chocan. ¿Siempre chocan?

Bibliografía del Cuarto Capítulo

[AA85] M.A. Laurentiev y otros A.D. Aleksandrov, A.N. Kolmogorov. *La matemática: su contenido, métodos y significado.* Alianza Universidad, 1985.

[Apo65] T. Apostol. *Calculus.* Reverté, 1965.

[BS89] R. Bartle and D. Sherbert. *Introducción al análisis matemático de una variable.* Editorial Limusa, 1989.

[dp60] Réunion de professeurs. *Exercises de trigonométrie.* Ligel, París, 1960.

[Gra91] F. Granero. *Cálculo.* McGraw - Hill. Madrid, 1991.

[GU02] J. Guajardo and J. Urrea. *Cuarenta problemas resueltos de cálculo integral.* Trabajo de Titulación, Fac de Ciencias, 2002.

[Kit86] J. Kitchen. *Cálculo.* McGraw - Hill, 1986.

[KKVM] I. D. Kudriávtsev, A.D. Kutásov, V.I.Chejlov, and M.I.Shsbunin. *Problemas de Análisis Matemático.* Ed. Mir Moscú.

[Kur61] K. Kuratowski. *Introduction to calculus.* Pergamon Press, 1961.

[Lar53] H. Larsen. *Tables, Formulas and curves.* 1953.

[Lim89] E. Lima. *Análise real.* IMPA, 1989.

[Max59] E. A. Maxwell. *An analytical calculus.* Cambridge University Press, 1959.

[Rot59] R. Rothe. *Matématica superior. Tomos I y II.* Editorial Labor, 1959.

[San] Colección H.E.C. Santiago, editor. *Elementos de trigonometría.*

[Spi70] M. Spivak. *Calculus.* Reverté, 1970.

Capítulo 5

La integral indefinida: cálculo de primitivas

5.1. La integral indefinida y sus propiedades

5.1.1. La integral indefinida

Definición 5.1.1 Se dice que la función F es una **función primitiva o antiderivada** de una función f definida en un intervalo abierto I (finito o infinito) si

$$F'(x) = f(x), \text{ para todo } x \in I. \tag{5.1}$$

Ejemplo 5.1.2

1. La función $F(x) = x^2$ es una función primitiva o antiderivada de $f(x) = 2x$, en $I = (-\infty, +\infty)$, pues $F'(x) = 2x = f(x)$.

2. La función $F(x) = x^2 + 4$ es también una función primitiva o antiderivada de $f(x) = 2x$, en $I = (-\infty, +\infty)$, pues $F'(x) = 2x = f(x)$.

3. La función $F(x) = \operatorname{sen} x$ es una función primitiva o antiderivada de $f(x) = \cos x$, en $I = (-\infty, +\infty)$, pues $F'(x) = \cos x = f(x)$.

4. La función $F(x) = e^x$ es una función primitiva o antiderivada de $f(x) = e^x$, en $I = (-\infty, +\infty)$, pues $F'(x) = e^x = f(x)$.

Definición 5.1.3 Si una función f está definida en un intervalo cerrado $I = [a, b]$, la función F se dice una función primitiva o antiderivada de f si

$$F'(x) = f(x), \text{ para todo } x \in (a, b), \lim_{x \to a^+} F'(x) = f(a) \text{ y } \lim_{x \to b^-} F'(x) = f(b).$$

En los ejemplos 1 y 2 de 5.1.2 hemos visto que la función primitiva de una función f no es única; esto de debe a que la derivada de una función constante es cero. Esta propiedad es la que expresa el siguiente teorema.

Teorema 5.1.4 Si dos funciones F y G son funciones primitivas o antiderivadas de una función f en un intervalo I (cerrado o abierto), entonces estas dos funciones difieren en una constante.

Demostración: Si F y G son funciones primitivas o antiderivadas de f entonces,

$$F'(x) = G'(x) = f(x).$$

Así, aplicando el ejercicio resuelto 1 parte de la subsección 4.3.3, tenemos que F y G difieren en una constante. □

El teorema 5.1.4, puede también ser aplicado diciendo que dada una primitiva F de una función f, $F(x) + C$ es también una primitiva de f y es la forma general de una primitiva de f.

En la teoría de integración es común denotar por:

$$\int f(s)ds$$

la primitiva $F(x) + c$ y llamarla la integral indefinida de f.

Definición 5.1.5 Dada una función f denotaremos por

$$\int f(s)\,ds,$$

a cualquier función de la forma $F(x) + C$,que satisface $F'(x) = f(x)$. y la llamaremos la **Integral Indefinida** de f. Esto se escribe:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{5.2}$$

Observación 5.1.6

1. En la definición 5.1.5 no se especifica ningún intervalo, deberá sobreentenderse que se trata de un intervalo cualquiera en que la función f esté definida.

2. La relación 5.2 puede escribirse de la forma:

$$\frac{d}{d\,x}\int f(x)\,dx \quad = \quad f(x) \tag{5.3}$$

$$\int \frac{d}{d\,x}F(x)\,dx = F(x) + C. \tag{5.4}$$

El cálculo de la integral indefinida de una función f se llama **integración de la función f**, las fórmulas (5.3) y (5.4), nos dicen que la integración y la derivación de una función son operaciones inversas.

3. Geométricamente, sabemos que la derivada soluciona el problema de encontrar la pendiente de la recta tangente a una curva dada, en un punto de esta. Es decir, dada la curva $y = f(x)$ la pendiente de su recta tangente en $(x, f(x))$ es $m(x) = f'(x)$. Recíprocamente, la integral indefinida es encontrar una curva de la cual se conocen las pendientes de las rectas tangentes. Esto es, dada $m(x)$ la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto (x, y), se tiene que $f(x) = \int m(u)\, du + C$.

4. De la definición 5.1.1 tenemos que toda fórmula de derivación da origen a una fórmula de integración. Por ejemplo,

$$\frac{d}{d\,x}\operatorname{sen} x = \cos\, x \iff \int \cos\, x\, dx = \operatorname{sen} x + C.$$

Por esta vía podemos obtener una primera tabla de fórmulas básicas de integración.

5.1.2. Fórmulas básicas de integración

1. $\displaystyle\int 0\, dx = C,$

2. $\displaystyle\int a\, dx = ax + C,$

3. $\displaystyle\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1}\, x^{n+1} + C,$

4. $\displaystyle\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C,$

5. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C,$

6. $\displaystyle\int \sec^2 x\, dx = \tan\, x + C,$

7. $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\operatorname{cotan}\, x + C,$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx = \ln |x| + C,$

9. $\displaystyle\int e^x\, dx = e^x + C,$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \text{arc sen}\, x + C,$

11. $\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \text{arc}\cos\, x + C,$

12. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \text{arc tg}\, x + C,$

13. $\displaystyle\int \frac{-1}{1+x^2}\, dx = \text{arc cotg}\, x + C,$

14. $\displaystyle\int x^a\, dx = \frac{1}{a+1}\, x^{a+1} + C,$ si $a \neq -1$ y $x > 0.$

15. $\displaystyle\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$

16. $\displaystyle\int \text{senh}\, x\, dx = \cosh x + C.$

17. $\displaystyle\int \cosh x\, dx = \text{senh}\, x + C.$

18. $\displaystyle\int \frac{1}{\text{senh}^2\, x}\, dx = -\text{cotanh}\, x + C.$

19. $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh^2 x}\, dx = \tanh x + C.$

20. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \text{arcsenh}\, x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C.$

21. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = \text{arccosh}\, x = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1}) + C, \quad |x| > 1.$

22. $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\, dx = \begin{cases} \text{arctanh}\, x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x} + C; & |x| < 1 \\ \text{arccotanh}\, x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1} + C; & |x| > 1. \end{cases}$

Observación 5.1.7 Si el dominio de x para el cual se satisface la ecuación $F'(x) = f(x)$ no es un intervalo, entonces no es verdad que la fórmula $F(x) + C$ dé todas las primitivas de f, como puede verse en el siguiente ejemplo.

La función $\ln|x| + C$ da todas las primitivas de $\dfrac{1}{x}$ en $(-\infty, 0)$ ó en $(0, +\infty)$ separadamente, pero **no** en $(-\infty, +\infty) - \{0\}$. Pues, si consideramos la función

$$G(x) = \begin{cases} \ln|x| & \text{si} \quad x < 0 \\ \ln x + 1 & \text{si} \quad x > 0\ , \end{cases}$$

esta es una primitiva de $\dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$, que no viene dada por la fórmula $\ln|x| + C$.

Teorema 5.1.8 Sean I un intervalo , $x_0 \in I$ e y_0 un número real cualquiera. Si una función f tiene una función primitiva en I, entonces existe una y sólo una función primitiva F tal que $F(x_0) = y_0$.

Demostración:

Sea $G(x)$ una función primitiva cualquiera de $f(x)$ en el intervalo I.

Definiendo $F(x) = G(x) - G(x_0) + y_0$, vemos que $F'(x) = G'(x) = f(x)$ y $F(x_0) = y_0$. Por lo cual F es una primitiva de f que satisface la condición del enunciado del teorema.

Demostraremos a continuación que F es única. Como dos primitivas difieren sólo en una constante, cualquiera otra primitiva F^* tiene la forma $F^* = F + C$, con $C \neq 0$. Así, $F^*(x_0) = F(x_0) + C = y_0 + C \neq y_0$. Lo cual no puede ser, por lo tanto, se tiene la unicidad . $\square$

5.1.3. Propiedades elementales de la integral indefinida

Teorema 5.1.9

1. $\displaystyle\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$

2. $\displaystyle\int a\,f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx.$

3. **Fórmula de integración por partes.**
   $\displaystyle\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$

4. **Fórmula de integración por substitución.**
   $\displaystyle\int g(f(x))f'(x)\,dx = \int g(y)\,dy.$

Demostración:

1. Como $\displaystyle\frac{d}{d\,x}\left[\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right] = \frac{d}{d\,x}\int f(x)\,dx + \frac{d}{d\,x}\int g(x)\,dx = f(x) + g(x).$
   Se tiene que $\displaystyle\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$

2. $\dfrac{d}{d\,x}\left[a\displaystyle\int f(x)\,dx\right] = a\dfrac{d}{d\,x}\displaystyle\int f(x)\,dx = a\,f(x)$, implica que $\displaystyle\int a\,f(x)\,dx = a\displaystyle\int f(x)\,dx$.

3. $\dfrac{d}{d\,x}\left[f(x)g(x) - \displaystyle\int f'(x)g(x)\,dx\right] = \dfrac{d}{d\,x}\left[f(x)g(x)\right] - \dfrac{d}{d\,x}\left[\displaystyle\int f'(x)g(x)\,dx\right] =$
$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = f(x)g'(x)$.

4. Sea $G(y) = \displaystyle\int g(y)\,dy$ e $y = f(x)$. Entonces, usando la regla de la cadena tenemos,

$$\frac{d}{d\,x}\left[G(y)\right] = \frac{d}{d\,x}\left[G(f(x))\right] = G'(f(x))\cdot f'(x) = g(f(x))f'(x).$$

Entonces, $\displaystyle\int g(f(x))f'(x)\,dx = \int g(y)\,dy$.

□

Ejemplo 5.1.10

1. De las fórmulas básicas tenemos que

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

En particular,

$$\begin{aligned} \int 1\,dx &= x + C \\ \int x^2\,dx &= \frac{x^3}{3} + C \\ \int x^3\,dx &= \frac{x^4}{4} + C. \end{aligned}$$

2. De la propiedad 2 del teorema 5.1.9 podemos deducir

$$\int 5x^3\,dx = 5\int x^3\,dx = \frac{5}{4}x^4 + C.$$

$$\int 3x^2\,dx = 3\int x^2\,dx = x^3 + C.$$

3.

$$\int (5x^3 + 3x^2 + 8)\,dx = \int 5x^3\,dx + \int 3x^2\,dx + \int 8\,dx = \frac{5}{4}x^4 + x^3 + 8x + C.$$

4.
$$\begin{aligned}\int\left(\frac{4x^3-2x+1}{x^3}\right)dx &= \int\left(4-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)dx\\ &= \int 4\,dx-\int\frac{2}{x^2}\,dx+\int\frac{1}{x^3}\,dx+C\\ &= \int 4\,dx-\int 2x^{-2}\,dx+\int x^{-3}\,dx+C\\ &= 4x-\frac{2x^{-1}}{-1}+\frac{x^{-2}}{-2}+C\\ &= 4x+\frac{2}{x}-\frac{1}{2x^2}+C.\end{aligned}$$

5.
$$\int 4\sqrt{x}\,dx=\int 4x^{\frac{1}{2}}\,dx=4\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+C.$$

6.
$$\int x\sqrt[5]{x}\,dx=\int xx^{\frac{1}{5}}\,dx=\int x^{\frac{6}{5}}\,dx=\frac{x^{\frac{6}{5}+1}}{\frac{6}{5}+1}+C=\frac{5}{11}x^{\frac{11}{5}}+C=\frac{5}{11}\sqrt[5]{x^{11}}+C.$$

7.
$$\int\frac{1}{x^3\sqrt[4]{x}}\,dx=\int x^{-\frac{13}{4}}\,dx=\frac{x^{-\frac{13}{4}+1}}{-\frac{13}{4}+1}+C=-\frac{4}{9}x^{-\frac{9}{4}}+C=-\frac{4}{9}\frac{1}{x^2\sqrt[4]{x}}+C.$$

8. $\displaystyle\int 2^x\,dx=\frac{2^x}{\ln 2}+C$. Ver fórmula 15.

9.
$$\begin{aligned}\int\left(\frac{4x^3-2x\sqrt[3]{x}+8x4^x+1}{x}\right)dx &= \int\left(4x^2-2\sqrt[3]{x}+8\cdot 4^x+\frac{1}{x}\right)dx\\ &= \frac{4}{3}x^3-\frac{6}{4}x\sqrt[3]{x}+\frac{8\cdot 4^x}{\ln 4}+\ln|x|+C.\end{aligned}$$

Los siguientes ejemplos son aplicaciones simples de la fórmula de integración por partes que se utiliza para integrar productos.

10. $I=\displaystyle\int xe^x\,dx.$

Haciendo $f(x)=x$ y $g'(x)=e^x$, tenemos: $f'(x)=1$ y $g(x)=e^x$. Por lo tanto,

$$I=xe^x-\int e^x\,dx=x\,e^x-e^x+C.$$

11. $I = \displaystyle\int x \cos x \, dx$.

    Haciendo $f(x) = x$ y $g'(x) = \cos x$, tenemos: $f'(x) = 1$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$. Por lo tanto,

    $$I = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \, dx = x\operatorname{sen} x - (-\cos x) + C = x\operatorname{sen} x + \cos x + C.$$

12. $I = \displaystyle\int \ln x \, dx$.

    Haciendo $f(x) = \ln x$ y $g'(x) = 1$, tenemos: $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = x$. Por lo tanto,

    $$I = x \ln x - \int \frac{1}{x} x \, dx = x \ln x - x + C.$$

13. $I = \displaystyle\int e^x \cos x \, dx$.

    Haciendo $f(x) = e^x$ y $g'(x) = \cos x$, tenemos: $f'(x) = e^x$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$. Por lo tanto,

    $$\begin{aligned} I &= e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx \\ &= e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen}\, x \, dx \\ &= e^x \operatorname{sen} x - J. \end{aligned}$$

    La integral J debe calcularse nuevamente por integración por partes. Sea $f(x) = e^x$ y $g'(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $f'(x) = e^x$ y $g(x) = -\cos x$. Por lo tanto,

    $$J = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx = -e^x \cos x + I.$$

    Reemplazando el valor de J en I nos queda:

    $$\begin{aligned} I &= e^x \operatorname{sen} x - (-e^x \cos x + I) \\ 2I &= e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x \\ I &= \frac{e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x}{2}, \end{aligned}$$

14. $J = \displaystyle\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$.

    Del ejercicio anterior se deduce que
    $J = \displaystyle\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x}{2}$.

    Ejemplos de integración por substitución

15. $I = \int (a+bx)^n\, dx,\ n \neq -1,\ b \neq 0.$

Escribiendo $y = a + bx$, entonces $x = \dfrac{y-a}{b}$, y por tanto, $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{b}$. Así,

$$I = \int y^n \frac{dy}{b} = \frac{1}{b}\int y^n dy = \frac{1}{b}\frac{y^{n+1}}{n+1} + C = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)} + C.$$

16. $I = \int \dfrac{1}{a+bx}\, dx.$

Haciendo la misma substitución anterior:

$$I = \int \frac{1}{y}\frac{dy}{b} = \frac{1}{b}\ln|y| + C = \frac{1}{b}\ln|a+bx| + C.$$

17. $I = \int \operatorname{sen} ax\, dx.$

Haciendo $y = ax$, entonces $x = \dfrac{y}{a}$, $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{a}$.

$$I = \int \operatorname{sen} y \,\frac{dy}{a} = \frac{1}{a}\int \operatorname{sen} y\, dy = \frac{1}{a}(-\cos y) + C = -\frac{1}{a}\cos ax + C.$$

18. $I = \int \dfrac{dx}{\sqrt{a - x^2}},\ a > 0.$

Escribiendo $x = \sqrt{a}\, y$; $\dfrac{dx}{dy} = \sqrt{a}$, entonces

$$I = \int \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a - ay^2}}\, dy = \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \operatorname{arc\,sen} y + C = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{\sqrt{a}} + C.$$

19. $I = \int \tan\ x\, dx.$

Como $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, I puede escribirse como

$$I = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx.$$

Haciendo $y = \cos x$, $\dfrac{dy}{dx} = -\operatorname{sen} x$, tenemos

$$I = \int -\frac{dy}{y} = -\ln|y| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

20. $I = \displaystyle\int \operatorname{cosec} x\, dx$. Usando la fórmula trigonométrica $\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, podemos escribir

$$I = \int \operatorname{cosec} x\, dx = \int \frac{dx}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\dfrac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \int \frac{\dfrac{1}{2}\dfrac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$$

Haciendo la substitución $\tan\dfrac{x}{2} = y$, $\dfrac{1}{2}\dfrac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}} = dy$, obtenemos:

$$I = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C = \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + C.$$

21. $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\, dx.$
Haciendo $\ln x = t$, obtenemos

$$I = \int \cos t\, dt = \operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(\ln x) + C.$$

22. $\displaystyle\int (a^{2x} + 3\,a^x - 7)\, dx.$
Haciendo $a^x = t$, tenemos que:

$$I = \frac{1}{\ln a}\int (t+3-7t^{-1})\, dt = \frac{1}{\ln a}\left(\frac{t^2}{2} + 3t - 7\ln t\right) + C = \frac{1}{\ln a}\left(\frac{1}{2}a^{2x} + 3a^x - 7x\ln a\right) + C.$$

23. $I = \displaystyle\int \operatorname{arc\,sen} x\, dx.$

Usando integración por partes, tenemos que si

$$f(x) = \operatorname{arc\,sen} x,\ g'(x) = 1, \text{ entonces } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ g(x) = x.$$

Por lo tanto,

$$I = x \operatorname{arc\,sen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

La integral $J = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ se calcula por substitución haciendo $u^2 = 1 - x^2$, $2u\frac{du}{dx} = -2x$.

$$J = \int -\frac{u\,du}{u} = -\int du = -u = -\sqrt{1-x^2}.$$

Por tanto,

$$I = x \text{ arc sen } x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

24. $\int \frac{6x-2}{3x^2-2x+1}\,dx.$

Haciendo $y = 3x^2 - 2x + 1$, $\frac{dy}{dx} = 6x - 2$, tenemos:

$$I = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C = \ln|3x^2 - 2x + 1| + C.$$

25. $I = \int \frac{1}{x\sqrt{x^3-1}}\,dx.$

I puede escribirse como

$$I = \int \frac{x^2}{x^3\sqrt{x^3-1}}\,dx$$

y haciendo $y = \sqrt{x^3-1}$ tenemos que $y^2 = x^3 - 1$, $2y\frac{dy}{dx} = 3x^2$, y por lo tanto,

$$I = \frac{2}{3}\int \frac{ydy}{(y^2+1)y} = \frac{2}{3}\int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{2}{3}\text{ arc tg } y + C = \frac{2}{3}\text{arctg}\sqrt{x^3-1} + C.$$

26. $I = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1 \pm x^2}}.$

Sea $y = 1 \pm x^2$, $dy = \pm 2xdx$, entonces

$$I = \int \pm\frac{dy}{2\sqrt{y}} = \pm\int \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}dy = \pm y^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{1 \pm x^2} + C.$$

27. $\int \frac{x\,dx}{1 \pm x^2} = \pm\frac{1}{2}\ln|1 \pm x^2| + C.$

Lo que se obtiene haciendo la misma substitución del ejemplo anterior.

28. $\int \frac{x\,dx}{(1 \pm x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)(x^2 \pm 1)^{n-1}} + C, \quad n \neq 1.$

Es una generalización del ejemplo 27

5.1.4. Ejercicios propuestos

Calcule las siguientes integrales y compruebe los resultados mediante derivación

1. $\displaystyle\int (3x^4 - 8x^2 + 2x)\, dx = \frac{3}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + x^2 + C.$

2. $\displaystyle\int (10x^{\frac{3}{4}} - 4x^{-\frac{2}{3}})\, dx = \frac{40}{7}x^{\frac{7}{4}} - 12x^{\frac{1}{3}} + C.$

3. $\displaystyle\int \sqrt{4x-3}\, dx = \frac{1}{6}(4x-3)^{3/2} + C.$

4. $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-5}\, dx = \frac{1}{3}(x^2-5)^{3/2} + C.$

5. $\displaystyle\int 3^{2x-1}\, dx = \frac{1}{2\ln 3}3^{(2x-1)} + C.$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{7x+2}\, dx = \frac{1}{7}\ln|7x+2| + C.$

7. $\displaystyle\int \frac{x}{9-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\ln|x^2-9| + C.$

8. $\displaystyle\int (-2x+1)^4\, dx = -\frac{1}{10}(-2x+1)^5 + C.$

9. $\displaystyle\int (x-2)^{-3}\, dx = -\frac{1}{2}(x-2)^{-2} + C.$

10. $\displaystyle\int \operatorname{sen}\,(8x+5)\, dx = -\frac{1}{8}\cos(8x+5) + C.$

11. $\displaystyle\int \cos(1-4x)\, dx = \frac{1}{4}\operatorname{sen}(-1+4x) + C.$

12. $\displaystyle\int x\operatorname{sen}\,(x^2-3)\, dx = -\frac{1}{2}\cos(x^2-3) + C.$

13. $\displaystyle\int x^2\,\cos(x^3-1)\, dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(x^3-1) + C.$

14. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\, dx = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{3}\right) + C.$

15. $\displaystyle\int \tan(2x+1)\, dx = \frac{1}{4}\ln\big(2 + 2\tan^2(2x+1)\big) + C.$

16. $\displaystyle\int \operatorname{cosec}(10-4x)\,dx = \frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{cosec}(-10+4x)+\operatorname{cotan}(-10+4x)\right| + C.$

17. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3-1}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x^3-1| + C.$

18. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C.$

19. $\displaystyle\int x\,e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$

20. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\Big(\ln|x|\Big)^2 + C.$

21. $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\Big(\arctan x\Big)^2 + C.$

22. $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)\arctan x}\,dx = \ln|\arctan x| + C.$

23. $\displaystyle\int x\ \operatorname{sen}\ x\,dx = \operatorname{sen} x - x\cos x + C.$

24. $\displaystyle\int e^{ax}\ \operatorname{sen} x\,dx = -\frac{e^{ax}\cos x}{a^2+1} + \frac{ae^{ax}\operatorname{sen} x}{a^2+1} + C.$

25. $\displaystyle\int e^{ax}\cos x\,dx = \frac{e^{ax}\operatorname{sen} x}{a^2+1} + \frac{ae^{ax}\cos x}{a^2+1} + C.$

26. $\displaystyle\int x^a \ln|x|\,dx = -\frac{xe^{a\ln|x|}}{1+2a+a^2} + \frac{x\ln|x|e^{a\ln|x|}}{1+a} + C.$

27. $\displaystyle\int x^2\ \cos x\,dx = x^2\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen} x + 2x\cos x + C.$

5.2. Fórmulas de reducción

Reciben este nombre las fórmulas que permiten calcular integrales del tipo $I_n = \int f_n(x)\,dx$ conociendo la integral I_1 o I_0 y reduciendo la integral I_n a una que involucra a I_{n-1} u otra anterior.

1. $I_n = \displaystyle\int \operatorname{sen}^n x\,dx\ ;\ n \in \mathbb{N}.$

Esta integral puede escribirse como

$$I_n = \int \text{sen}^{n-1} x \text{sen}\, x\, dx$$

e integrarse por partes tomando $f(x) = \text{sen}^{n-1}x,\ g'(x) = \text{sen}\, x$.
Así, $f'(x) = (n-1)\text{sen}^{n-2}x \cos x,\ g(x) = -\cos x$.
Por tanto,

$$\begin{aligned}
I_n &= -\text{sen}^{n-1}x \cos x + \int (n-1)\text{sen}^{n-2}x \cos x \cos x\, dx \\
&= -\text{sen}^{n-1}x \cos x + (n-1)\int \text{sen}^{n-2} x(1-\text{sen}^2 x)\, dx \\
&= -\text{sen}^{n-1}x \cos x + (n-1)\int \text{sen}^{n-2} x\, dx - (n-1)\int \text{sen}^{n} x\, dx \\
&= -\text{sen}^{n-1}x \cos x + (n-1)\int \text{sen}^{n-2} x\, dx - (n-1)I_n.
\end{aligned}$$

Despejando I_n, nos queda:

$$\begin{aligned}
nI_n &= -\text{sen}^{n-1}x \cos x + (n-1)\int \text{sen}^{n-2} x\, dx \\
I_n &= -\frac{\text{sen}^{n-1}x \cos x}{n} + \frac{(n-1)}{n}\int \text{sen}^{n-2} x\, dx.
\end{aligned}$$

Esto nos dice que la integral de $\text{sen}^n x$ depende de la integral de $\text{sen}^{n-2} x$, es decir,

$$I_n = -\frac{\text{sen}^{n-1}x \cos x}{n} + \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}. \tag{5.5}$$

Naturalmente, la fórmula 5.5 tiene sentido cuando $n \geq 2$.
Aplicando la fórmula 5.5 a $n-2$ tenemos que:

$$I_{n-2} = -\frac{\text{sen}^{n-3}x \cos x}{n-2} + \frac{(n-3)}{n-2} I_{n-4},$$

y así sucesivamente hasta llegar a I_1 si n es impar o a I_0 cuando n es par.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \text{sen} x\, dx = -\cos x \\
I_0 &= \int dx = x.
\end{aligned}$$

En particular, si $n = 6$, tenemos:

$$\begin{aligned}
I_6 &= \int \operatorname{sen}^6 x\, dx = -\frac{\operatorname{sen}^5 x \cos x}{6} + \frac{5}{6} I_4 \\
I_4 &= -\frac{\operatorname{sen}^3 x \cos x}{4} + \frac{3}{4} I_2 \\
I_6 &= -\frac{\operatorname{sen}^5 x \cos x}{6} - \frac{5}{6 \cdot 4} \operatorname{sen}^3 x \cos x + \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 4} I_2 \\
I_6 &= -\frac{\operatorname{sen}^5 x \cos x}{6} - \frac{5}{6 \cdot 4} \operatorname{sen}^3 x \cos x + \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 4} \left[-\frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2} + \frac{1}{2} I_0 \right] \\
I_6 &= -\frac{\operatorname{sen}^5 x \cos x}{6} - \frac{5}{6 \cdot 4} \operatorname{sen}^3 x \cos x - \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \operatorname{sen} x \cos x + \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} x + C.
\end{aligned}$$

2. $I_{-k} = \int \operatorname{sen}^{-k} x\, dx, \; k \in \mathbb{N}$.

De la fórmula 5.5 tenemos:

$$I_{n-2} = \frac{n}{n-1} I_n + \frac{\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x}{n-1}.$$

Escribiendo $n - 2 = -k$, nos queda

$$I_{-k} = -\frac{\cos x \operatorname{sen}^{-k+1} x}{k-1} + \frac{k-2}{k-1} I_{-k+2}.$$

Lo que nos permite escribir:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^k x} = -\frac{\cos x}{(k-1)\operatorname{sen}^{k-1} x} + \frac{k-2}{k-1} \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^{k-2} x}; \;\; k \neq 1. \tag{5.6}$$

Veamos algunos casos particulares.

Si $k = 2$,

$$I_{-2} = \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + C = -\operatorname{ctg} x + C.$$

Si $k = 3$,

$$I_{-3} = \int \frac{1}{\operatorname{sen}^3 x}\, dx = -\frac{\cos x}{2 \operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{2} I_{-1} = -\frac{\cos x}{2 \operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.$$

Observación 5.2.1 Para el caso $k = 1$ no puede emplearse la ecuación 5.6, pero puede ser resuelto directamente.

$$\begin{aligned} I_{-1} &= \int \frac{1}{\operatorname{sen} x} dx = \int \operatorname{cosec} x dx \\ &= \int \frac{\operatorname{cosec} x(\operatorname{cosec} x + \cot x) dx}{\operatorname{cosec} x + \cot x} \\ &= \int \frac{\operatorname{cosec}^2 x + \operatorname{cosec} x \cot x}{\operatorname{cosec} x + \cot x} \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable

$$\begin{cases} z = \operatorname{cosec} x + \cot x \\ dz = -(\operatorname{cosec} x \cot x + \operatorname{cosec}^2 x) dx \end{cases}$$

Obtenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{cosec}^2 x + \operatorname{cosec} x \cot x}{\operatorname{cosec} x + \cot x} &= -\int \frac{dz}{z} \\ &= -\ln|z| + C \\ &= -\ln|\operatorname{cosec} x + \cot x| + C. \end{aligned}$$

Comparar este resultado, obtenido por esta vía, con el ejemplo 5.1.10 parte 20 y verifique que son iguales.

Nota: Posteriormente se estudiara un tercer método en la sección 5.4.1 para obtener la integral de $\operatorname{cosec} x$ mediante la sustitución $t = \tan \frac{x}{2}$.

Prosiguiendo con las fórmulas de reducción, con un procedimiento análogo obtenemos las siguientes fórmulas:

3. $I_n = \int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{(n-1)}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx.$

$$\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}. \tag{5.7}$$

4. $I_n = \int \sec^n x\, dx$

$$I_n = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} x\ \tan x + \frac{(n-2)}{n-1} I_{n-2}. \tag{5.8}$$

5. $I_n = \int \operatorname{cosec}^n x\, dx$

$$I_n = -\frac{1}{n-1}\operatorname{cosec}^{n-2} x \operatorname{cotan} x + \frac{(n-2)}{n-1} I_{n-2}. \tag{5.9}$$

6. $I_n = \int \tan^n x\, dx$

$$I_n = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - I_{n-2}. \tag{5.10}$$

7. $I_n = \int x^n \operatorname{sen} x\, dx$

$$I_n = -x^n \cos x + n\int x^{n-1}\cos x\, dx. \tag{5.11}$$

8. $I_n = \int x^n \cos x\, dx$

$$I_n = x^n \operatorname{sen} x - n\int x^{n-1} \operatorname{sen} x\, dx. \tag{5.12}$$

9. $I_n = \int x^n e^{-x}\, dx \quad n \in \mathbb{N}.$

$$I_n = -x^n e^{-x} + nI_{n-1}. \tag{5.13}$$

En particular,

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int e^{-x}\, dx = -e^{-x} + C.\\
I_1 &= -xe^{-x} + I_0 = -xe^{-x} - e^{-x} + C.\\
I_2 &= -x^2e^{-x} + 2I_1 = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C.\\
I_3 &= -x^3e^{-x} + 3I_2 = -x^3e^{-x} + 3[-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}] + C.\\
&= -e^{-x}\left[x^3 + 3x^2 + 3\cdot 2x + 3\cdot 2\right] + C\\
&= -3!\, e^{-x}\left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right] + C.
\end{aligned}$$

En general se tiene:

$$\int x^n e^{-x}\, dx = -n! e^{-x}\left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right] + C.$$

10. $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$.

Si $n = 1$, entonces $I_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$.

Si $n > 1$, entonces

$$I_n = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n}\,dx = \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\,dx - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\,dx = I_{n-1} - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\,dx.$$

La segunda integral se calcula mediante integración por partes.

$$\begin{array}{lll} f(x) = x, & g'(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^n} & \\ f'(x) = 1, & g(x) & = \displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^n}\,dx = \frac{1}{2(1-n)(1+x^2)^{n-1}} \end{array}$$

Así,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\,dx &= \frac{x}{2(1-n)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} \\ &= \frac{x}{2(n+1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1} \end{aligned}$$

En consecuencia obtenemos la fórmula de reducción:

$$I_n = I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1},$$

que después de reducir términos semejantes nos queda:

$$I_n = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}. \tag{5.14}$$

En particular:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} I_1 + C \\ &= \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \arctan\ x + C. \\ I_3 &= \int \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{4} I_2 \\ &= \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3x}{8(1+x^2)} + \frac{3}{8} \arctan\ x + C. \end{aligned}$$

11. $I_n = \int (\ln x)^n \, dx$.
$$I_n = x(\ln x)^n - nI_{n-1}. \tag{5.15}$$

12. $I_n = \int x^a (\ln x)^n \, dx$.
$$I_n = \frac{x^{a+1}(\ln x)^n}{a+1} - \frac{n}{a+1} I_{n-1}, \quad a \neq -1. \tag{5.16}$$

13. $I_{m,\,n} = \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx, \quad m, n \in \mathbb{N}$.
$$I_{m,n} = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I_{m,\,n-2}. \tag{5.17}$$

Observe que esta fórmula contiene a las fórmulas 5.5 y 5.7

5.2.1. Ejercicios propuestos

Calcule las siguientes integrales

1. $\int \operatorname{sen}^{\,5} x \, dx = -\frac{1}{5} \operatorname{sen}^4 x \cos x - \frac{4}{15} \operatorname{sen}^2 x \cos x - \frac{8}{15} \cos x + C.$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen}^{\,4} x} \, dx = \frac{1}{3} \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x} - \frac{2}{3} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + C.$
3. $\int \cos^4 x \, dx = \frac{1}{4} \cos^3 x \operatorname{sen} x + \frac{3}{8} \cos x \operatorname{sen} x + \frac{3}{8} x + C.$
4. $\int \cos^5 x \, dx = \frac{1}{5} \cos^4 x \operatorname{sen} x + \frac{4}{15} \operatorname{sen} x \cos^2 x + \frac{8}{15} \operatorname{sen} x + C.$
5. $\int \operatorname{cosec}^3 x \, dx = -\frac{1}{2} \frac{\cos x}{sen^2 x} + \frac{1}{2} \ln(\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotan} x) + C.$
6. $\int \sec^4 x \, dx = \frac{1}{3} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x} + \frac{2}{3} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + C.$
7. $\int \tan^6 x \, dx = \frac{1}{5} \tan^5 x - \frac{1}{3} \tan^3 x + \tan x - x + C.$
8. $\int x^4 \operatorname{sen} x \, dx = -x^4 \cos x + 4x^3 \operatorname{sen} x + 12x^2 \cos x - 24 \cos x - 24x \operatorname{sen} x + C..$
9. $\int x^3 \cos x \, dx = x^3 \operatorname{sen} x + 3x^2 \cos x - 6 \cos x - 6x \operatorname{sen} x + C.$
10. $\int x^5 e^{-x} \, dx = -x^5 e^{-x} - 5x^4 e^{-x} - 20x^3 e^{-x} - 60x^2 e^{-x} - 120x e^{-x} - 120 e^{-x} + C.$
11. $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^4} \, dx = \frac{1}{6} \frac{x}{(1+x^2)^3} + \frac{5}{24} \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{5}{16} \frac{x}{1+x^2} + \frac{5}{16} \arctan x + C.$

12. $\int (\ln x)^2\,dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C.$

13. $\int (\ln(3x-1))^3\,dx = \dfrac{1}{3}(3x-1)\ln(3x-1)^3 - (3x-1)\ln(3x-1)^2 + 2(3x-1)\ln(3x-1) - 6x + 2 + C.$

14. $\displaystyle\int x^2\,(\ln x)^5\,dx = \frac{1}{3}x^3\ln x^5 - \frac{5}{9}x^3\ln x^4 + \frac{20}{27}x^3\ln x^2 + \frac{40}{81}x^3\ln x - \frac{40}{243}x^3 + C.$

15. $\int \operatorname{sen}^3 x\,\cos^2 x\,dx = -\dfrac{1}{3}\operatorname{sen}^2 x\cos^3 x - \dfrac{2}{15}\cos^3 x + C..$

16. $\int \operatorname{sen}^4 x\,\cos^3 x\,dx = -\dfrac{1}{7}\operatorname{sen}^3 x\cos^4 x - \dfrac{3}{35}\cos^4 x\operatorname{sen} x + \dfrac{1}{35}\cos^2 x\operatorname{sen} x + \dfrac{2}{35}\operatorname{sen} x + C..$

17. $\int \operatorname{sen}^4 x\,\cos^4 x\,dx = -\dfrac{1}{8}\operatorname{sen}^3 x\cos^5 x - \dfrac{1}{16}\operatorname{sen} x\cos^5 x + \dfrac{1}{64}\cos^3 x\operatorname{sen} x + \dfrac{3}{128}\cos x\operatorname{sen} x + \dfrac{3x}{128} + C..$

5.3. Integración de funciones racionales

Recordemos que una función racional $R(x)$ es un cuociente de polonomios, $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Para integrar este tipo de polinomios estudiaremos su descomposición en fracciones parciales simples, generalizando lo hecho en el ejercicio 13 de la sección 1.2.

5.3.1. Descomposición de un polinomio en factores

El Teorema Fundamental del Álgebra dice que un polinomio $Q(x)$ con coeficientes reales y grado n tiene n raíces en el cuerpo de los números complejos C. Esto permite descomponer $Q(x)$ en producto de factores lineales para las raíces reales y de factores cuadráticos no reducibles en $\mathbb{R}$ para las raíces complejas conjugadas.

$$Q(x) = (x-r_1)^{n_1}\ldots(x-r_j)^{n_j}(a_1x^2+b_1x+c_1)^{m_1}\ldots(a_kx^2+b_kx+c_k)^{m_k},$$

donde, $n_1+\ldots+n_j+m_1+\ldots+m_k = n =$ grado de $Q(x)$.

Ejemplo 5.3.1 1. $x^2+3x-4 = (x-1)(x+4)$.

2. x^2+2, es irreducible en $\mathbb{R}$, pues sus raíces son $\pm i\sqrt{2}$.

3. $x^4+3x^2-2x^2+6x-8 = (x-1)(x+4)(x^2+2)$.

4. $x^3+4x^2+4x+1=(x+3)(x^2+x+1)$. El polinomio cuadrático (x^2+x+1) tiene raíces complejas conjugadas $\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$, por lo tanto, es irreducible en $\mathbb{R}$.

5. $x^4-1=(x^2+1)(x-1)(x+1)$.

5.3.2. Descomposición de una función racional en fracciones simples

Sea $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios. Si el grado del numerador es igual o mayor que el denominador, entonces, realizando la división de polinomios obtenemos:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=F(x)+\frac{G(x)}{Q(x)},$$

donde, $F(x)$ y $G(x)$ son polinomios tal que el grado de $G(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$.

Ejemplo 5.3.2 1. $\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}=(x+4)$. En este caso $G(x)=0$.

2. $\dfrac{7x^3+4x^2-2x+5}{x^2-1}=7x+4+\dfrac{5x+9}{x^2-1}$.

3. $\dfrac{x^3+2}{x^2+3x+2}=x-3+\dfrac{7x+8}{x^2+3x+2}$.

Teorema 5.3.3 Sea $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ una función racional con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios con coeficientes reales y tales que $Q(x)$ puede descomponerse en la forma

$$Q(x)=(x-r_1)^{n_1}\ldots(x-r_j)^{n_j}(a_1x^2+b_1x+c_1)^{m_1}\ldots(a_kx^2+b_kx+c_k)^{m_k},$$

$P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factores comunes y el grado del numerador es menor que el del denominador, entonces $R(x)$ puede escribirse en la forma:

$$\begin{aligned}
R(x) &= \frac{A}{(x-r_1)^{n_1}}+\frac{B}{(x-r_1)^{n_1-1}}+\ldots+\frac{C}{(x-r_1)}\\
&+ \frac{D}{(x-r_2)^{n_2}}+\frac{E}{(x-r_2)^{n_2-1}}+\ldots\ldots\ldots+\frac{F}{(x-r_2)}\\
&+ \ldots\ldots+\\
&+ \frac{Gx+H}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^{m_1}}+\frac{Ix+K}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^{m_1-1}}+\ldots+\frac{Lx+M}{a_1x^2+b_1x+c_1}\\
&+ \ldots\ldots\ldots+\\
&= \frac{Nx+P}{(a_kx^2+b_kx+c_k)^{m_k}}+\frac{Qx+R}{(a_kx^2+b_kx+c_k)^{m_k-1}}+\ldots+\frac{Sx+T}{a_kx^2+b_kx+c_k},
\end{aligned}$$

para todo x tal que $Q(x) \neq 0$; y donde $A, B, C, \ldots,$ son constantes reales.

Para encontrar las constantes $A, B, C, \ldots,$ se debe realizar la suma de fracciones del segundo miembro cuyo mínimo común denominador es $Q(x)$, y se obtiene que:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{S(x)}{Q(x)}, \tag{5.18}$$

donde $S(x)$ involucra los coefiecientes desconocidos $A, B, C, \ldots,$. De la ecuación (5.18) se obtiene que

$$P(x) = S(x).$$

Usando que dos polinomios son iguales si los respectivos coeficientes de las potencias de x son iguales, se obtienen las ecuaciones cuyas soluciones dan los valores de $A, B, C, \ldots,$.

Ejemplo 5.3.4 1. $\dfrac{3x-5}{x^2-4x+3}$ es una función racional cuyo denominador tiene grado mayor que que el grado del numerador. Por otro lado, $x^2-4x+3 = (x-3)(x-1)$. Por lo tanto, los polinonios que forman la función racional no tienen factores comunes, así, podemos aplicar el teorema 5.3.3.

$$\frac{3x-5}{x^2-4x+3} = \frac{3x-5}{(x-3)(x-1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x-3)}{(x-3)(x-1)}.$$

Igualando los numeradores tenemos:

$$\begin{aligned} 3x-5 &= A(x-1)+B(x-3) \\ &= Ax - A + Bx - 3B \\ &= (A+B)x - (A+3B). \end{aligned}$$

Por la igualdad de polinomios obtenemos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} A + B &= 3 \\ A + 3B &= 5. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema obtenemos los valores $A = 2$ y $B = 1$. Por consiguiente,

$$\frac{3x-5}{x^2-4x+3} = \frac{2}{x-3} + \frac{1}{x-1}.$$

2. $\dfrac{x^5+8x^2-x+1}{x^3-4x^2+x+6}$.

Como en este caso el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, primero debemos realizar la división de polinomios.

$$\frac{x^5+8x^2-x+1}{x^3-4x^2+x+6} = (x^2+4x+15) + \frac{58x^2-40x-89}{x^3-4x^2+x+6}.$$

$x^3-4x^2+x+6 = (x+1)(x-2)(x-3)$ y no tiene factores comunes con $58x^2-40x-89$.

$$\begin{aligned}
\frac{58x^2-40x-89}{x^3-4x^2+x+6} &= \frac{58x^2-40x-89}{x^3-4x^2+x+6} \\
&= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} \\
&= \frac{A(x-2)(x-3)+B(x+1)(x-3)+C(x+1)(x-2)}{(x-3)(x+1)(x-2)}.
\end{aligned}$$

Así,

$$58x^2-40x-89 = A(x-2)(x-3)+B(x+1)(x-3)+C(x+1)(x-2). \quad (5.19)$$

Ahora podemos proceder como en el caso anterior, pero podemos hacerlo por camino más rápido **que vale solamente cuando todas las raíces del denominador son reales y simples**.

Como la expresión (5.19) vale para todo $x \in \mathbb{R}$, en particular vale cuando $x=-1$ lo que nos da $9=12A$, despejando A tenemos $A=\dfrac{9}{12}$. Haciendo $x=2$ obtenemos el valor $B=21$, finalmente, Tomando $x=3$ podemos encontrar $C=\dfrac{313}{8}$.

$$\frac{58x^2-40x-89}{x^3-4x^2+x+6} = \frac{9}{12(x+1)} + \frac{21}{x-2} + \frac{313}{8(x-3)}.$$

3. Sea $R(x) = \dfrac{x^2+2x+3}{(x-1)^2(x^2+1)}$.

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+2x+3}{(x-1)^2(x^2+1)} &= \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \\
&= \frac{A(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)}.
\end{aligned}$$

Igualando numeradores nos queda:

$$x^2+2x+3 = A(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)^2,$$

lo que implica la igualdad

$$x^2+2x+3=(B+C)x^3+(A-B-2C+D)x^2+(B+C-2D)x+(A-B+D),$$

Esto nos conduce al sistema

$$\begin{aligned} B+C &= 0\\ A-B-2C+D &= 1\\ B+C-2D &= 2\\ A-B+D &= 3, \end{aligned}$$

cuyas soluciones son $A=3,\ B=-1,\ C=1,\ D=-1$. Así la descomposición de $R(x)$ es

$$\frac{x^2+2x+3}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{3}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}+\frac{x-1}{x^2+1}.$$

4. Sea $R(x)=\dfrac{x^2+1}{(x-2)(x^2+2)^2}$.

$$\begin{aligned} \frac{x^2+1}{(x-2)(x^2+2)^2} &= \frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{(x^2+2)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+2}\\ &= \frac{A(x^2+2)^2+(Bx+C)(x-2)+(Dx+E)(x-2)(x^2+2)}{(x-2)(x^2+2)^2}. \end{aligned}$$

Igualando numeradores nos queda el sistema:

$$\begin{aligned} A+D &= 0\\ -2D+E &= 0\\ 4A+B+2D-2E &= 1\\ -2B+C-4D+2E &= 0\\ 4A-2C-4E &= 1, \end{aligned}$$

que tiene solución: $A=\dfrac{5}{56},\ B=\dfrac{1}{6},\ C=\dfrac{1}{3},\ D=-\dfrac{5}{36},\ E=-\dfrac{5}{18}$.

5.3.3. Integración de funciones racionales

Desarrollando una función racional en fracciones simples o parciales, la integral de dicha función se transforma en una suma de integrales del tipo:

1. $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,dx,$

2. $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx,\ n \neq -1,$

3. $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx,$ cuando ax^2+bx+c no tiene raíces reales.

Todas ellas son fáciles de obtener:

1. $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C,$

2. $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = \frac{-A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C,\ n \neq -1\ ; a > 0,$

Para calcular $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$, procederemos a completar el cuadrado del binomio en el denominador:

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a} \tag{5.20}$$

Sea z una variable tal que:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{4ac-b^2}{4a}z^2. \tag{5.21}$$

Despejando x obtenemos:

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{ac-b^2}}{2a}z.\ ; a > 0 \tag{5.22}$$

De (5.20) y (5.21), tenemos:

$$ax^2+bx+c = \left[\frac{4ac-b^2}{4a}\right](z^2+1).$$

Así, usando la substitución (5.22) nos queda

$$\begin{aligned}\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx = \int \frac{Cz+D}{(z^2+1)^n}\,dz \\ &= C\int \frac{z}{(z^2+1)^n}\,dz + D\int \frac{1}{(z^2+1)^n}\,dz.\end{aligned}$$

Donde A, B, C, D son constantes.

La primera de ellas , según el ejemplo 5.1.10, números 27 y 28 nos da:

$$\begin{aligned} \frac{C}{2}\frac{1}{(n-1)(z^2+1)^{n-1}} + C^* \quad & \text{si} \quad n \neq 1, \\ \frac{C}{2}\ln|z^2+1| + C^* \quad & \text{si} \quad n = 1. \end{aligned}$$

La segunda se calcula usando la fórmula de reducción 5.14.

Ejemplo 5.3.5 1. Calcule $I = \displaystyle\int \frac{x+1}{3x^2+6x+9}\,dx$.

Como, $3x^2+6x+9 = 3[x^2+2x+3] = 3\left[(x+1)^2+2\right] = 3(x+1)^2+6$.

Haciendo $3(x+1)^2 = 6z^2$, se tiene que $x = \sqrt{2}\,z - 1$.

Entonces, $3x^2+6x+9 = 6(z^2+1)$, $\;dx = \sqrt{2}\,dz$.

Así,

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{3x^2+6x+9}\,dx &= \int \frac{\sqrt{2}z}{6(z^2+1)}\sqrt{2}\,dz \\ &= \frac{1}{3}\int \frac{z}{z^2+1}\,dz \\ &= \frac{1}{6}\ln(z^2+1) + C. \\ &= \frac{1}{6}\ln\left(\frac{3x^2+6x+9}{6}\right) + C \\ &= \frac{1}{6}\ln\left(\frac{x^2+2x+3}{2}\right) + C. \end{aligned}$$

2. Calcule $I = \displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2+x+1}\,dx$.

$x^2+x+1 = \left(x^2+x+\frac{1}{4}\right) = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.

Haciendo $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}z^2$, se tiene que $x = \frac{\sqrt{3}}{2}z - \frac{1}{2}$, $\;dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\,dz$, $\;x^2+x+1 = \frac{3}{4}[z^2+1]$.

En consecuencia,

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{(\frac{3\sqrt{3}}{2}z - \frac{3}{2} - 2)}{\frac{3}{4}(z^2+1)} \frac{\sqrt{3}}{2}\, dz \\
&= \int \frac{9z - 7\sqrt{3}}{3(z^2+1)}\, dz \\
&= 3\int \frac{z}{z^2+1}\, dz - \frac{7\sqrt{3}}{3} \int \frac{1}{z^2+1}\, dz \\
&= \frac{3}{2}\ln(z^2+1) - \frac{7\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg} z + C \\
&= \frac{3}{2}\ln\left(\frac{4(x^2+x+1)}{3}\right) - \frac{7\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.
\end{aligned}
$$

Ejercicios resueltos

Calcule las siguientes integrales de funciones racionales:

1. $I = \displaystyle\int \frac{3x-5}{x^2-4x+3}\, dx.$

   Solución: Usando la descomposición hecha en el ejemplo 5.3.4 parte 1 tenemos que,

$$
\begin{aligned}
I &= \int \left(\frac{2}{x-3} + \frac{1}{x-1}\right) dx = 2\int \frac{dx}{x-3} + \int \frac{dx}{x-1} \\
&= 2\ln|x-3| + \ln|x-1| + C.
\end{aligned}
$$

2. $I = \displaystyle\int \frac{x^5+8x^2-x+1}{x^3-4x^2+x+6}\, dx.$

   Solución: En virtud del ejemplo 5.3.4 parte 2, tenemos que

$$
\begin{aligned}
I &= \int \left[x^2+4x+15+\frac{58x^2+8x+91}{x^3-4x^2+x+6}\right] dx \\
&= \int \left[x^2+4x+15+\frac{47}{4(x+1)}+\frac{113}{x-2}+\frac{637}{4(x-3)}\right] dx \\
&= \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 15x + \frac{47}{4}\ln|x+1| + 113\ln|x-2| + \frac{637}{4}\ln|x-3| + C.
\end{aligned}
$$

3. $I = \displaystyle\int \frac{x^2+2x+3}{(x-1)^2(x^2+1)}\, dx.$

Solución: Según parte 3 del ejemplo 5.3.4

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{3}{(x-1)^2}\,dx - \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{x-1}{x^2+1}\,dx \\
&= -\frac{3}{x-1} - \ln|x-1| + \int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx \\
&= -\frac{3}{x-1} - \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \text{arc tg} x + C.
\end{aligned}$$

4. $I = \displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-2)(x^2+2)^2}\,dx.$

Solución: De acuerdo a la parte 4 del ejemplo 5.3.4,

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{5}{36(x-2)}\,dx + \int \frac{x+2}{6(x^2+2)^2}\,dx + \int \frac{-5x-10}{36(x^2+2)}\,dx \\
&= \frac{5}{36}\ln|x-2| - \frac{1}{12(x^2+2)} + \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x^2+2)^2}\,dx - \frac{5}{72}\ln|x^2+2| - \frac{5}{18}\int \frac{1}{x^2+2}\,dx + C.
\end{aligned}$$

Según las fórmulas de reducción 5.14 y el ejercicio propuesto 18 de la sección 5.2:

$$\int \frac{1}{(x^2+2)^2}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x}{4(x^2+2)} + C.$$

Según el ejercicio propuesto 18 de la sección 5.1:

$$\int \frac{1}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arc tg}\,\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

5. $I = \displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,dx \;\; x \neq 1.$

Solución:

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Igualando los numeradores obtenemos $1 = A(x^2+x+1) + (x-1)(Bx+C)$, lo que implica

$$\begin{aligned}
A + B &= 0 \\
A - B + C &= 0 \\
A - C &= 1.
\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema obtenemos los valores:

$$A = \frac{1}{3},\ B = -\frac{1}{3},\ C = -\frac{2}{3}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{(x-1)}\,dx + \int \frac{-x-2}{3(x^2+x+1)}\,dx \\ &= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx. \end{aligned}$$

Para calcular la segunda integral completaremos el cuadrado correspondiente.

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4},$$

lo que nos lleva a hacer

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}z - \frac{1}{2},\ \ dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dz.$$

Así,

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx &= \frac{1}{4}\int \frac{(\sqrt{3}z+3)\sqrt{3}}{\frac{3}{4}\left[z^2+1\right]}\,dz \\ &= \frac{1}{3}\int \frac{3z+3\sqrt{3}}{z^2+1}\,dz \\ &= \frac{1}{2}\ln|z^2+1| + \sqrt{3}\text{arc tg}z + C \\ &= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \sqrt{3}\text{arc tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C. \end{aligned}$$

Finalmente podemos escribir I.

$$I = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

6. $I = \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,dx.$

Solución: Haciendo $y = \sqrt{1+e^x}$, tenemos que $y^2 = 1 + e^x$, $2ydy = e^x dx$. Por lo tanto,

$$I = \int \frac{1}{y^2 - 1}\, dy.$$

Ahora debemos utilizar la descomposición en fracciones simples:

$$\frac{1}{y^2-1} = \frac{1}{(y-1)(y+1)} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y+1},$$

lo que implica $A(y+1) + B(y-1) = 1$ y que nos da los valores

$$A = \frac{1}{2}, \;\; B = -\frac{1}{2}.$$

Por consiguiente,

$$I = \int \frac{1}{y-1}\, dy - \int \frac{1}{y+1}\, dy = \ln|y-1| - \ln|y+1| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + C.$$

Ejercicios propuestos

Calcule las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int \frac{4}{x-5}\, dx = 4\ln|x-5| + C$
2. $\displaystyle\int \frac{20}{7-x}\, dx = -20\ln|7-x| + C$
3. $\displaystyle\int \frac{4}{(x-5)^2}\, dx = -\frac{4}{x-5} + C$
4. $\displaystyle\int \frac{20}{(7-x)^5}\, dx = \frac{5}{(7-x)^4} + C$
5. $\displaystyle\int \frac{2x+43}{x^2+x-12}\, dx = -5\ln|x+4| + 7\ln|x-3| + C$
6. $\displaystyle\int \frac{4x-5}{x^2-4x+20}\, dx = 2\ln(x^2-4x+20) + \frac{3}{4}\arctan\left(\frac{x}{4} - \frac{1}{2}\right) + C$
7. $\displaystyle\int \frac{4x-7}{x^2+6x+9}\, dx = \frac{19}{x+3} + 4\ln|x+3| + C$
8. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+3x+3}\, dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+3x+3) - \frac{1}{3}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+3)\right) + C$
9. $\displaystyle\int \frac{2x-1}{(x^2+3x+3)^2}\, dx = -\frac{1}{3}\left(\frac{8x+15}{x^2+3x+3}\right) - \frac{16\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\frac{(2x+3)\sqrt{3}}{3}\right) + C$

Indicación: Complete el cuadrado de binomio en el denominador y utilice la ecuación 5.14

10. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-2)(x+4)}\,dx = \frac{1}{6}\left(\ln|x-2| - \ln|x+4|\right) + C$

11. $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx = \frac{1}{6}\Big(\ln|x| - \ln|x+3|\Big) + \frac{1}{2}\Big(\ln|x+2| - \ln|x+1|\Big) + C$

12. $\displaystyle\int \frac{3x^3-17x^2+21x-43}{x^2-8x+15}\,dx = \frac{3}{2}x^2 + 7x + 26\ln|x-3| + 6\ln|x-5| + C$

13. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x-1)}\,dx = \frac{1}{x} - \ln|x| + \ln|x-1| + C$

14. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x-8}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x+4| + \frac{1}{2}\ln|x-2| + C$

15. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+1)(x-2)^2}\,dx = -\frac{4}{5}\frac{1}{(x-2)} + \frac{4}{25}\ln|x-2| - \frac{2}{25}\ln(x^2+1) - \frac{3}{25}\arctan x + C$

16. $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^4}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\operatorname{arctanh} x + \dfrac{1}{2}\arctan x + C & \text{si } |x| < 1 \\[2ex] \dfrac{1}{2}\operatorname{arccotanh} x + \dfrac{1}{2}\arctan x + C & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$

17. $\displaystyle\int \frac{1}{x^6+1}\,dx = \frac{1}{3}\arctan x - \frac{\sqrt{3}}{12}\ln(x^2-\sqrt{3}x+1) + \frac{1}{6}\arctan(2x-\sqrt{3}) + \frac{\sqrt{3}}{12}\ln(x^2+$ $\displaystyle x\sqrt{3}+1) + \frac{1}{6}\arctan(2x+\sqrt{3}) + C.$
Indicacion: $x^6+1 = (x^2+1)(x^2-\sqrt{3}\,x+1)(x^2+\sqrt{3}\,x+1)$.

18. $\displaystyle\int \frac{1}{x^6-1}\,dx = \frac{1}{6}\ln|x-1| - \frac{1}{12}\ln(x^2+x+1) - \frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)\right) - \frac{1}{6}\ln|x+$ $\displaystyle 1| + \frac{1}{12}\ln(x^2-x+1) + C$

19. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(1-x^2)^2}\,dx. = -\frac{1}{x} - \frac{1}{4(x-1)} - \frac{3}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{3}{4}\ln|x+1| + C$

20. $\displaystyle\int \frac{x^2-x+4}{(x^2-1)(x+2)}\,dx = \frac{2}{3}\ln|x-1| - 3\ln|x+1| + \frac{10}{3}\ln|x+2| + C$

21. $\displaystyle\int \frac{x}{(x+2)(x+3)^2}\,dx = -2\ln|x+2| - \frac{3}{(x+3)} + 2\ln|x+3| + C$

5.4. Integración de ciertas funciones trascendentes.

5.4.1. Integración de funciones .

1. **Integración de funciones racionales en seno y coseno**. Si $R(u,v)$ denota una función racional de las variables u y v. Una función de tipo $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ se integra usando la substitución $t = \tan \dfrac{x}{2}$ En virtud de las identidades trigonométricas tenemos que:

$$\frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}x} = \sec^2 \frac{1}{2}x = 1 + \tan^2 \frac{1}{2}x$$

implica

$$\cos^2 \frac{1}{2}x = \frac{1}{1+t^2}.$$

Como,

$$\begin{aligned} \cos x &= 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 \\ \cos x &= \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned} \tag{5.23}$$

Por otro lado,

$$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}x = 1 - \cos^2 \frac{1}{2}x = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Así,

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x = \frac{2t}{1+t^2}. \tag{5.24}$$

$t = \tan \frac{x}{2}$ es equivalente a tener $x = 2 \arctan t$, por tanto

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2} \tag{5.25}$$

De (5.23), (5.24) y (5.25) vemos que una integral de una función racional en $\operatorname{sen} x, \cos x$ se puede transformar en una integral de una función racional en la variable t. La que puede ser integrada por los métodos ya estudiados. En símbolos:

$$I = \int R(\text{ sen } x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2}dt.$$

Ejemplo 5.4.1 *a*) Casos particulares de este tipo de integral son los ejemplos 19 y 20 de 5.1.10.

b) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{2\cos x - 3 \text{ sen } x}$

Haciendo $t = \tan\dfrac{x}{2}$, usando los cálculos recién hechos obtenemos que

$$I = \int \frac{1}{2\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2} - 3\cdot\dfrac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt$$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1+t^2}{-2t^2-6t+2} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{-dt}{t^2+3t-1} \\
&= -\int \frac{dt}{\left(t - \dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)\left(t - \dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}\right)} \\
&= -\int \frac{1}{\sqrt{13}\left(t - \dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)}dt + \int \frac{1}{\sqrt{13}\left(t - \dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}\right)}dt \\
&= -\frac{1}{\sqrt{13}} \ln\left|\frac{2t+3-\sqrt{13}}{2}\right| + \frac{1}{\sqrt{13}} \ln\left|\frac{2t+3+\sqrt{13}}{2}\right| + C \\
&= +\frac{1}{\sqrt{13}} \ln\left|\frac{2t+3+\sqrt{13}}{2t+3-\sqrt{13}}\right| + C \\
&= +\frac{1}{\sqrt{13}} \ln\left|\frac{2\tan\dfrac{x}{2}+3+\sqrt{13}}{2\tan\dfrac{x}{2}+3-\sqrt{13}}\right| + C.
\end{aligned}$$

c) $I = \dfrac{dx}{\text{sen } x - \cos x + 1}$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{\dfrac{2t}{1+t^2} - \dfrac{1-t^2}{1+t^2} + 1} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\
&= \frac{1+t^2}{2t(t+1)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{dt}{t(t+1)} \\
&= \int \frac{1}{t} dt - \int \frac{1}{t+1} dt = \ln|t| - \ln|t+1| + C \\
&= \ln\left|\frac{t}{t+1}\right| + c = \ln\left|\frac{\tan\dfrac{x}{2}}{\tan\dfrac{x}{2}+1}\right| + C
\end{aligned}$$

d) $I = \dfrac{dx}{\operatorname{sen} x + 1}$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{\dfrac{2t}{1+t^2} + 1} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\
&= \int \frac{1+t^2}{t^2+1+2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2dt}{(t+1)^2} \\
&= \frac{-2}{(t+1)} + C = \frac{-2}{\tan\dfrac{x}{2}+1} + C.
\end{aligned}$$

2. **Integración de** $f(x) = \operatorname{sen}^m x \cos^n x$ **con** $m, n \in \mathbb{Q}$.

   Si m, n son enteros y además :

   * m es impar, se usa la substitución $t = \cos x$.
   * n es impar, se usa la substitución $t = \operatorname{sen} x$.
   * m, n son pares, se usa la substitución $t = \tan x$.

   Si m, n son números racionales, entonces haciendo $t = \operatorname{sen} x$, la integral

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$$

   se transforma en

$$\int t^m(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dt$$

que es una integral estudiada en la sección 5.5 y que puede ser calculada si uno de los números $\dfrac{m+1}{2}, \dfrac{n-1}{2}, \dfrac{m+n}{2}$ es un entero.

Ejemplo 5.4.2 *a*) $I = \displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\,dx.$

En este caso , $n = 3$ es impar.

Sea $t = \operatorname{sen} x$, $\dfrac{dt}{dx} = \cos x$

$$\begin{aligned} I &= \int \operatorname{sen}^2 x \, \cos^2 x \cdot \cos x\,dx \\ &= \int \operatorname{sen}^2 x(1 - \operatorname{sen}^2 x)\cos x\,dx \\ &= \int t^2(1-t^2)\,dt = \int (t^2 - t^4)\,dt \\ &= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x - \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + C. \end{aligned}$$

Esta integral también puede ser calculada usando la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, expresando toda la función en $\operatorname{sen} x$ o $\cos x$, para después evaluar por partes (fórmulas de reducción) o usar ángulos dobles.

b) $I = \displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \, \cos^4 x\,dx.$

$$I = \int (1-\cos^2 x)\cos^4 x\,dx = \int \cos^4 x\,dx - \int \cos^6 x\,dx$$

Cada una de ellas puede calcularse usando la respectiva fórmula de reducción. Calcularemos $\displaystyle\int \cos^4 x dx$ por medio de ángulos dobles, para mostrar un camino alternativo a las fórmulas de reducción. Reemplazando

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},$$

en la integral I nos queda:

$$
\begin{aligned}
\int \cos^4 x\, dx &= \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx \\
&= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\text{sen }\ 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{32}\text{sen }\ 4x + C \\
&= \frac{3}{8} + \frac{1}{4}\text{sen }\ 2x + \frac{1}{32}\text{sen }\ 4x + C.
\end{aligned}
$$

c) $I = \displaystyle\int \text{sen }^2 x\ \cos^4 x\, dx.$

Como ambos exponentes son pares, usaremos la substitución $t = \tan x$ y las expresiones de sen x, cos x en función de tangente, desarrolladas en el ejercicios resuelto 1 de la sección 2.3 del Capítulo 2.

$$
\begin{aligned}
\text{sen }^2 x &= \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \\
\cos^2 x &= \frac{1}{1+\tan^2 x} \\
\frac{dt}{dx} &= \sec^2 x = 1 + t^2
\end{aligned}
$$

Así la integral I queda como:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{t^2}{1+t^2}\cdot\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2\cdot\frac{1}{1+t^2}\, dt \\
I &= \int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^4}
\end{aligned}
$$

que es una integral estudiada en la sección 4.2, ejemplo 10, y nos da:

$$
I = \frac{x}{16} + \frac{\text{sen } 2x}{64} - \frac{\text{sen } 4x}{64} - \frac{\text{sen } 6x}{192}.
$$

d) $I = \displaystyle\int \sqrt{\tan x}\, dx.$

$$I \;=\; \int \sqrt{\frac{\text{sen }\, x}{\cos x}}\, dx = \int \text{ sen }^{\frac{1}{2}} x \cos^{-\frac{1}{2}} x\, dx$$

Como $\dfrac{m+n}{2} = 0$, usaremos la substitución $t = \text{ sen }\, x$ y obtenemos la integral

$$I = \int t^{\frac{1}{2}} (1-t^2)^{-\frac{3}{4}} dt.$$

Ahora aplicaremos una segunda substitución siguiendo lo visto en la sección 5.5. Haciendo
$z = t^2$, la integral I toma la forma:

$$I = \frac{1}{2} \int z^{-1} \left(\frac{1-z}{z}\right)^{-\frac{3}{4}} dz.$$

Ahora debemos emplear la substitución $u = \sqrt[4]{\dfrac{1-z}{z}}$, e I queda expresada como $I = -2 \displaystyle\int \frac{du}{u^4+1}$.
Como

$$u^4 + 1 = (u^2 + \sqrt{2}u + 1)(u^2 - \sqrt{2}u + 1)$$

y ambos polinomios cuadráticos son irreducibles en $\mathbb{R}$,
por desarrollo en fracciones simples podemos escribir:

$$\int \frac{du}{u^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{1+\sqrt{2}u + u^2}{1-\sqrt{2}u+u^2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{\sqrt{2}u}{1-u^2} + C.$$

Volviendo a las variables originales:

$$u = \sqrt[4]{\frac{1-z}{z}} = \sqrt[4]{\frac{1-t^2}{t^2}} = \sqrt[4]{\frac{\cos^2 x}{\text{sen }^2 x}} = \sqrt{\cot x}$$

Finalmente,

$$I = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{1+\sqrt{2\cot x} + \cot x}{1-\sqrt{2\cot x}+\cot x} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\sqrt{2\cot x}}{1-\cot x} + C.$$

3. **Integrales de:** **sen** (ax) **sen** (bx) **,** $\cos(ax)\cos(bx)$ **,** **sen** $(ax)\cos(bx)$, $a \neq b$.

   Se resuelven usando las fórmulas trigonométricas que transforman productos en sumas:

$$\begin{aligned}
\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\psi &= \frac{1}{2}[\cos(\theta-\psi)-\cos(\theta+\psi)]\\
cos\theta\cos\psi &= \frac{1}{2}[\cos(\theta-\psi)+\cos(\theta+\psi)]\\
\text{sen}\,\theta\cos\psi &= \frac{1}{2}[\text{ sen }(\theta-\psi)+\text{ sen }(\theta+\psi)]
\end{aligned}$$

   Ejemplo 5.4.3

$$\begin{aligned}
I &= \int \text{sen}\,3x\cos 7x dx\\
&= \int \frac{1}{2}[\text{ sen }(-4x)+\text{ sen }(10x)]dx\\
&= \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{20}\cos 10x + C.
\end{aligned}$$

4. **Integrales del tipo** $\int P(x)$ sen $mxdx$, $\int P(x)\cos mxdx$, donde $P(x)$ es un polinomio.

   Se calculan usando integración por partes. Haciendo $f(x)=P(x)$, $g'(x)=$ sen mx tenemos que $f'(x)=P'(x)$; $g(x)=-\dfrac{1}{m}\cos mx$. Por lo tanto,

   $\int P(x)$ sen $mxdx = -\dfrac{1}{m}P(x)\cos mx + \dfrac{1}{m}\int P'(x)\cos mx\,dx$.

   La segunda integral del miembro derecho se calcula nuevamente por partes. En cada etapa baja en una unidad el grado del polinomio $P(x)$ llegándose finalmente a la integral $\int \cos mx\,dx$ o $\int$ sen $mx\,dx$.

   Ejemplo 5.4.4 $I=\int (x^2-3x+1)\cos 2x\,dx$.

   Integrando por partes tenemos que,

$$I=\frac{1}{2}(x^2-3x+1)\,\text{sen}\,2x-\frac{1}{2}\int(2x-3)\text{sen}2x\,dx$$

$$\begin{aligned}\int (2x-3)\text{sen } 2x\,dx &= -\frac{1}{2}(2x-3)\cos 2x + \frac{1}{2}\int 2\cos 2x\,dx \\ &= -\frac{1}{2}(2x-3)\cos 2x + \frac{1}{2}\text{sen } 2x + C.\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2}(x^2-3x+1)\text{sen } 2x + \frac{1}{4}(2x-3)\cos 2x - \frac{1}{4}\text{sen } 2x + C \\ I &= \frac{1}{2}(x^2-3x+\frac{1}{2})\text{sen } 2x + \frac{1}{4}(2x-3)\cos 2x + C.\end{aligned}$$

5. **Aplicación de las integrales trigonométricas en el cálculo de integrales de funciones irracionales de segundo grado.**

   Las integrales que involucran potencias enteras de x y de una de las raíces: $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$, $\sqrt{x^2+a^2}$ pueden ser transformadas en una integral de una función racional en sen x, $\cos x$, $R(\text{sen } x, \cos x)$, usando una de las sustituciones $x = \text{sen } t$, $x = \tan t$, $x = \sec t$.

   La substitución $x = a\,\textbf{sen}\ t$ **:** Para integrar una función que involucra potencias enteras de x y de $\sqrt{a^2-x^2}$, con $a > 0$ se usa la substitución: $x = a$ sen t. Así tenemos:

$$\begin{aligned}x = a\,\text{sen}\,t &\Leftrightarrow t = \text{arc sen}\,\frac{x}{a} \\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &\Leftrightarrow -1 \leq \frac{x}{a} \leq 1 \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \\ \frac{dx}{dt} &= a\cos t, \\ \sqrt{a^2-x^2} &= \sqrt{a^2-a^2\ \text{sen}\ ^2 t} = a\sqrt{1-\ \text{sen}\ ^2 t} = a|\cos t| = a\cos t.\end{aligned}$$

   Ejemplo 5.4.5 $I = \displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx.$

   Si $x = 2\,\text{sen}\ t$ entonces,

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{4\ \text{sen}\ ^2 t}{2\cos t} 2\cos t dt = 4\int\ \text{sen}\ ^2 t\, dt \\
&= 4\int \frac{1-\cos 2t}{2} dt = 2t - \ \text{sen}\ \ 2t + C \\
&= 2t - 2\ \text{sen}\ t\ \cos t + C \\
&= 2\,\text{arc sen}\ \frac{x}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C.
\end{aligned}$$

La substitución $x = a\ \tan t$ **:** Esta es adecuada para integrar funciones que involucran potencias enteras de x y de $\sqrt{x^2+a^2}$, $a > 0$.

Haciendo $x = a\tan t$ se tiene

$$\begin{aligned}
x = a\tan t &\quad\Leftrightarrow\quad t = \arctan\frac{x}{a} \\
x \in]-\infty, +\infty[&\quad\Leftrightarrow\quad t \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[
\end{aligned}$$

$$\frac{dx}{dt} = a\sec^2 t;\quad \sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2(\tan^2 t + 1)} = a\sec t \quad \text{pues} \quad t \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Ejemplo 5.4.6 $I = \displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+16}\, dx$:

Si $x = 4\ \tan t$ entonces,

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{16\tan^2 t}{4\sec^2 t} 4\sec^2 t\, dt = 16\int \tan^2 t\, dt \\
&= 16\int (\sec^2 t - 1)\, dt = 16\tan t - 16t + C \\
&= 16\cdot\frac{x}{4} - 16\arctan(\frac{x}{4}) + C \\
&= 4x - 16\arctan\frac{x}{4} + C.
\end{aligned}$$

La substitución $x = a\ \sec t$ **:** Es adecuada para integrar funciones que involucran potencias enteras de x y de $\sqrt{x^2-a^2}$; $a > 0$.

Haciendo $x = a\sec t$ se tiene:

$$\begin{aligned} x = a\sec t \quad &\Leftrightarrow \quad t = \operatorname{arcsec}\frac{x}{a} \\ x \in]-\infty, a] \cup [a, +\infty[\quad &\Leftrightarrow \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right] \\ \frac{dx}{dt} \quad &= \quad a\sec t\tan t\,dt \\ \sqrt{x^2 - a^2} \quad &= \quad a\,|\tan t|. \end{aligned}$$

Es necesario tomar el valor absoluto, pues para $x < -a$, $t \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ y por consiguiente la tangente de t es negativa.

Ejemplo 5.4.7 $I = \displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}dx.$

$x = 3\sec t$, $\dfrac{dx}{dt} = 3\,\sec t\,\tan t\,dt$; $\sqrt{x^2-9} = 3|\tan t|$. Así,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{9\sec^2 t}{3|\tan t|}\cdot 3\,\sec t\tan t\,dt \\ &= \begin{cases} \displaystyle\int 9\sec^3 t\,dt & \text{si} \quad x < -3 \\ \\ \displaystyle -\int 9\sec^3 t\,dt & \text{si} \quad x > 3. \end{cases} \end{aligned}$$

La integral $J = \displaystyle\int \sec^3 t\,dt$ puede calcular usando la fórmula de reducción 4 de la sección 4.2.

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}\sec t\,\tan t + \frac{1}{2}\int \sec t\,dt \\ &= \frac{1}{2}\sec t\,\tan t + \frac{1}{2}\ln|\tan(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4})| + C \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{\sqrt{x^2-9}}{3} + \frac{1}{2}\ln|x + \sqrt{x^2-9}| + C. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-9} + \frac{9}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-9}| + C.$$

5.4.2. Integración de funciones trigonométricas inversas.

1. **La integral** $\displaystyle\int f(\operatorname{arc\,sen} x)\,dx$.

   Se calcula mediante la substitución $t = \operatorname{arc\,sen} x$ que transforma la integral en una del tipo $\int f(t)\cos t\,dt$. La cual puede calcularse en los casos en que $f(t)$ es un polinomio según lo visto en el párrafo anterior.

   Ejemplo 5.4.8 $I = \displaystyle\int (\operatorname{arc\,sen} x)^2\,dx$.

   Haciendo $t = \operatorname{arc\,sen} x$,

   $$I = \int t^2 \cos t\,dt$$

   Para esta integral podemos proceder como en el párrafo anterior o usar las fórmulas de reducción 5.11 y 5.12.

   $$\begin{aligned} I &= t^2 \operatorname{sen} t - 2\textstyle\int t\,\operatorname{sen} t\,dt \\ &= t^2\operatorname{sen} t - 2[-t\cos t + \textstyle\int \cos t\,dt] \\ &= t^2\operatorname{sen} t + 2t\cos t - 2\operatorname{sen} t + C \\ &= (t^2-2)\operatorname{sen} t + 2t\cos t + C \end{aligned}$$

   Como $\operatorname{sen} t = x$, $\cos t = \sqrt{1-x^2}$, la integral es,

   $$I = ((\operatorname{arc\,sen} x)^2 - 2)x + 2\sqrt{1-x^2}\operatorname{arc\,sen} x + C.$$

2. **La integral** $\displaystyle\int P(x)\ \operatorname{arc\,sen} x dx$ **donde** $P(x)$ **es un polinomio.**

   Se realiza por el método de integración por partes.

Ejemplo 5.4.9 $I = \displaystyle\int x \ \operatorname{arc\,sen} x\, dx.$

Haciendo: $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x$, $g'(x) = x$ tenemos,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ ; \ \ g(x) = \frac{x^2}{2}$$

Así,

$$I = \frac{x^2}{2} \operatorname{arc\,sen} x - \int \frac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}} dx$$

La segunda integral se puede calcular usando la substitución trigonométrica $x = \operatorname{sen} t$ y es del mismo tipo que la integral del ejemplo 5.4.5.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen} x + C$$

Finalmente,

$$I = \frac{x^2}{2} arcsenx - \frac{1}{4} arcsenx + \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} + C.$$

5.4.3. Integración de funciones hiperbólicas, exponenciales y logarítmicas.

1. **Funciones hiperbólicas.**

   Mediante la substitución $x = au$, $dx = a\, du$ se obtienen las siguientes generalizaciones de las fórmulas de integración dadas por el teorema **??**.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \operatorname{arccosh} \frac{x}{a}; \quad \text{para } \ |x| > |a|.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \operatorname{arcsenh} \frac{x}{a}; \quad \text{para } \ x \in \mathbb{R}.$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{a} \operatorname{arctanh} \dfrac{x}{a}; \ \ \text{para } \ |x| < |a| \\[2ex] \dfrac{1}{a} \operatorname{arccotanh} \dfrac{x}{a}; \ \ \text{para } \ |x| > |a| \end{cases}$$

Usando la substitución $u = \cosh x$ y $u =$ senh x se obtienen, respectivamente, las fórmulas:

$$\begin{aligned} \int \tanh x \, dx &= \ln \cosh x \\ \int \coth x \, dx &= \ln |\operatorname{sen} h\, x|. \end{aligned}$$

Mediante la substitución $x = a \cosh u$ se obtiene:

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = -\frac{a^2}{2} \operatorname{arccosh} \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Análogamente la substitución $x = a$ senh u permite calcular:

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsenh} \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2}$$

La substitución $u = \frac{a}{x}$; $dx = -\frac{a}{u^2} du$ nos da las fórmulas:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + a^2}} &= -\frac{1}{a} \operatorname{arcsenh} \frac{a}{x} \\ \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} &= - \end{aligned}$$

2. **Substituciones hiperbólicas**

Los resultados anteriores, nos permiten observar que las integrales que involucran potencias enteras de x y una de las raices $\sqrt{x^2 + a^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$ pueden ser transformadas en una integral de una función racional en $\operatorname{senh} x$ y $\cosh x$, $R(\operatorname{senh} x, \cosh x)$ (o eventualmente si fuese más conveniente en una racional en terminos de funciones exponenciales), mediante las sustituciones $x = a \operatorname{senh} t$, $x = a \cosh t$. Este método es por tanto, una alternativa a las substituciones $x = a \sec t$, $x = a \tan t$ estudiadas anteriormente.

La substitución $x = a$ senh t **:** Para integrar una función que involucra potencias enteras de x y de $\sqrt{a^2 + x^2}$, con $a > 0$ se usa la substitución: $x = a \operatorname{senh} t$ Así tenemos:

$$\begin{aligned}
x = a \operatorname{senh} t &\quad \Leftrightarrow \quad t = \operatorname{arcsenh} \frac{x}{a} \\
t \in]-\infty, +\infty[&\quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{R} \\
\frac{dx}{dt} &\quad = \quad a \cosh t, \\
\sqrt{a^2 + x^2} &\quad = \quad \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{senh}^2 t} = a\sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 t} = a|\cosh t| = a \cosh t.
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.4.10 $I = \displaystyle\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9 + x^2}}$.

Si $x = 3 \operatorname{senh} t$ entonces $dx = 3 \cosh t dt$ luego,

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9 + x^2}} = \int \frac{3 \operatorname{senh}^2 t \cosh t dt}{\sqrt{9 + 9 \operatorname{senh}^2 t}} \\
&= \int \operatorname{senh}^2 t \, dt = \int \frac{-1 + \cosh 2t}{2} \, dt \\
&= -\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{senh} 2t}{4} + C = -\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{senh} t \cosh t}{2} + C \\
&= -\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{senh} t \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 t}}{2} + C \\
&= -\frac{\operatorname{arcsenh} \frac{x}{3}}{2} + \frac{x\sqrt{9 + x^2}}{18} + C.
\end{aligned}$$

La substitución $x = a \cosh t$ **:** Para integrar una función que involucra potencias enteras de x y de $\sqrt{x^2 - a^2}$, con $a > 0$ se usa la substitución: $x = a \cosh t$ Así tenemos:

$$\begin{aligned}
x = a \cosh t &\quad \Leftrightarrow \quad t = \operatorname{arccosh} \frac{x}{a} \\
t \in [0, +\infty[&\quad \Leftrightarrow \quad x \in [1, +\infty[\\
\frac{dx}{dt} &\quad = \quad a \operatorname{senh} t, \\
\sqrt{x^2 - a^2} &\quad = \quad \sqrt{a^2 \cosh^2 t - a^2} = a\sqrt{\cosh^2 t - 1} = a|\operatorname{senh} t| = a \operatorname{senh} t.
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.4.11 $I = \displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-9}}$.

Si $x = 3\cosh t$ entonces $dx = 3\,\mathrm{senh}\, t dt$ luego,

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-9}} = \int \frac{3\ \cosh^2 t\,\mathrm{senh}\, t dt}{\sqrt{9\cosh^2 t - 9}} \\
&= \int \cosh^2 t\, dt = \int \frac{1+\cosh 2t}{2}\, dt \\
&= \frac{t}{2} + \frac{\mathrm{senh}\, 2t}{4} + C = \frac{t}{2} + \frac{\mathrm{senh}\, t \cosh t}{2} + C \\
&= \frac{t}{2} + \frac{\cosh t \sqrt{\cosh^2 t - 1}}{2} + C \\
&= \frac{\mathrm{arccosh}\,\frac{x}{3}}{2} + \frac{x\sqrt{x^2-9}}{18} + C.
\end{aligned}$$

3. **Integrales del tipo** $\displaystyle\int f(a^x)\, dx$.

Se calculan haciendo $u = a^x$, $\dfrac{du}{dx} = \ln a\, a^x$. Así, la integral $\displaystyle\int f(a^x)\, dx$ se transforma en una de la forma

$$\frac{1}{\ln a} \int \frac{f(u)}{u}\, du$$

Ejemplo 5.4.12 (1) $I = \displaystyle\int \frac{1}{a^x+1} dx$.

Sea $u = a^x$, entonces

$$I = \frac{1}{\ln a} \int \frac{1}{u+1} \cdot \frac{1}{u} du$$

Esta se realiza mediante la descomposición en fracciones simples:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\ln a}\left[\int \frac{-1}{u+1}du + \int \frac{1}{u}du\right] \\ &= \frac{1}{\ln a}[-\ln|u+1| + \ln|u|] + C \\ &= \frac{1}{\ln a}\ln\left|\frac{u}{u+1}\right| + C = \frac{1}{\ln a}\ln\frac{a^x}{a^x+1} + C. \end{aligned}$$

(2) $I = \displaystyle\int \sqrt{1-a^x}dx.$

Haciendo $u = a^x$ nos queda: $I = \dfrac{1}{\ln a}\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-u}}{u}\,du$. Esto se calcula mediante la substitución $y = \sqrt{1-u}$ que nos da: $y^2 = 1-u$, $2ydy = -du$. Por lo tanto,

$$I = \frac{-2}{\ln a}\int \frac{y^2}{1-y^2}dy;$$

que puede calcularse usando descomposición en fracciones parciales, obteniendo:

$$\begin{aligned} I &= \frac{-2}{\ln a}\left[2y + \ln\left|\frac{1-y}{1+y}\right|\right] + c \\ &= \frac{-2}{\ln a}\left[2\sqrt{1-a^x} + \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-a^x}}{1+\sqrt{1-a^x}}\right|\right] + C. \end{aligned}$$

4. **Integrales del tipo** $\displaystyle\int P(x)a^x dx$, **donde** $P(x)$ **es un polinomio.**

Utilizando integración por partes se puede bajar sucesivamente el grado del polinomio $P(x)$. Sea

$$f(x) = P(x); \quad g'(x) = a^x; \quad f'(x) = P'(x); \quad g(x) = \frac{1}{\ln a}a^x.$$

Así,

$$\int P(x)a^x\,dx = \frac{P(x)\cdot a^x}{\ln a} - \frac{1}{\ln a}\int P'(x)a^x\,dx.$$

La integral del miembro derecho vuelve a integrarse por partes, hasta que finalmente se llega a la integral $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}$.

Ejemplo 5.4.13 $I = \displaystyle\int (x^3-1)a^x dx$.

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{(x^3-1)a^x}{\ln a} - \frac{1}{\ln a}\int 3x^2 a^x dx \\
&= \frac{(3x-1)a^x}{\ln a} - \frac{3}{\ln a}\left[\frac{x^2\cdot a^x}{\ln a} - \frac{1}{\ln a}\int 2xa^x dx\right] \\
&= \frac{(x^3-1)a^x}{\ln a} - \frac{3x^2a^x}{(\ln a)^2} + \frac{6}{(\ln a)^2}\int xa^x dx \\
&= \frac{(x^3-1)a^x}{\ln a} - \frac{3x^2a^x}{(\ln a)^2} + \frac{6}{(\ln a)^2}\left[\frac{xa^x}{\ln a} - \frac{1}{\ln a}\int a^x dx\right] \\
&= \frac{(x^3-1)a^x}{\ln a} - \frac{3x^2a^x}{(\ln a)^2} + \frac{6}{(\ln a)^2}\left[\frac{xa^x}{\ln a} - \frac{1}{(\ln a)^2}a^x\right] + C \\
&= \frac{(x^3-1)a^x}{\ln a} - \frac{3x^2a^x}{(\ln a)^2} + \frac{6xa^x}{(\ln a)^3} - \frac{6a^x}{(\ln a)^4} + C \\
&= \left[\frac{x^3-1}{\ln a} - \frac{3x^2}{(\ln a)^2} + \frac{6x}{(\ln a)^3} - \frac{6}{(\ln a)^4}\right]a^x + C.
\end{aligned}
$$

5. **Integrales del tipo** $\displaystyle\int P(\ln x)dx$; **donde** $P(x)$ **es un polinomio.**

Utilizando la substitución $u = \ln x$, estas integrales pueden llevarse a una del tipo anterior.

Si $u = \ln x$, entonces, $x = e^u$, $dx = e^u du$. Así,

$$\int P(\ln x)\,dx = \int P(u)e^u\,du.$$

Ejemplo 5.4.14 $I = \displaystyle\int ((\ln x)^3 - 1)dx$.

Haciendo $u = \ln x$.

$$I = \int (u^3 - 1)e^u du$$

Esta integral nos da como en el ejemplo anterior

$$I = [u^3 - 1 - 3u^2 + 6u - 6]e^x + C.$$

$(\ln e = 1)$.

$$\begin{aligned} I &= [u^3 - 3u^2 + 6u - 7]e^x + C \\ I &= [(\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 + 6\ln x - 7]x + C \end{aligned}$$

6. **Integrales del tipo** $\displaystyle\int x^n(\ln x)^m dx;\ \ m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{Z}.$

   Si $n = -1$

   $I = \displaystyle\int \frac{(\ln x)^m}{x} dx$, se realiza usando $u = \ln x$. I se transforma en $\displaystyle\int e^{-1}u^m du$ que puede ser calculada con la fórmula de reducción 5.13.

   Si $n \neq -1$, se utiliza integración por partes,

   $f = (\ln x)^m; \qquad g' = x^n$

   $f' = \dfrac{m(\ln x)^{m-1}}{x} \qquad g = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}.$

   Por lo tanto,

$$\int x^n(\ln x)^m dx = \frac{x^{n+1}(\ln x)^m}{n+1} - \frac{m}{n+1}\int x^n(\ln x)^{m-1}dx.$$

   Usando recursivamente integración por partes se llega finalmente a la integral $\displaystyle\int x^n dx$.

Ejemplo 5.4.15 $I = \displaystyle\int x^3(\ln x)^2\, dx.$

Aplicando la fórmula con $n = 3$ y $m = 2$, nos queda:

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^4(\ln x)^2}{4} - \frac{2}{4}\int x^3(\ln x)\,dx \\ &= \frac{x^4(\ln x)^2}{4} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^4\ \ln x}{4} - \frac{1}{4}\int x^3\,dx\right] \\ &= \frac{x^4(\ln x)^2}{4} - \frac{x^4\,(\ln x)}{8} + \frac{1}{8}\int x^3\,dx \\ &= \frac{x^4(\ln x)^2}{4} - \frac{x^4\,(\ln x)}{8} + \frac{x^4}{32} + C. \end{aligned}$$

7. **Integrales del tipo** $\displaystyle\int P(x)(\ln x)^m dx$.

   Estos contienen a las integrales recién estudiadas, por lo que se procede de igual manera.

Ejemplo 5.4.16 $I = \displaystyle\int (x^3 - 1)(\ln x)^2\,dx$.

Aplicando la fórmula para $P(x) = x^3 - 1$ y $m = 2$ tenemos:

$$I = \int x^3\ (\ln x)^2\,dx - \int (\ln x)^2\,dx.$$

La primera integral es la que hemos calculado en el ejemplo 5.4.15 , la segunda se calcula usando lo descrito en 5 usando la substitución $x = e^u$ y obtenemos:

$$\int (\ln x)^2\,dx = \big[(\ln x)^2 - 2\ln x + 2\big]\,x + C.$$

Así,

$$I = \frac{x^4(\ln x)^2}{4} - \frac{x^4\,(\ln x)}{8} + \frac{x^4}{32} + \big[(\ln x)^2 - 2\ln x + 2\big]\,x + C.$$

5.4.4. Ejercicios propuestos

1. $\displaystyle\int \frac{(1 + \operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x(1 + \cos x)}\,dx = \frac{1}{4}\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) + \tan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln\left[\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right] + C.$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x\ \cos^2 x}\,dx = \frac{1}{\operatorname{sen} x\cos x} - 2\operatorname{cotan} x + C.$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen} x\ \cos^2 x}\,dx = \frac{1}{\cos x} + \ln\left[\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right] + C.$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x\,\cos x}\,dx = -\frac{1}{\operatorname{sen}\,x} + \ln\left[\sec x + \tan x\right] + C.$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen} x\,\cos x}\,dx = \ln(\tan x) + C.$

6. $\displaystyle\int \operatorname{sen}\,4x \operatorname{sen}\,3x\,dx = \frac{\operatorname{sen}\,x}{2} - \frac{\operatorname{sen}\,7x}{14} + C.$

7. $\displaystyle\int \operatorname{sen}\,(4x-4)\operatorname{sen}\,(3x-3)\,dx = \frac{\operatorname{sen}\,(x-1)}{2} - \frac{\operatorname{sen}\,7(x-1)}{14} + C$

8. $\displaystyle\int \operatorname{sen}\,5x\,\cos 2x\,dx = -\frac{\cos 3x}{6} - \frac{\operatorname{sen}\,7x}{14} + C$

9. $\displaystyle\int \cos 8x\,\cos 3x\,dx = \frac{\operatorname{sen}\,5x}{10} - \frac{\operatorname{sen}\,11x}{22} + C$

10. $\displaystyle\int \operatorname{sen}\,ax\,\cos bx\,dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(a-b)\,x}{a-b} + \frac{\cos(a+b)\,x}{a+b}\right] + C$

11. $\displaystyle\int \operatorname{sen}\,ax \operatorname{sen}\,bx\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}\,(a-b)\,x}{a-b} - \frac{\operatorname{sen}\,(a+b)\,x}{a+b}\right] + C$

12. $\displaystyle\int \cos ax\,\cos bx\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}\,(a-b)\,x}{a-b} + \frac{\operatorname{sen}\,(a+b)\,x}{a+b}\right] + C$

13. $\displaystyle\int \cos x\,\cos 2x\,\cos 3x\,dx = \frac{1}{4}\left(\frac{\operatorname{sen}\,6x}{6} + \frac{\operatorname{sen}\,4x}{4} + \frac{\operatorname{sen}\,2x}{2} + x\right) + C.$

14. $\displaystyle\int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{x}{8}(3+2x^2)\sqrt{1-x^2} + \frac{3}{8}\operatorname{arc\,sen}\,x + C.$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \arctan e^x + C.$

16. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2} + \frac{9}{2}\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{3}\right) + C.$

17. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{9+x^2} - \frac{9}{2}\operatorname{arcsenh}\left(\frac{x}{3}\right) + C.$

18. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-9} + \frac{9}{2}\ln(x + \sqrt{x^2-9}) + C.$

19. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}}\,dx = -\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{3}{\sqrt{x^2-9}}\right) + C.$

20. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{9-x^2}}\,dx = -\frac{1}{3}\text{arctanh}\left(\frac{3}{\sqrt{9-x^2}}\right) + C.$

21. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-16}}\,dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2-16}\right) + C.$

22. $\displaystyle\int \frac{1}{4-x^2}\,dx = -\frac{1}{4}\ln(x-2) + \frac{1}{4}\ln(x+2) + C.$

23. $\displaystyle\int (x^2-2x+1)\,e^x\,dx = e^x x^2 - 4e^x x + 5e^x + C.$

24. $\displaystyle\int \left[(\ln x)^2 - 2\,\ln x + 1\right]\,dx = (\ln x)^2 - 2x\ln x + 3x + C.$

25. $\displaystyle\int x^2(\ln x)^3\,dx = \frac{1}{3}x^3(\ln x)^3 - \frac{1}{3}x^3(\ln x)^2 + \frac{2}{9}x^3\ln x - \frac{2}{27}x^3 + C.$

5.5. Integración de algunas funciones algebraicas

5.5.1. Integración de funciones irracionales simples

Cuando la variable $x, ax+b$ o $\dfrac{ax+b}{a'x+b'}$ aparece elevada a diferentes potencias fraccionarias, es conveniente usar la substitución $y = \sqrt[q]{x}$ donde q es el mínimo común denominador de los exponentes de las potencias de $x, ax+b$ o $\dfrac{ax+b}{ax'+b'}$ según sea el caso. Esta nueva variable permite eliminar los exponentes fraccionarios como veremos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 5.5.1 1. $I = \displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}}{2\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx.$

Haciendo $y = \sqrt[6]{x}$, se tiene $x = y^6$ y por tanto, $dx = 6y^5dy$.

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{6y^7dy}{2y^3(1+y^2)} = 3\int \frac{y^4dy}{1+y^2} = 3\int \frac{(y^4-1+1)dy}{1+y^2}\\
&= 3\int \frac{y^4-1}{y^2+1}dy + 3\int \frac{1}{1+y^2}dy\\
&= 3\int (y^2-1)dy + 3\int \frac{1}{1+y^2}dy\\
&= 3\left(\frac{y^3}{3}-y\right) + 3\arctan y + C\\
&= \sqrt{x} - 3\sqrt[6]{x} + 3\arctan\sqrt[6]{x} + C
\end{aligned}$$

2. $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}$

Haciendo $y = \sqrt[12]{x}$, tenemos que $x = y^{12}$ y $dx = 12y^{11}dy$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{12y^{11}dy}{y^4-y^3} &= 12\int \frac{y^8}{y-1}dy\\
&= 12\int \frac{(y^8-1)+1}{y-1}dy\\
&= 12\int \frac{y^8-1}{y-1}dy + 12\int \frac{1}{y-1}dy.
\end{aligned}$$

Usando la fórmula de factorización

$$y^p - 1 = (y-1)(y^{p-1}+y^{p-2}+\cdots+y+1)\ ,$$

obtenemos:

$$\begin{aligned}
I &= 12\int (y^7+y^6+y^5+y^4+y^3+y^2+y+1)dy + 12\int \frac{1}{y-1}dy\\
&= 12\left[\frac{y^8}{8}+\frac{y^7}{7}+\cdots+\frac{y^2}{2}+y+\ln(y-1)\right] + C\\
&= \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + \frac{12}{7}x^{\frac{7}{12}} + \cdots + 6x^{\frac{1}{6}} + 12x^{\frac{1}{12}} + 12\ln\left|x^{\frac{1}{12}}-1\right| + C
\end{aligned}$$

3. $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{3x-1}}$

   $\sqrt{3x-1} = y$ implica $x = \dfrac{y^2+1}{3}$, $dx = \dfrac{2ydy}{3}$. Así,

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{2dy}{y^2+1} = 2\arctan\, y + C \\
&= 2\arctan\, \sqrt{3x-1} + C
\end{aligned}
$$

4. $I = \displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-2}{3x+1}}dx$

   escribiendo $y = \sqrt{\dfrac{x-2}{3x+1}}$, implica $y^2 = \dfrac{x-2}{3x+1}$ y $2ydy = \dfrac{7}{(3x+1)^2}dx$ y por lo tanto, $x = \dfrac{y^2+2}{1-3y^2}$, y $3x+1 = \dfrac{7}{1-3y^2}$. Así,

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{(1-3y^2)}{y^2+2} \cdot \frac{y \cdot 2y}{7} \cdot \frac{7^2}{(1-3y)^2}dy \\
&= 7\int \frac{2y^2dy}{(y^2+2)(1-3y^2)}.
\end{aligned}
$$

   Esta integral se calcula usando el método de descomposición en fracciones parciales.

5.5.2. Integración de $f(x) = x^p(ax^n+b)^q$ $p, q, n \in \mathbb{Q}$.

La integral $I = \displaystyle\int f(x)dx$ puede transformarse en una integral de una función racional si uno de los números q, $\dfrac{p+1}{n}$, $\dfrac{p+1}{n}+q$ es entero. En efecto:

- Si q es un entero, entonces $f(x)$ se integra como hemos visto en el párrafo anterior.
- Si q es un racional no entero, emplearemos la substitución:

$$y = x^n, \qquad dy = nx^{n-1}dx$$

Si $y > 0$, entonces

$$
\begin{aligned}
I = \int x^p(ax^n+b)^q dx &= \frac{1}{n}\int y^{\frac{p+1}{n}-1}(ay+b)^q dy \\
&= \frac{1}{n}\int y^{\frac{p+1}{n}+q-1}\left(\frac{ay+b}{y}\right)^q dy
\end{aligned}
$$

- Si $\dfrac{p+1}{n} \in \mathbb{Z}$ y $q = \dfrac{\alpha}{\beta}$, con $(\alpha,\beta)=1$, la integral I se transforma en una integral de una función racional usando la substitución:

$$t^{\beta} = ay + b.$$

- Si $\dfrac{p+1}{n} + q \in \mathbb{Z}$, se usa la substitución $t^{\beta} = \dfrac{ay+b}{y}$

Ejemplo 5.5.2 1. $I = \displaystyle\int \sqrt{x}(\sqrt[3]{x}-4)^2 dx.$

En esta integral $q \in \mathbb{Z}$ entonces,

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{x}(\sqrt[3]{x^2} - 8\sqrt[3]{x} + 16)dx \\ &= \int (x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}} - 8x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} + 16x^{\frac{1}{2}})dx \\ &= \int (x^{\frac{7}{6}} - 8x^{\frac{5}{6}} + 16x^{\frac{1}{2}})dx \\ &= \frac{x^{\frac{7}{6}+1}}{\frac{7}{6}+1} - \frac{8x^{\frac{5}{6}+1}}{\frac{5}{6}+1} + \frac{16x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}} - \frac{48}{11}x^{\frac{11}{6}} + \frac{32}{3}x^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

2. $I = \displaystyle\int x^3(1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx.$

En este caso particular,

$p=3,\ n=2,\ q=\dfrac{3}{2}$ entonces, haciendo $y = x^2$, obtenemos:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int y^{2+\frac{3}{2}-1}\left(\frac{-y+1}{y}\right)^{\frac{3}{2}} dy \\ &= \frac{1}{2}\int y^{\frac{5}{2}}\left(\frac{1-y}{y}\right)^{\frac{3}{2}} dy. \end{aligned}$$

Como $\dfrac{p+1}{n} = 2 \in \mathbb{Z}$, usaremos la substitución

$$\begin{aligned} t^2 &= 1-y \\ 2tdt &= -dy. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int (1-t^2)^{\frac{5}{2}}\frac{(t^2)^{\frac{3}{2}}}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}(-2tdt) = -\int (1-t^2)t^4dt \\ &= \int (t^2-1)t^4dt = \int (t^6-t^4)dt = \frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}+C \end{aligned}$$

Como $t=\sqrt{1-x^2}$;

$$\begin{aligned} I &= \frac{(\sqrt{1-x^2})^7}{7}-\frac{(\sqrt{1-x^2})^5}{5}+C \\ &= \sqrt{1-x^2}\left[\frac{(1-x^2)^3}{7}-\frac{(1-x^2)^2}{5}\right]+C \\ &= \sqrt{1-x^2}\left[\frac{1-3x^2+3x^4-x^6}{7}-\frac{1-2x^2+x^4}{5}\right]+C \\ &= -\frac{1}{7}\sqrt{1-x^2}\left[x^6-\frac{8}{5}x^4+\frac{1}{5}x^2+\frac{2}{5}\right]+C \end{aligned}$$

3. $I=\displaystyle\int x^{\frac{1}{2}}(x^3-1)^{-\frac{3}{2}}dx$. Como

$p=\dfrac{1}{2},\ \ n=3\ \ q=-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{p+1}{n}=\dfrac{1}{2},\ \ \dfrac{p+1}{n}+q=-1\in\mathbb{Z},$

estamos en el tercer caso.

Si $y=x^3$, entonces, $dy=3x^2dy$, y por lo tanto,

$$I=\frac{1}{3}\int y^0\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-\frac{3}{2}}dy=\frac{1}{3}\int\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-\frac{3}{2}}dy.$$

Haciendo $t^2=\dfrac{y-1}{y}$, tenemos que $2tdt=\dfrac{dy}{y^2}$; $y=\dfrac{1}{1-t^2}$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3}\int t^{-3}2t\frac{1}{(1-t^2)^2}dt \\ &= \frac{2}{3}\int \frac{1}{t^2(1-t^2)^2}dt. \end{aligned}$$

Esta integral se calcula usando la descomposición en fracciones simples o parciales y resulta (ver ejercicio propuesto 19):

$$I = -\frac{1}{x} - \frac{x}{2(x^2-1)} - \frac{3\ \ln|x-1|}{4} + \frac{3\ \ln|x+1|}{4} + C.$$

5.5.3. Integración de funciones racionales de x y $\sqrt{ax^2+bx+c}$

Estas integrales se reducen a la integral de una función racional en la variable z, mediante una substitución adecuada:

- Si $a > 0$

  Haciendo $z = \sqrt{ax^2+bx+c} - x\sqrt{a}$ tenemos que

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + 2x\sqrt{a}z + z^2,$$

lo que implica

$$bx + c = 2x\sqrt{a}z + z^2$$

despejando x nos queda:

$$\begin{aligned} x &= \frac{z^2-c}{b-2\sqrt{a}z} \\ dx &= 2\frac{-\sqrt{a}z^2+bz-\sqrt{a}c}{(b-2\sqrt{a}z)^2}dz \end{aligned}$$

Además:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a} + z = \frac{-\sqrt{a}z^2+bz-\sqrt{a}c}{b-2\sqrt{a}z}$$

Ejemplo 5.5.3 $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+1}}$. En este ejemplo $a = 1 > 0$:

Sea $z = \sqrt{x^2-3x+1} - x$, de donde

$$\begin{aligned} x &= \frac{z^2-1}{-3-2z}; \\ dx &= 2\frac{-z^2-3z-1}{(-3-2z)^2}dz \\ &= \frac{-2(z^2+3z+1)}{(3+2z)^2}dz \end{aligned} \tag{5.26}$$

$$\sqrt{x^2-3x+1} = \frac{-z^2-3z-1}{-3-2z} = \frac{z^2+3z+1}{3+2z} \tag{5.27}$$

Así,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{-2(z^2+3z+1)}{(3+2z)^2}\cdot\frac{(3+2z)}{z^2+3z+1}dz \\ &= \int \frac{-2dz}{3+2z} = -\ln|3+2z|+C \\ &= -\ln|3+2\sqrt{x^2-3x+1}-2x|+C \end{aligned}$$

De (5.26) y (5.27) vemos que una integral que involucra polinomios en x y $\sqrt{ax^2+bx+c}$, se convierte en una función racional en z.

- Si $c \geq 0$:
  Haciendo $z = \dfrac{\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{c}}{x}$, tenemos

$$ax^2+bx+c = x^2z^2+2xz\sqrt{c}+c,$$

lo que implica:

$$ax+b = xz^2+2z\sqrt{c}$$

Así,

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2z\sqrt{c}-b}{a-z^2} \\ dx &= 2\frac{\sqrt{c}z^2-bz+a\sqrt{c}}{(a-z^2)^2}dz \end{aligned}\right\} \tag{5.28}$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xz + \sqrt{c} = \frac{\sqrt{c}z^2 - bz + a\sqrt{c}}{(a-z^2)} \tag{5.29}$$

De (5.28) y (5.29) vemos que una integral que involucra polinomios en x y $\sqrt{ax^2+bx+c}$, se convierte en una función racional en z.

Ejemplo 5.5.4 $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$. Tenemos que $c = 3 > 0$:

Haciendo $z = \dfrac{\sqrt{-x^2+2x+3}-\sqrt{3}}{x}$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{2\sqrt{3}z-2}{-1-z^2} = \frac{2(1-\sqrt{3})z}{z^2+1} \\
dx &= 2\frac{\sqrt{3}z^2-2z-\sqrt{3}}{(z^2+1)^2}dz \\
\sqrt{ax^2+bx+c} &= -\frac{(\sqrt{3}z^2-2z-\sqrt{3})}{(z^2+1)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
I &= \int 2\frac{\sqrt{3}z^2-2z-\sqrt{3}}{(z^2+1)^2} \cdot \frac{-(z^2+1)}{\sqrt{3}z^2-2z-\sqrt{3}}dz \\
I &= \int \frac{2dz}{z^2+1} = -2\arctan\ z + c \\
&= -2\arctan\left(\frac{\sqrt{-x^2+2x+3}-\sqrt{3}}{x}\right) + C
\end{aligned}$$

- Si $b^2-4ac > 0$.

  En este caso, el polinomio ax^2+bx+c tiene dos raíces reales y distintas r_1, r_2, por lo cual podemos escribir:

$$ax^2+bx+c = a(x-r_1)(x-r_2).$$

Introduciendo la variable z tal que satisfaga la igualdad:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-r_1)(x-r_2)} = z(x-r_1) \qquad (*)$$

tenemos que

$$a(x-r_1)(x-r_2) = z^2(x-r_1)^2,$$

es decir:

$$a(x-r_2) = z^2(x-r_1).$$

Despejando x obtenemos:

$$x = \frac{ar_2 - r_1 z^2}{a-z^2}, \qquad dx = \frac{2a(r_1-r_2)z}{(a-z^2)^2}dz$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{a(r_2-r_1)z}{a-z^2}.$$

Estas últimas igualdades nos permiten concluir que una integral de una función racional en x y $\sqrt{ax^2+bx+c}$, se transforma mediante la substitución (*) en una integral de una función racional en z.

Ejemplo 5.5.5 $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+2x-4}}$

$b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) - 36 > 0$

$2x^2 + 2x - 4 = 2(x^2 + x - 2) = 2(x+2)(x-1)$

Sea z tal que $\sqrt{2x^2+2x-4} = z(x+2)$, entonces

$$x = \frac{2+2z^2}{2-z^2}; \qquad dx = \frac{4 \cdot 3z}{(2-z^2)^2}dz$$

$$\sqrt{2x^2+2x-4} = \frac{6z}{2-z^2}.$$

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{2-z^2}{6z} \cdot \frac{-12z}{(2-z^2)} dz \\
&= -2\int \frac{dz}{2-z^2} = 2\int \frac{dz}{z^2-2} = 2\int \frac{dz}{(z-\sqrt{2})(z+\sqrt{2})} \\
&= 2\int \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{z-\sqrt{2}}\,dz - 2\int \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{z+\sqrt{2}}\,dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln|z-\sqrt{2}| - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln|z+\sqrt{2}| + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2x^2+2x-4}}{x+2} - \sqrt{2}\right| + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{2x^2+2x-4}{x+2} + \sqrt{2}\right| + C
\end{aligned}
$$

5.5.4. Ejercicios propuestos

Calcule las siguientes integrales:

1. $I = \displaystyle\int -\frac{\sqrt[4]{x}dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})} = -4\sqrt[4]{x} + 4\ln|1+\sqrt[4]{x}| + C.$

2. $I = \displaystyle\int x^{\frac{3}{2}}(2x^{\frac{1}{3}}-1)^3 dx = -\frac{2}{5}\sqrt{x^5} + \frac{36}{17}\sqrt[6]{x^{17}} - \frac{72}{19}\sqrt[6]{x^{19}} + \frac{16}{7}\sqrt{x^{17}} + C.$

3. $I = \displaystyle\int x^3(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} + C.$

4. $I = \displaystyle\int x^3(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{3}x^2\sqrt{1+x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{1+x^2} + C$

5. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x}-1}\,dx = \frac{1}{3}\left[2x\sqrt{x} + 3x + 6\sqrt{x} + 6\,\ln|\sqrt{x}-1|\right] + C.$

6. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x-1}\,dx = 2\sqrt{x} + \ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right| + C.$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}} = \frac{1}{2}\ln(2x+1+\sqrt{4x^2+4x-3}) + C.$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \ln\left(\frac{2x+1}{2} + \sqrt{x^2+x+1}\right) + C.$

9. $\displaystyle\int \sqrt{4x^2+4x-3}\,dx = \frac{1}{4}\left[(2x+1)\sqrt{4x^2+4x-3} - 4\,\ln\left((2x+1)+\sqrt{4x^2+4x-3}\right)\right] + C.$

10. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{2x+1}{2}\sqrt{x^2+x+1} + \frac{3}{4}\,\ln\left(\frac{2x+1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)\right] + C.$

11. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = \sqrt{x^2+2x+2} - \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}) + C.$

12. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx = -\sqrt{1+x-x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) + C.$

13. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1+x-x^2}}\,dx = -\ln\left(\frac{x+2+2\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right) + C.$

Capítulo 6

Integral de Riemann

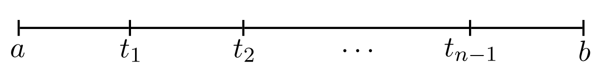
6.1. Introducción

Dada una función $g(t)$, que en particular podemos interpretar como la posición de una partícula en el instante t, al derivarla conocemos su velocidad instantánea $g'(t)$. Ahora queremos resolver un problema inverso, conocida una función f que en particular nos da la velocidad instantánea en el tiempo t, queremos conocer el camino recorrido por la partícula en un intervalo de tiempo $[a, b]$.
En síntesis, queremos responder la pregunta:

> Si $f(t)$ es la velocidad de una partícula, en el instante t, $t \in [a, b]$ ¿Cuál es el camino recorrido en el tiempo $b - a$?

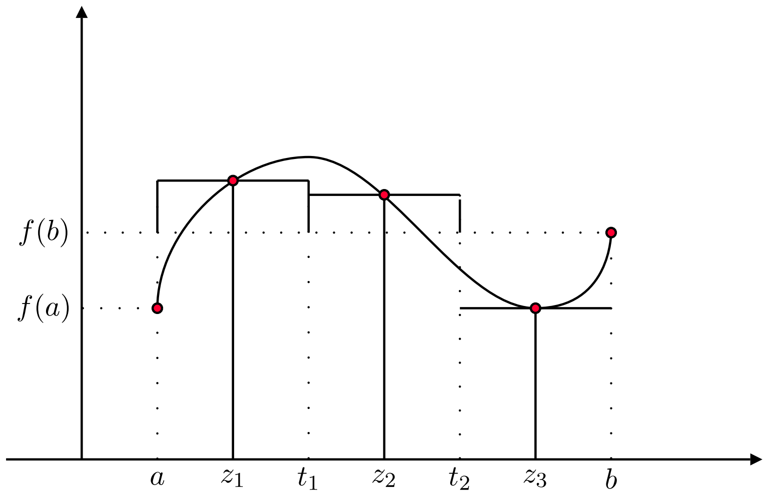
Para ello, se hace el siguiente procedimiento por aproximación:

- Si $f(t)$ es continua en $[a, b]$, entonces podemos suponer que en intervalos pequeños no tiene grandes variaciones. Así, si particionamos $[a, b]$ en n partes



  Supondremos que $f(t)$ es constante en cada subintervalo $[t_i, t_{i+1}]$, $f(t) = f(z_i)$ para algún $z_i \in [t_i, t_{i+1}]$.

- Además, si f es positiva en $[a, b]$



Usando que

$$v = \frac{d}{t} \Leftrightarrow d = vt$$

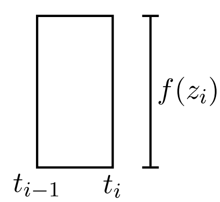
La distancia recorrida en el intervalo de tiempo $[t_{i-1}, t_i]$ es

$$d_i = f(z_i)(t_i - t_{i-1})$$

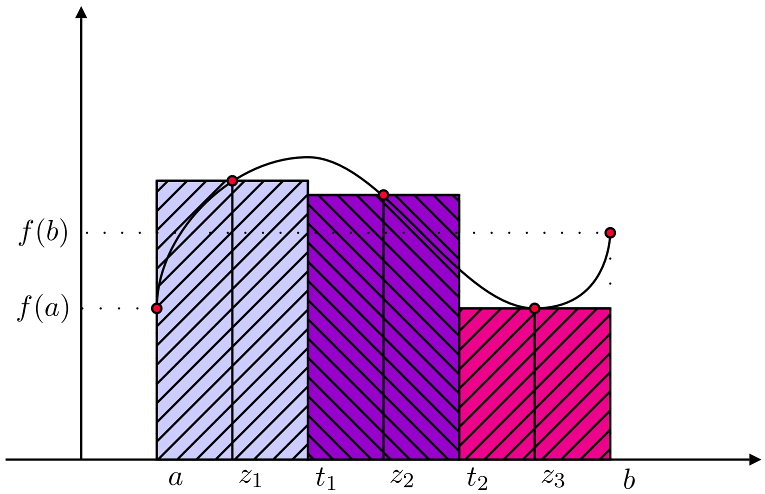
Una aproximación del camino recorrido es

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} f(z_i)(t_i - t_{i-1})$$

Cada d_i corresponde geométricamente al área de un rectángulo.

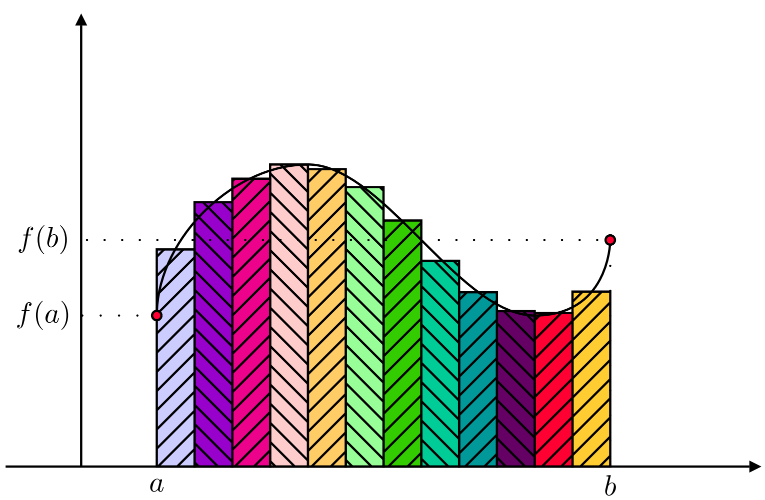


y suma de los $\sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} f(z_i)(t_i - t_{i-1})$ es la suma de las áreas de los n rectángulos



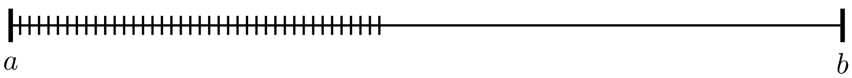
$\boxed{\text{¿Cómo mejorar esta aproximación?}}$

Afinando la partición del intervalo $[a, b]$ Se tiene una mejor aproximación del camino recorrido, pero es siempre una aproximación.



Cuando la base de los rectángulos R_i se hace cada vez más pequeña, es decir

$$\triangle t_i = t_i - t_{i-1} \longrightarrow 0 \text{ ; para todo } i$$



Pero en tal caso, la partición $\{t_0, t_1, \ldots t_n\}$ pierde su finitud, y tiende a ser el intervalo $[a, b]$, por lo tanto las sumas $\sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} f(z_i)(t_i - t_{i-1})$ tiende a tener "demasiados" sumandos: una cantidad infinita continua. Por tal razón, no se puede hacer aritméticamente y se necesita un paso al límite:

$$(\triangle t_i \longrightarrow 0; \forall i) \Longleftrightarrow n \longrightarrow \infty$$

El camino recorrido es $\lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n} f(z_i) \triangle t_i$, cuando este límite existe, sobre todas las posibles particiones de $[a, b]$.

A la expresión $\sum_{i=1}^{n} f(z_i) \triangle t_i$ se les llama sumas de Riemann.

En particular, si

1. $f(z_i) = \sup\{f(t) : t \in [t_{i-1}, t_i]\} = M_i$
   En tal caso las sumas se llaman *sumas superiores* de f en $[a, b]$ para la partición $\{t_0, t_1, \ldots t_n\}$

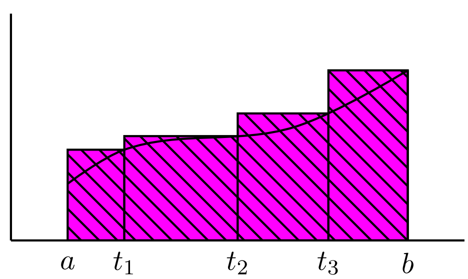


Figura: Sumas superiores

2. $f(z_i) = \text{ínf}\{f(t) : t \in [t_{i-1}, t_i]\} = m_i$
   En tal caso las sumas se llaman *sumas inferiores* de f en $[a, b]$ para la partición

$\{t_0, t_1, \dots t_n\}$

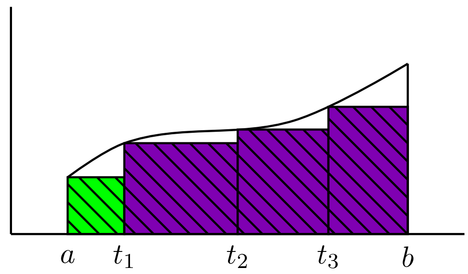


Figura: Sumas inferiores

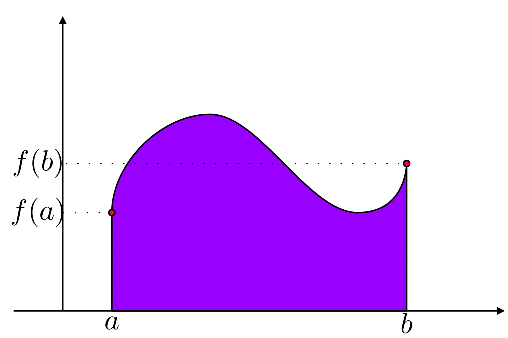
$$I(f, [a, b], P_n) \leq R(f, [a, b], P_n) \leq S(f, [a, b], P_n)$$

Si $supI(f, [a, b], P_n) = infS(f, [a, b], P_n) = \xi$, donde el supremo e ínfimo se toma sobre todas las particiones P_n de $[a, b]$, entonces se dice que

$$\int_a^b f(t)\, dt \text{ existe, y su valor es } \xi$$

$\boxed{\text{Debemos buscar un método para calcular } \int_a^b f(t) \text{ cuando se sabe que existe}}$

La interpretación geométrica de ξ, cuando f es contínua y positiva, corresponde al área bajo la curva de f.



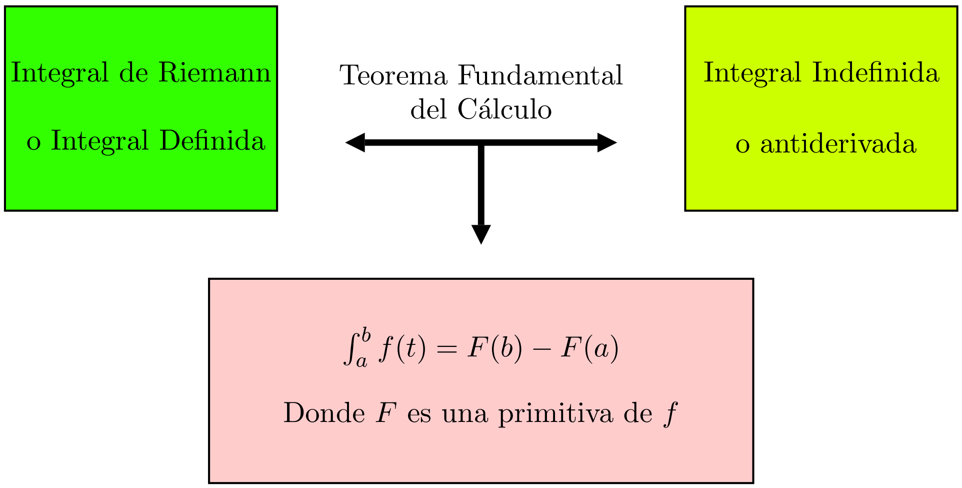
Como los límites de estas sumas, salvo casos simples, son muy complicados o tal vez imposibles de calcular, es que

Este método es el cálculo de primitivas

Pero una primitiva de f es una función F, y $\int_a^b f(t)$ es un número, por lo cual son conceptos diferentes.

Lo que soluciona el problema, después de cierto trabajo, es el teorema que relaciona ambos conceptos.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO



6.2. Sumas de Riemann y el concepto de integral

Definición 6.2.1 Partición del intervalo

Sea $[a,b]$ un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$, $a < b$. Una **partición de** $[a,b]$ es una familia finita $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ de puntos tales que

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$$

Para cada partición $\mathcal{P} = \{t_0, t_1 \ldots, t_n\}$ tenemos que los intervalos $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2], \ldots,$ $[t_{n-1}, t_n]$ satisfacen:

$$[a,b] = \bigcup_{i=1}^{n} [t_{i-1},\, t_i]$$

Denotaremos por Δt_i la longitud del subintervalo $[t_{i-1},\, t_i]$, es decir:

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1} = \text{longitud del subintervalo i.}$$

En particular, tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta t_i = (t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) + \ldots + \ldots = b - a = \text{longitud del intervalo } [a,b].$$

Se llama **norma de la partición** al número $||\mathcal{P}|| = \text{máx}\{\Delta t_i : i = 1, \ldots n\}$. n Sea

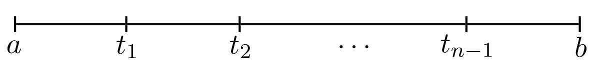


Figura 6.1: Partición del intervalo

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Sea $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición de $[a,b]$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$ se definen los números:

$$\begin{aligned} M_i &= \sup\{f(x)\,;\; x \in [t_{i-1},\, t_i]\} \\ m_i &= \text{ínf}\{f(x)\,;\; x \in [t_{i-1},\, t_i]\} \end{aligned}$$

Es inmediato que $m_i \leq f(x) \leq M_i$, para todo $x \in [t_{i-1},\, t_i]$; $i = 1, 2, \ldots, n$.

Definición 6.2.2

1. Se llama una **suma de Riemann** de f correspondiente a la partición $\mathcal{P}$ a cualquier número de la forma:

$$s(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}), \quad \xi_i \in [t_{i-1},\, t_i].$$

2. Se llama **suma inferior** de f correspondiente a la partición $\mathcal{P}$ al número

$$I(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}).$$

3. Se llama **suma superior** de f correspondiente a la partición $\mathcal{P}$ al número

$$S(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Observación 6.2.3 Como f es acotada en $[a,b]$ entonces es acotada en cada $[t_{i-1},\, t_i]$ y luego tiene supremo e ínfimo en dicho intervalo. Si además, f es continua, el **Teorema de Weierstrass** 2.5.17, asegura que f alcanza su valor máximo y mínimo en cada intervalo $[t_{i-1},\, t_i]$.En particular si f es continua y creciente $m_i = f(t_{i-1})$ y $M_i = f(t_i)$.

$$\begin{aligned} I(f,\mathcal{P}) =& f(a)(t_1 - a) + f(t_1)(t_2 - t_1) + f(t_2)(t_3 - t_2) + f(t_3)(b - t_3) \\ =& \text{suma de las áreas de las partes achuradas de la figura 3.2.,} \\ & \text{donde } f \text{ es continua, creciente y positiva.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(f,\mathcal{P}) =& f(t_1)(t_1 - a) + f(t_2)(t_2 - t_1) + f(t_3)(t_3 - t_2) + f(b)(b - t_3) \\ =& \text{suma de las áreas de las partes achuradas de la figura 3.3.} \end{aligned}$$

Observación 6.2.4 Es fácil verificar que $I(f,\mathcal{P}) \leq S(f,\mathcal{P})$ para toda partición $\mathcal{P}$ de $[a,b]$(Ejercicio).

Definición 6.2.5 Una partición $\mathcal{P}$ de $[a,b]$ se dice **más fina** o un **refinamiento** de la partición $\mathcal{P}'$ de $[a,b]$) si se cumple que todo punto de $\mathcal{P}'$ es punto de $\mathcal{P}$. En tal caso escribimos $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$.

Ejemplo 6.2.6 $\mathcal{P} = \{1, 1{,}2, 1{,}4, 1{,}6, 1{,}8, 2\}$ es una partición de $[1,2]$ más fina que $\{1, 1{,}4, 2\}$.

Teorema 6.2.7 Sean $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ particiones de $[a,b]$ tales que $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$ y $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ acotada tenemos: $I(f,\mathcal{P}') \leq I(f,\mathcal{P}) \leq S(f,\mathcal{P}) \leq S(f,\mathcal{P}')$.

Demostración: Suponemos que $\mathcal{P}' = \{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n\}$ y que $\mathcal{P} = \{t_0, \widetilde{t_0}, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n\}$, es decir que $\mathcal{P}$ tiene un punto más que $\mathcal{P}'$. En este caso

$$\begin{aligned} I(f,\mathcal{P}') =& m_0(t_1 - t_0) + m_1(t_2 - t_1) + \ldots + m_{n-1}(t_n - t_{n-1}) \\ I(f,\mathcal{P}) =& \widetilde{m_0}(\widetilde{t_0} - t_0) + \widetilde{m_1}(t_1 - \widetilde{t_0}) + m_1(t_2 - t_1) + \ldots + m_{n-1}(t_n - t_{n-1}) \\ I(f,\mathcal{P}) - I(f,\mathcal{P}') =& \widetilde{m_0}(\widetilde{t_0} - t_0) + \widetilde{m_1}(t_1 - \widetilde{t_0}) - m_0(t_1 - t_0) = \\ =& (\widetilde{m_0} - m_0)(\widetilde{t_0} - t_0) + (\widetilde{m_1} - m_0)(t_1 - \widetilde{t_0}) \end{aligned}$$

Ya que $m_0 \leq \widetilde{m_0}$ y $m_0 \leq \widetilde{m_1}$ tenemos $I(f,\mathcal{P}') \leq I(f,\mathcal{P})$.

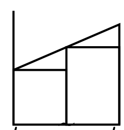


Figura 3.5.

Análogamente se prueban los otros resultados. □

Teorema 6.2.8 Si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ son dos particiones cualesquiera de $[a,b]$ entonces se cumple que $I(f,\mathcal{P}) \leq S(f,\mathcal{P}')$.

Demostración: Sea $\mathcal{P}'' = \mathcal{P} \cup \mathcal{P}'$, de acuerdo al lema anterior tenemos

$$I(f,\mathcal{P}) \leq I(f,\mathcal{P}'') \leq S(f,\mathcal{P}'') \leq S(f,\mathcal{P})$$
$$I(f,\mathcal{P}') \leq I(f,\mathcal{P}'') \leq S(f,\mathcal{P}'') \leq S(f,\mathcal{P}')$$

Por lo tanto, $I(f,\mathcal{P}) \leq S(f,\mathcal{P}'') \leq S(f,\mathcal{P}')$ como queríamos probar. □

Sea ahora $r_f = \{I(f,\mathcal{P})\,;\ \mathcal{P}$ es partición de $[a,b]\}$ el conjunto de todas las sumas inferiores asociadas a todas las posibles particiones de $[a\,,b]$. La proposición anterior garantiza que r_f es acotado superiormente y , por lo tanto, tiene supremo. Esto da sentido a la siguiente definición.

Definición 6.2.9

1. La **integral inferior** de f en $[a,b]$ es el número

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{I(f,\mathcal{P})\,;\ \mathcal{P} \text{ es partición de } [a,b]\}$$

2. La **integral superior** de f en $[a,b]$ es el número

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \text{ínf}\{S(f,\mathcal{P})\,;\ \mathcal{P} \text{ es partición de } [a,b]\}$$

3. Diremos que f es **integrable** en $[a,b]$ si se cumple que

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

En este caso el valor común se denota por $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ y se llama **integral de Riemann de f sobre el intervalo** $[a,b]$.

Observación 6.2.10 Es inmediato que $\displaystyle\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx.$

Ejemplo 6.2.11 1. Sea f la función constante sobre $[a,b]$. Es decir, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=c$, para todo $x\in[a\,,b]$.

Sea $\mathcal{P}=\{t_0,t_1,\ldots,t_n\}$ una partición cualquiera de $[a,b]$. entonces tenemos que:

$$I(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}),$$
$$S(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Como $m_i = \text{ínf}\{f(x)\,;\ x\in[t_{i-1},\,t_i]\} = c$ y $M_i = \sup\{f(x)\,;\ x\in[t_{i-1},\,t_i]\} = c$.

Tenemos

$$I(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} c(t_i - t_{i-1}) = c(t_1 - t_0 + t_2 - t_1 + \ldots + t_n - t_{n-1}) = c(t_n - t_0) = c(b-a).$$

Análogamente tenemos que:

$$S(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} c(t_i - t_{i-1}) = c(b-a).$$

De esta forma podemos concluir que:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = c(b-a) = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Por lo tanto, en virtud de la definición 3 tenemos que f es una función integrable y

$$\int_a^b f(x)dx = c(b-a).$$

2. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Sea $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición cualquiera de $[a\,,b]$. Entonces, debido a la densidad de los números racionales e irracionales en $\mathbb{R}$ tenemos que:

$$m_i = \text{ínf}\{f(x)\,;\; x \in [t_{i-1},\, t_i]\,\} = 0$$
$$M_i = \sup\{f(x)\,;\; x \in [t_{i-1},\, t_i]\,\} = 1.$$

Luego,

$$I(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot (t_i - t_{i-1}) = 0.$$
$$S(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = t_n - t_0 = b - a.$$

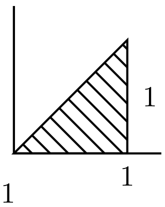
Por lo tanto,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup r_f = 0,$$
$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \text{ínf}\, R_f = b - a.$$

Así, f no es integrable puesto que

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = 0 \neq \overline{\int_a^b} f(x)dx = b - a.$$

3. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$.



Demostraremos que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$.

En efecto, sea $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición de $[0,1]$ que divide el intervalo en n subintervalos de longitud igual a $\dfrac{1}{n}$. Por lo cual la partición es el conjunto $\left\{0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \ldots, \ldots, \dfrac{i}{n} \ldots, 1\right\}$. Es decir, $t_i = \dfrac{i}{n}$, con $1 \leq i \leq n$, y las sumas inferiores son:

$$I(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}), \text{ donde}\, m_i = \text{ínf}\left\{f(x)\,;\ x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]\right\}.$$

$$\begin{aligned} I(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n}\Big(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\Big) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n}(i-1) \\ &= \frac{1}{n^2}\Big(\frac{n\cdot(n-1)}{2}\Big) = \frac{n-1}{2n}. \end{aligned}$$

Las sumas superiores tienen la forma:

$$\begin{aligned} S(f,\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n}. \end{aligned}$$

Como

$$I(f,\mathcal{P}) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq S(f,\mathcal{P}),$$

entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$\frac{n-1}{2n} \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \frac{n+1}{2n}.$$

Tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n} \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}.$$

Es decir,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \frac{1}{2}$$

como habíamos enunciado.

Criterio de Integrabilidad

Teorema 6.2.12 Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. f es integrable en $[a,b]$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición $\mathcal{P}_\varepsilon$ de $[a,b]$ tal que $S(f,\mathcal{P}_\varepsilon) - I(f,\mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon$.

Demostración:

($\Longleftarrow$) Supongamos que la condición es cierta. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe una partición $\mathcal{P}_\varepsilon$ de $[a,b]$ tal que $S(f,\mathcal{P}_\varepsilon) - I(f,\mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon$.

Por lo cual,

$$\inf\{S(f,\mathcal{P})\,;\ \mathcal{P} \text{ es partición de } [a,b]\} < I(f,\mathcal{P}_\varepsilon) + \varepsilon.$$

Usando la definición de integral superior podemos escribir:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx < I(f,\mathcal{P}_\varepsilon) + \varepsilon < \sup\{I(f,\mathcal{P})\,;\ \mathcal{P} \text{ es partición de } [a,b]\} + \varepsilon.$$

En virtud de la definición de la integral inferior, tenemos:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx < \underline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon.$$

Lo que implica que,

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx < \varepsilon.$$

Como esta desigualdad se cumple para todo número positivo ε, podemos concluir que

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx,$$

lo que nos dice que f es integrable.

($\Longrightarrow$) Reciprocamente, si f es integrable, entonces

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = I.$$

Sea $\varepsilon > 0$ dado. Usando la definición de integral superior, definición 2 o -lo que es equivalente- la caractización de ínfimo, tenemos que existe $\mathcal{P}'_\varepsilon$ tal que:

$$S(f, \mathcal{P}'_\varepsilon) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

En virtud del lema 6.2.7, podemos escribir:

$$S(f, \mathcal{P}) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}\,, \text{para toda partición } \mathcal{P} \text{ más fina que } \ \mathcal{P}'_\varepsilon.$$

Análogamente, usando la definición de integral inferior, definición 1, o lo que es equivalente la definición de supremo, tenemos que existe
$\mathcal{P}''_\varepsilon$ tal que:

$$I(f, \mathcal{P}''_\varepsilon) > \underline{\int_a^b} f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nuevamente, usando el lema 6.2.7, podemos escribir:

$$I(f, \mathcal{P}) > \underline{\int_a^b} f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2}\,, \text{para toda partición } \mathcal{P} \text{ más fima que } \ \mathcal{P}''_\varepsilon.$$

Si definimos $\mathcal{P}_\varepsilon = \mathcal{P}'{}_\varepsilon \cup \mathcal{P}''_\varepsilon$, tenemos que:

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{P}_\varepsilon) &< I + \frac{\varepsilon}{2} \\ -I(f, \mathcal{P}_\varepsilon) &< -I + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

sumando las dos desigualdades obtenemos,

$$S(f, \mathcal{P}_\varepsilon) - I(f, \mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon.$$

$\square$

Ejemplo 6.2.13 La función $f(x) = [x]$, la parte entera de x, satisface el criterio de integrabilidad en $[0, 1]$ y por lo tanto es integrable en dicho intervalo.
En efecto

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si}\, 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si}\, x = 1. \end{cases}$$

Esta función tiene una discontinuidad en $[0,1]$. Sea $\mathcal{P}$ una partición cualquiera de $[0,1]$. $\mathcal{P} = \{x_0\,,\ x_1\,, \ldots\, x_n\}\ ; x_0 = 0\,,\ x_n = 1$. Como la función es constante en $[0,1[$ e igual a cero, tenemos que:

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(x)\,;\ x \in [x_{i-1},\, x_i]\} = 0, \quad i = 1, \ldots n. \\ M_i &= \sup\{f(x)\,;\ x \in [x_{i-1},\, x_i]\} = 0, \quad i = 1, \ldots n-1. \\ M_n &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I(f,\mathcal{P}) &= 0 \\ S(f,\mathcal{P}) &= 1 \cdot (x_n - x_{n-1}) = \Delta x_n. \end{aligned}$$

Así tenemos,

$$0 \leq S(f,\mathcal{P}) - I(f,\mathcal{P}) = \Delta x_n.$$

Entonces, dado ε positivo, en virtud del Principio de Arquímedes existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{N} < \varepsilon$. Por otro parte, podemos construir una partición $\mathcal{P}_\varepsilon$ de modo que $||\mathcal{P}_\varepsilon|| < \dfrac{1}{N}$. Así, dado ε positivo hemos encontrado una partición de $[0,1]$, tal que

$$0 \leq S(f,\mathcal{P}) - I(f,\mathcal{P}) = \Delta x_n < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

¿Cuánto vale $\displaystyle\int_0^1 [x]dx$?

Como ya sabemos que la integral existe, podemos obtener su valor por el camino más fácil. En este caso usando la integral inferior cuyo valor es cero.

$$\int_0^1 [x]\,dx = 0.$$

Ejemplo 6.2.14 La función $f(x) = [x]$, la parte entera de x, satisface el criterio de integrabilidad en $[1,2]$ y por lo tanto es integrable en dicho intervalo.

En efecto

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si}\, 1 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si}\, x = 2. \end{cases}$$

Esta función tiene una discontinuidad en $[1,2]$. Sea $\mathcal{P}$ una partición cualquiera de $[1,2]$. $\mathcal{P} = \{x_0\,,\ x_1\,, \ldots\, x_n\}\ ; x_0 = 1\,,\ x_n = 2$. Como la función es constante en $[1,2[$ e igual a uno, tenemos que:

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(x)\,;\ x \in [x_{i-1}\,,\, x_i]\} = 1, \quad i = 1, \ldots n. \\ M_i &= \sup\{f(x)\,;\ x \in [x_{i-1}\,,\, x_i]\} = 1, \quad i = 1, \ldots n-1. \\ M_n &= 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
I(f,\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1 \\
S(f,\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n-1} M_i \cdot \Delta x_i + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \Delta x_i + M_n \Delta x_n \\
&= (x_{n-1} - 1) + M_n \Delta x_n = x_{n-1} - 1 + 2(x_n - x_{n-1}) = (x_n - x_{n-1}) - 1 + 2 \\
&= \Delta x_n + 1.
\end{aligned}
$$

Así tenemos,

$$0 \leq S(f,\mathcal{P}) - I(f,\mathcal{P}) = \Delta x_n + 1 - 1 = \Delta x_n.$$

Entonces, dado ε positivo, en virtud del Principio de Arquímedes existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{N} < \varepsilon$. Por otro parte, podemos construir una partición $\mathcal{P}_\varepsilon$ de modo que $||\mathcal{P}_\varepsilon|| < \dfrac{1}{N}$. Así, dado ε positivo hemos encontrado una partición de $[0,1]$, tal que

$$0 \leq S(f,\mathcal{P}) - I(f,\mathcal{P}) = \Delta x_n < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

¿Cuánto vale $\displaystyle\int_1^2 [x]dx$?
como en el ejemplo anterior, dado que ya sabemos que la integral existe, podemos obtener su valor por el camino más fácil. En este caso usando la integral inferior cuyo valor es uno.

$$\int_1^2 [x]\, dx = 1.$$

6.2.1. Cálculo de integrales mediante sumas de Riemann particulares

Teorema 6.2.15 Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable y $\mathcal{P}_n = \left\{ t_i, t_i = a + \dfrac{b-a}{n} i, i = 0, \cdots, n \right\}$ entonces,

$$\lim_{n\to+\infty} s(f,\mathcal{P}_n) = \int_a^b f(x)dx.$$

Ejemplo 6.2.16 Consideramos $f(x) = x^3, \qquad x \in [0,1]$.

En este caso, como f es creciente, $m_i = f\left(\frac{i-1}{n}\right) = \left(\dfrac{i-1}{n}\right)^3$.

$$\begin{aligned} I(f,\mathcal{P}) &= \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} m_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(i-1)}{n}\right)^3 = \frac{1}{n^4}\cdot\sum_{i=1}^{n-1} i^3 \\ &= \frac{1}{n^4}\left(\frac{(n-1)\cdot n}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)^2. \end{aligned}$$

Así tenemos que:

$$\lim_{n\to+\infty} I(f,\mathcal{P}) = 1/4.$$

Ejemplo 6.2.17 La función $f(x) = x$ definida en $[a, b]$ es integrable y su integral

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

En efecto, demostraremos que $f(x) = x$ satisface el criterio de integrabilidad en cualquier intervalo $[a, b]$.
Dado un número positivo ε positivo, debemos encontrar una partición del intervalo $[a, b]$ tal que

$$S(f,\mathcal{P}_\varepsilon) - I(f,\mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Sea $\mathcal{P}_n$ una partición cualquiera de $[a, b]$.
$\mathcal{P} = \{x_0\,,\ x_1\,,\ \ldots\ x_n\,\}\ ; x_0 = a\,,\ x_n = b$. Como la función identica es creciente en $[a, b[$, tenemos que:

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(x)\,;\ x\in[x_{i-1}\,,\,x_i]\} = x_{i-1}, \quad i = 1,\ldots n. \\ M_i &= \sup\{f(x)\,;\ x\in[x_{i-1}\,,\,x_i]\} = x_i, \quad i = 1,\ldots n. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I(f,\mathcal{P}_n) &= \sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}\cdot\Delta x_i \\ S(f,\mathcal{P}_n) &= \sum_{i=1}^{n} M_i\cdot\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\cdot\Delta x_i. \end{aligned}$$

Con estos cálculos podemos escribir:

$$\begin{aligned} 0 \le S(f,\mathcal{P}_n) - I(f,\mathcal{P}_n) &= x_1(x_1-a) + x_2(x_2-x_1) + \ldots\ldots + b(b-x_{n-1}) \\ &\quad -[a(x_1-a) + x_1(x_2-x_1) + \ldots\ldots + x_{n-1}(b-x_{n-1})] \\ &= (x_1-a)(x_1-a) + (x_2-x_1)(x_2-x_1) + \ldots \\ &\quad \ldots + (b-x_{n-1})(b-x_{n-1}) \end{aligned}$$

Acotando uno de los factores en cada sumando por $||\mathcal{P}_n)||$, obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 \le S(f,\mathcal{P}_n) - I(f,\mathcal{P}_n) &\le (x_1-a)||\mathcal{P}_n)|| + (x_2-x_1)||\mathcal{P}_n)|| + \ldots\ldots + (b-x_{n-1})||\mathcal{P}_n)|| \\ &= [(x_1-a)+(x_2-x_1)+\ldots\ldots+(b-x_{n-1})]||\mathcal{P}_n)|| \\ &= (b-a)||\mathcal{P}_n)||. \end{aligned}$$

Con el mismo razonamiento usado en los ejemplos anteriores, tenemos que: dado ε positivo, en virtud del Principio de Arquímedes existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{N(b-a)} < \varepsilon$. Por otro parte, podemos construir una partición $\mathcal{P}_\varepsilon$ de modo que $||\mathcal{P}_\varepsilon|| < \dfrac{1}{N(b-a)}$.
Así, dado ε positivo hemos encontrado una partición de $[0,1]$, tal que

$$0 \le S(f,\mathcal{P}) - I(f,\mathcal{P}) = (b-a)||\mathcal{P}_\varepsilon)| < (b-a)\frac{1}{N(b-a)} < \varepsilon.$$

El criterio de integrabilidad nos dice que el número $\displaystyle\int_a^b x\,dx$ existe, pero no dice cuánto vale. Como sabemos que existe calcularemos la integral usando sumas de Riemann en que la función se evalua en el punto medio de cada subintervalo.
Sea $\mathcal{P}_n$ una partición cualquiera de $[a,b]$.
$\mathcal{P} = \{x_0\,,\ x_1\,,\ \ldots\ x_n\}\ ; x_0 = a\,,\ x_n = b,\ \ \xi_i = \dfrac{x_i + x_{i-1}}{2}$.
entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i &= \frac{a+x_1}{2}(x_1-a) + \frac{x_1+x_2}{2}(x_2-x_1)\ldots\ldots + \frac{b+x_{n-1}}{2}(b-x_{n-1}) \\ &= \frac{(a-x_1)(a+x_1)}{2} + \frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{2} + \ldots\ldots \frac{(b+x_{n-1})(b-x_{n-1})}{2} \\ &= \frac{1}{2}(x_1^2 - a^2 + x_2^2 - x_1^2 + \ldots\ldots + b^2 - x_{n-1}^2) \\ &= \frac{b^2-a^2}{2}. \end{aligned}$$

Observemos que el último cálculo vale para cualquier partición. Como la función es continua y si $n \to +\infty$, entonces M_i y m_i tienden a confundirse con el punto medio de cada subintervalo, por lo cual podemos concluir que:

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

El siguiente teorema es una de las consecuencias más importantes del criterio de integrabilidad.

Teorema 6.2.18 Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua o continua a tramos entonces, f es integrable en el intervalo $[a,b]$.

Ejercicios resueltos

1. Recuerde que si la velocidad de una partícula es constante en un intervalo de tiempo, entonces se usa la fórmula $v = \dfrac{d}{t}$, donde d es la distancia recorrida y t el tiempo transcurrido.
   Esta fórmula no es válida cuando la velocidad varía en cada instante, pero si puede usarse para cálculos aproximados.
   Suponga que una partícula se mueve con velocidad $v(t) = t^2 + 1; t \in [0,1]$; t medido en horas.

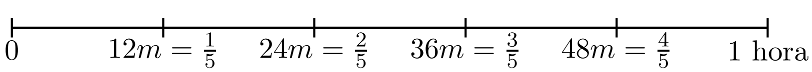
   a) Dé un valor aproximado del camino recorrido durante una hora, suponiendo que cada 12 minutos la velocidad se mantiene constante e igual a $v(\xi_i)$ donde ξ_i es la mitad del tiempo transcurrido en cada intervalo de 12 minutos.

   b) Observando el gráfico de la situación dada en a) ¿Cómo podría obtener un valor más exacto del camino recorrido?.

   c) ¿Cómo podría obtener una fórmula para obtener el valor exacto?.

   Solución:

   a)
   $$v(t) = t^2 + 1,\ t \in [0,1].$$

   Los puntos medios de cada subintervalo de 12 minutos son:
   $\xi_1 = \dfrac{1}{10},\ \xi_2 = \dfrac{3}{10},\ \xi_3 = \dfrac{5}{10},\ \xi_4 = \dfrac{7}{10},\ \xi_5 = \dfrac{9}{10}$.
   Como $v = \dfrac{d}{t}$, entonces $d = v \cdot t$.

   - Si $0 \le t \le 1/5, \quad v = v_1 = v(\xi_1) = \left(\dfrac{1}{10}\right)^2 + 1$

- Si $1/5 < t \leq 2/5$, $\quad v = v_2 = v(\xi_2) = \left(\dfrac{3}{10}\right)^2 + 1$
- Si $2/5 < t \leq 3/5$, $\quad v = v_3 = v(\xi_3) = \left(\dfrac{5}{10}\right)^2 + 1$
- Si $3/5 < t \leq 4/5$, $\quad v = v_4 = v(\xi_4) = \left(\dfrac{7}{10}\right)^2 + 1$
- Si $4/5 < t \leq 5/5$, $\quad v = v_5 = v(\xi_5) = \left(\dfrac{9}{10}\right)^2 + 1$

Por lo tanto, en cada subintervalo i supondremos que la velocidad permanece constante e igual a v_i. Por lo tanto la distancia total d recorrida es:

$$
\begin{aligned}
d &= d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 = \frac{1}{5}(v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5) = \\
&= \frac{1}{5}\left[(\left(\frac{1}{10}\right)^2 + 1 + \left(\frac{3}{10}\right)^2 + 1 + \left(\frac{5}{10}\right)^2 + 1 + \left(\frac{7}{10}\right)^2 + 1 + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + 1\right] \\
&= \frac{1}{5}\left[\frac{1^2}{10^2} + \frac{3^2}{10^2} + \frac{5^2}{10^2} + \frac{7^2}{10^2} + \frac{9^2}{10^2} + 5\right] = \frac{1}{5}\left[\frac{1 + 9 + 25 + 49 + 81}{100} + 5\right] \\
&= \frac{33}{100} + 1 = 1,33.
\end{aligned}
$$

b) Un valor más exacto se obtiene haciendo una subdivisión más fina del intervalo $[0, 1]$.

c) Una forma de obtener el valor exacto es haciendo divisiones tan finas de modo que la longitud de los subintervalos tiendan a cero. en ese caso la cantidad de sumando se hace infinitamente grande, su suma se realiza con el concepto de integral de Riemann.

2. Si una fuerza constante F actúa sobre un cuerpo que se mueve en línea recta, entonces el trabajo T, realizado por la fuerza al desplazar el cuerpo una distancia x es $T = Fx$.

   Si la fuerza es variable, ésta fórmula ya no es válida, pero tal como en el ejercicio anterior, puede ser usada para encontrar valores aproximados del trabajo. Por ejemplo, para estirar un resorte en la dirección del eje X en x unidades de longitud, se necesita una fuerza

$$F(x) = 50x \; ; \quad x \text{ medido en metros.}$$

Dé un valor aproximado del trabajo total efectuado por la fuerza, para estirar el resorte 10 cm, usando una partición del intervalo en que varía x con n subdivisiones de igual longitud y suponiendo F constante en cada subintervalo. El valor de F en cada subintervalo puede ser elegido como usted quiera.

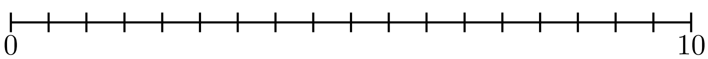
Solución:

$T = F \cdot x = T(x)$

Si $F = F(x)$; $\quad T(x) = F(x) \cdot x$

Aplicando esta fórmula a nivel microscópico, se obtiene:

$x_i = x_0 + 10\dfrac{i}{n}, \quad x_0 = 0, \quad i = 0, 1, \cdots, n$



Entre x_i y x_{i+1} la distancia es $\dfrac{1}{n}$.

En $x = x_{i+1}$, $\quad T(x_{i+1}) = F(x_{i+1}) \cdot \dfrac{1}{n}$.
El trabajo total es,

$$\begin{aligned}
T(x_1) + T(x_2) + \cdots + T(x_n) &= (F(x_1) + F(x_2) + \cdots + F(x_n))\frac{1}{n} \\
&= 50(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\frac{1}{n} \\
&= 510 \cdot \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} \\
&= \frac{50}{n^2}(1 + 2 + \cdots + n) \\
&= \frac{50}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\
&= 25 \cdot \frac{n+1}{n}
\end{aligned}$$

Asì, el valor $25 \cdot \dfrac{n+1}{n}$ da un valor aproximado del trabajo total cuando el intervalo se divide en n subintervalos. Si la división de subintervalos es infinitamente grande, el valor del trabajo es:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(T(x_1) + T(x_2) + \cdots + T(x_n)\right) = 25.$$

3. **Fórmula para calcular la longitud de una curva**
Considere $y = f(x)$, f función con derivada continua en $[a, b]$.
Particione el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[a, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, b]$.
Sea $P_i = (x_i, f(x_i))\,, i = 1, \cdots, n-1,\ \ P_0 = (a, f(a))$ y $P_n = (b, f(b))$.

   a) Calcule la longitud de la poligonal determinada por los trazos $\overline{P_0P_1}$, $\overline{P_1, P_2}, \cdots, \overline{P_{n-1}P_n}$.

   b) Use el Teorema del Valor Medio para derivadas para reemplazar en la fórmula encontrada en (a) los términos $(y_i - y_{i-1})$.

   c) Demuestre que la longitud L de la curva es aproximadamente

   $$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\ \ (\Delta x_i)\,;\ c_i \in [x_{i-1}\,,\, x_i].$$

   d) ¿A cuál suma de Riemann corresponde la expresión obtenida en (c).

   e) Use el concepto de integral para escribir la expresión exacta de L.

   f) Calcule un valor aproximado de la longitud de la curva

   $$y = x^{3/2}$$

   cuando $x \in [1, 2]$ usando una partición de 10 subintervalos de igual longitud.

Solución:

a) $P_i = (x_i, y_i) = (x_i, f(x_i))$
$\overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$. entonces, la longitud L de la poligonal es:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}.$$

b) Como f es una función con derivada continua, podemos aplicar el Teorema del Valor Medio para derivadas, 4.3.5, en cada subintervalo $[x_{i-1}\,,\, x_i]$. Así, tenemos la existencia de un punto $c_i \in]x_{i-1}\,,\, x_i[$ tal que $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1})$. Por esta razón podemos escribir lo siguiente:

$$\begin{aligned} \overline{P_{i-1}P_i} &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} = \\ &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f'(c_i))^2 (x_i - x_{i-1})^2} \\ &= \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}|x_i - x_{i-1}|, \qquad x_{i-1} \le c_i \le x_i. \end{aligned}$$

c) Por lo tanto, la longitud de la poligonal L puede escribirse como:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}(x_i - x_{i-1}).$$

d) Si consideramos a la poligonal L como una aproximación de la longitud de la curva $y = f(x)$, entonces:

$$\text{Longitud de la curva} \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\ (\Delta x_i);$$

donde $c_i \in [x_{i-1}\,,\, x_i]$. La expresión obtenida en (c) corresponde a a una suma de Riemann de la función $g(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$.

e) El valor exacto de la longitud de la curva se obtiene haciendo la partición del dominio de la función cada vez más fino, por lo cual usando la definición de integral podemos escribir:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

f) $f(x) = x^{3/2}, \quad f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}, \quad x_i = 1 + \frac{i}{10}; \quad 0 \leq i \leq 10.$

Así, tenemos:

$$x_0 = 1,\ x_1 = 1 + 1/10,\ x_2 = 1 + 2/10,\ \cdots, x_{10} = 2.$$

$(f'(x_i))^2 = \frac{3}{2}(x_i)^{1/2}, i = 1, 2, \cdots, 10.$

Para encontrar un valor aproximado de la longitud de la curva tomaremos como valor de g en cada subintervalo g evaluada en el extremo derecho del subintervalo.

$$\begin{aligned}
l_c &\approx \frac{3}{2}(x_1)^{1/2} \cdot \frac{1}{10} + \frac{3}{2}(x_2)^{1/2} \cdot \frac{1}{10} + \cdots + \frac{3}{2}(x_9)^{1/2}\frac{1}{10} + \frac{3}{2}(x_{10}^{1/2}) \cdot \frac{1}{10} \\
&\approx \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{10} \Big[(x_1)^{1/2} + (x_2)^{1/2} + (x_3)^{1/2} + (x_4)^{1/2} + (x_5)^{1/2} + (x_6)^{1/2} + (x_7)^{1/2} + \\
&\quad (x_8)^{1/2} + (x_9)^{1/2} + (x_{10})^{1/2}\Big) \\
&\approx \frac{3}{20} \Big[\sqrt{1,1} + \sqrt{1,2} + \sqrt{1,3} + \sqrt{1,4} + \sqrt{1,5} + \sqrt{1,6} + \sqrt{1,7} + \\
&\quad \sqrt{1,8} + \sqrt{1,9} + \sqrt{2}\Big] \\
&\approx \frac{3}{20} [1,048 + 1,095 + 1,140 + 1,183 + 1,224 + 1,264 + 1,303 + 1,341 + \\
&\quad 1,378 + 1,414] \\
&\approx 1,8585.
\end{aligned}$$

4. Dada la parábola $y = x^2$ sobre $[0, 2]$

   a) Dé un valor aproximado del área A de la región del plano comprendida entre el eje X, la curva $y(x)$ y las rectas $x = 0$ y $x = 2$, usando la suma de Riemann correspondiente a una partición de 5 subintervalos de igual longitud y usando como ξ_i el punto medio de cada subintervalo.

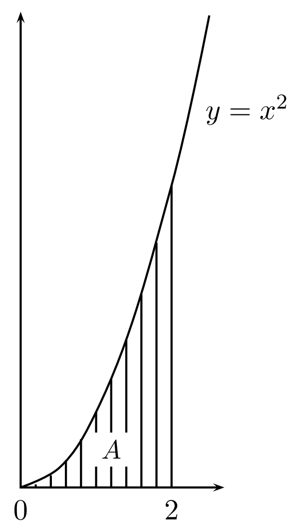
   b) Aproxime el área A mediante la suma de los trapecios que resultan usando la misma partición del item anterior.

   c) La suma resultante en el item anterior , ¿ es una suma de Riemann ? Justifique.

   d) Calcule la suma superior correspondiente a una partición de n subintervalos iguales.

   e) Calcule la integral superior de la función y sobre $[0, 2]$ y diga por qué este valor corresponde al valor de la integral.

Solución: $y = x^2, x \in [0, 2]$



a) Si dividimos el intervalo de longitud 2 en 5 partes iguales cada subintervalo debe tener una longitud de $\frac{2}{5} = 0,4$ unidades de longitud. Por lo tanto,$x_0 = 0$, $x_1 = \frac{2}{5}$, $x_2 = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$, $x_3 = \frac{4}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$, $x_4 = \frac{6}{5} + \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$, $x_5 = \frac{8}{5} + \frac{2}{5} = \frac{10}{5} = 2$.

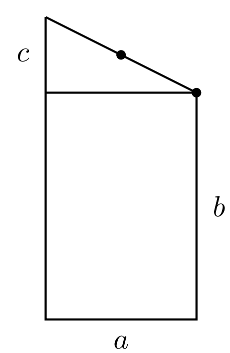
$\xi_1 = \dfrac{1}{5}, \quad \xi_2 = \dfrac{3}{5}, \quad \xi_3 = 1, \quad \xi_4 = \dfrac{7}{5}, \quad \xi_5 = \dfrac{9}{5}.$
Ahora, calculamos los valores de f en cada ξ_i:

$$f(\xi_1) = \frac{1}{25}, \quad f(\xi_2) = \frac{9}{25}, \quad f(\xi_3) = 1, \quad f(\xi_4) = \frac{49}{25}, \quad f(\xi_5) = \frac{91}{25}.$$

Entonces, la suma de Riemann S correspondiente a la partición $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ y los puntos ξ_i es un valor aproximado del área A.

$$\begin{aligned} A \quad \approx \quad & S = \sum_{i=1}^{5} y(\xi_1)\Delta x_i = \frac{1}{25}\cdot\frac{2}{5} + \frac{9}{25}\cdot\frac{2}{5} + 1\cdot\frac{2}{5} + \frac{49}{25}\cdot\frac{2}{5} + \frac{81}{25}\cdot\frac{2}{5} \\ & \frac{2}{5}\left(\frac{1+9+25+49+81}{25}\right) = \frac{2}{5}\cdot\frac{165}{25} = \frac{2}{5}\cdot\frac{33}{5} = \frac{66}{25} \\ & 2,64. \end{aligned}$$

b) Área de un trapecio:



$$A_T = a\cdot b + \frac{a\cdot c}{2} = \frac{2a\cdot b + ac}{2} = \frac{a\cdot b + (b+c)\cdot a}{2} = \frac{a\cdot[b+(b+c)]}{2}.$$

1^{er} trapecio: $\quad a = \dfrac{2}{5}, \quad b = 0, \quad b + c = \left(\dfrac{2}{5}\right)^2 = \dfrac{4}{25}; \quad A_{T_1} = \dfrac{\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{25}}{2} = \dfrac{4}{125}$

2^{do} trapecio: $\quad a = \dfrac{2}{5}, b = \left(\dfrac{2}{5}\right)^2, b + c = \left(\dfrac{4}{5}\right)^2; \quad A_{T_2} = \dfrac{\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{4}{25}+\frac{16}{25}\right)}{2}$

3^{er} trapecio: $\quad a = \dfrac{2}{5}, b = \left(\dfrac{4}{5}\right)^2, b + c = \left(\dfrac{6}{5}\right)^2; \quad A_{T_3} = \dfrac{\frac{2}{5}\left(\frac{16}{25}+\frac{16}{25}\right)}{2}$

4^{to} trapecio: $a = \dfrac{2}{5}, b = \left(\dfrac{6}{5}\right)^2, b + c = \left(\dfrac{8}{5}\right)^2$; $A_{T_4} = \dfrac{\frac{2}{5}\left(\frac{36}{25} + \frac{64}{25}\right)}{2}$

5^{to} trapecio: $a = \dfrac{2}{5}, b = \left(\dfrac{8}{5}\right)^2, b + c = 2^2$; $A_{T_5} = \dfrac{\frac{2}{5}\left(\frac{64}{25} + 4\right)}{2}$

Area $\approx \dfrac{4}{125} + \dfrac{20}{125} + \dfrac{52}{125} + \dfrac{100}{125} + \dfrac{164}{125} = \dfrac{340}{125} = \dfrac{68}{25} = 2,72.$

c) Cada sumando de la suma del item anterior es de la forma:

$$A_{T_i} = a_i \cdot \frac{b_i + (b_i + c_i)}{2}.$$

La base de cada trapecio es $a_i = \Delta x_i$. Para que dicha suma sea una suma de Riemann, el número $\dfrac{b_i + (b_i + c_i)}{2}$ debe corresponder a la imagen de algún $\overline{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Es decir, $f(\overline{x_i}) = \dfrac{b_i + (b_i + c_i)}{2}$.

Como f es continua en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y $f([x_{i-1}, x_i]) = [b_i, b_i + c_i]$, podemos aplicar el Teorema del Valor Intermedio, teorema 2.5.15 para obtener la existencia de $\overline{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que $f(\overline{x_i}) = \dfrac{b_i + (b_i + c_i)}{2}$. Por lo tanto, la suma de las áreas de los trapecios cuyas alturas son puntos sobre el gráfico de una curva continua es una suma de Riemann.

d) Sea $\Delta x_i = \dfrac{2}{n}$. Así, obtenemos los puntos de la partición $\mathcal{P}_n$:

$x_i = \dfrac{2}{n} \cdot i$; con $i = 0, 1, \cdots n$.
$x_0 = 0, x_1 = \dfrac{2}{n}, \quad x_2 = \dfrac{4}{n}, \quad x_3 = \dfrac{6}{n}, \cdots, x_{n-1} = \dfrac{2(n-1)}{n}, \quad x_n = 2.$
Si $i = 0, 1, \ldots, n-1$ entonces, considerando que la función f es creciente $M_i = f(x_i = \dfrac{4}{n^2} \cdot (i)^2$.

Por lo tanto,

$$f(x_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) = f(x_i)\cdot \Delta x_i = \frac{4}{n^2}\cdot(i)^2\cdot\frac{2}{n} = \frac{8}{n^3}(i)^2.$$

$$\begin{aligned}
S(f,\mathcal{P}_n) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{8}{n^3}(i)^2\\
&= \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i)^2\\
&= \frac{8}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{8}{n^2}\cdot\frac{2n^2+3n+1}{6}\\
&= \frac{4}{3}\cdot\frac{2n^2+3n+1}{n^2} = \frac{4}{3}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

e) La integral superior de la función y sobre $[0,2]$ corresponde al ínfimo de todas las posibles sumas superiores. Este ínfimo se alcanza haciendo tender n a $+\infty$ en $S(f,\mathcal{P}_n) = \frac{4}{3}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$, puesto que esta sucesión es decreciente.

$$\lim_{n\to+\infty} S(f,\mathcal{P}_n) = \frac{4}{3}\cdot 2 = \frac{8}{3} = 2,666....$$

Este valor corresponde al valor de la integral porque la función es continua y por lo tanto integrable.

5. Dada la función $f(x) = x(x+2)$, $\quad a \leq x \leq 2a \quad$, $a > 0$, calcule $\displaystyle\int_a^{2a} f(x)dx$ como límite de sumas de Riemann.

Solución: Consideremos la partición del intervalo $[a,2a]$ obtenida al subdividir el intervalo en n subintervalos iguales de longitud $\dfrac{a}{n}$. Entonces cada subintervalo I_i tiene la forma:

$$I_i = \left[a + a\cdot\frac{i-1}{n}\,,\, a + a\cdot\frac{i}{n}\right[, i = 1,\cdots,n.$$

$$
\begin{aligned}
f\left(a+a\cdot\frac{i}{n}\right) &= \left(a+a\cdot\frac{i}{n}\right)\left(a+a\cdot\frac{i}{n}+2\right)\\
f\left(a+a\cdot\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{a}{n} &= \left(a+a\cdot\frac{i}{n}\right)\left(a+a\cdot\frac{i}{n}+2\right)\frac{a}{n}=\\
&= \left(a^2+a^2\frac{i}{n}+2a+\frac{i}{n}a^2+a^2\frac{i^2}{n^2}+2a\frac{i}{n}\right)\frac{a}{n}\\
&= \frac{a^3}{n}+a^3\frac{i}{n^2}+\frac{2a^2}{n}+a^3\frac{i}{n^2}+\frac{a^3\cdot i^2}{n^3}+\frac{2a^2}{n^2}i\\
&= \frac{a^3}{n}+2a^3\cdot\frac{i}{n^2}+a^3\frac{i^2}{n^3}+\frac{2a^2}{n^2}i+\frac{2a^2}{n}\\
\sum_{i=1}^{n} f\left(a+a\frac{i}{n}\right)\frac{a}{n} &= a^3+a^3\frac{n+1}{n}+\frac{a^3}{6}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}+a^2\left(\frac{n+1}{n}\right)+2a^2\\
\lim_{n\to+\infty} S_n &= a^3+a^3+\frac{a^3}{3}+a^2+2a^2=\frac{7a^3}{3}+3a^2.
\end{aligned}
$$

6. Sea $I=\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}dx$

   a) Diga por qué la integral I existe.

   b) Dé un valor aproximado de I subdividendo el intervalo de integración en 10 subintervalos de igual longitud:

      1) Calculando la respectiva suma superior.
      2) Calculando la respectiva suma inferior.
      3) Usando la suma de las áreas de los trapecios determinados por la partición elegida.
      4) Usando los puntos medios de cada subintevalo.

   c) Use consideraciones geométricas para decir, cuando sea posible, si los valores encontrados en cada caso son mayores o menores que el valor exacto.

Solución:

a) La integral existe porque $f(x)=\dfrac{1}{x}$ es continua en $[1,2]$, como consecuencia del teorema 6.2.18.

b) consideremos una partición del intervalo $[a, b]$ dividiéndola en n partes de igual longitud. Tenemos, $a = 1,\ b = 2\ \Delta x_i = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1}{n},\ x_i = a + (b-a) \cdot \dfrac{i}{n} = 1 + \dfrac{i}{n},\ i = 0, 1, \ldots, n.$
$x_0 = 1, \quad x_1 = 1 + \dfrac{1}{n}, \quad x_2 = 1 + \dfrac{2}{n}, \cdots, \quad x_{n-1} = 1 + \dfrac{n-1}{n}, \quad x_n = 2.$
Si $n = 10$, tenemos:
$x_0 = 1, \quad x_1 = \dfrac{11}{10}, \quad x_2 = \dfrac{12}{10}, \quad x_3 = \dfrac{13}{10}, \quad \cdots, \quad x_9 = \dfrac{19}{10}, \quad x_{10} = 2.$

1) Considerando que la función es decreciente, la suma superior queda expresada como sigue:

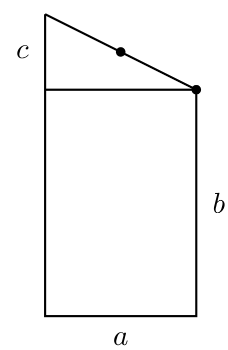
$$\begin{aligned}
S(f, \mathcal{P}_{10}) &= \frac{1}{10} \cdot f(1) + \frac{1}{10} f\left(\frac{11}{10}\right) + \frac{1}{10} \cdot f\left(\frac{12}{10}\right) + \cdots + \frac{1}{10} \cdot f\left(\frac{19}{10}\right) \\
&= \frac{1}{10}\left[1 + \frac{10}{11} + \frac{10}{12} + \frac{10}{13} + \cdots + \frac{10}{19}\right] \\
&= \frac{1}{10}[1 + 0{,}909 + 0{,}833 + 0{,}769 + 0{,}714 + 0{,}666 + 0{,}625 \\
&\quad +0{,}588 + 0{,}555 + 0{,}526] \\
&= \frac{1}{10} \cdot 7{,}185 \approx 0{,}7185.
\end{aligned}$$

2) La suma inferior tiene la forma:

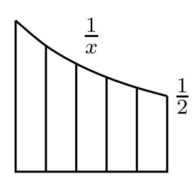
$$\begin{aligned}
I(f, \mathcal{P}_{10}) &= \frac{1}{10}\left[f\left(\frac{11}{10}\right) + f\left(\frac{12}{10}\right) + \cdots f(2)\right] \\
&= \frac{1}{10}\left[\frac{10}{11} + \frac{10}{12} + \cdots + \frac{10}{19} + \frac{10}{20}\right] \\
&= \frac{1}{10} \cdot 6{,}685 \approx 0{,}6685.
\end{aligned}$$

3) Ahora calcularemos un valor aproximado de la integral usando las áreas de los trapecios determinados por la partición elegida. Recordemos que el área

de un trapecio es el producto de la base por la semi suma de las alturas.



Trapecio: $ab + \dfrac{ac}{2} = \dfrac{(2b+c)a}{2} = \dfrac{a \cdot [b + (b+c)]}{2}$.



Entonces,como todos los trapecios tiene base de longitud $\dfrac{1}{10}$, tenemos que esta suma de Riemann tiene la forma:

$$
\begin{aligned}
s(f,\mathcal{P}_{10}) &= \frac{1}{10}\left[\frac{f\left(\frac{11}{10}\right)+f(1)}{2}+\frac{f\left(\frac{11}{10}\right)+f\left(\frac{12}{10}\right)}{2}\right.\\
&\quad\left.+\frac{f\left(\frac{12}{10}\right)+f\left(\frac{13}{10}\right)}{2}+\cdots+\frac{f(2)+f\left(\frac{19}{10}\right)}{2}\right]\\
&= \frac{1}{10}\left[\frac{\frac{10}{11}+1}{2}+\frac{\frac{10}{11}+\frac{10}{12}}{2}+\frac{\frac{10}{12}+\frac{10}{13}}{2}+\frac{\frac{10}{13}+\frac{10}{14}}{2}\right.\\
&\quad+\frac{\frac{10}{14}+\frac{10}{15}}{2}+\frac{\frac{10}{15}+\frac{10}{16}}{2}+\frac{\frac{10}{16}+\frac{10}{17}}{2}+\frac{\frac{10}{17}+\frac{10}{18}}{2}+\\
&\quad\left.\frac{\frac{10}{18}+\frac{10}{19}}{2}+\frac{\frac{10}{19}+\frac{1}{2}}{2}+\right]\\
&= \frac{1}{10}\left[\frac{0,909+1}{2}+\frac{0,909+0,833}{2}+\frac{0,833+0,769}{2}+\frac{0,769+0,714}{2}+\right.\\
&\quad\frac{0,714+0,666}{2}+\frac{0,666+0,625}{2}\\
&\quad\left.+\frac{0,625+0,588}{2}+\frac{0,588+0,555}{2}+\frac{0,555+0,526}{2}+\frac{0,526+0,5}{2}\right]\\
&= \frac{1}{10}[0,9545+0,871+0,801+0,7415+0,690+\\
&\quad 0,6455+0,6065+0,5715+0,5405+0,513]\\
&= \frac{1}{10}\cdot 6,9350\approx 0,6935.
\end{aligned}
$$

4) Usando puntos medios, tenemos:

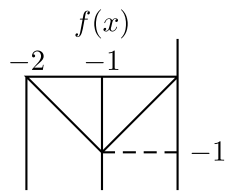
$$\begin{array}{lllllll}
\overline{x}_0 & = & \dfrac{1+\dfrac{11}{10}}{2} & = & \dfrac{21}{20}, & \overline{x}_1 & = & \dfrac{\dfrac{11}{10}+\dfrac{12}{10}}{2} & = & \dfrac{23}{20} \\
\overline{x}_2 & = & \dfrac{\dfrac{12}{10}+\dfrac{13}{10}}{2} & = & \dfrac{25}{20}, & \overline{x}_3 & = & \dfrac{\dfrac{13}{10}+\dfrac{14}{10}}{2} & = & \dfrac{27}{20}, \\
\overline{x}_4 & = & \dfrac{\dfrac{14}{10}+\dfrac{15}{10}}{2} & = & \dfrac{29}{20}, & \overline{x}_5 & = & \dfrac{\dfrac{15}{10}+\dfrac{16}{10}}{2} & = & \dfrac{31}{20}, \\
\overline{x}_6 & = & \dfrac{\dfrac{16}{10}+\dfrac{17}{10}}{2} & = & \dfrac{33}{20}, & \overline{x}_7 & = & \dfrac{\dfrac{17}{10}+\dfrac{18}{10}}{2} & = & \dfrac{35}{20}, \\
\overline{x}_8 & = & \dfrac{\dfrac{18}{10}+\dfrac{19}{10}}{2} & = & \dfrac{37}{20}, & \overline{x}_9 & = & \dfrac{\dfrac{19}{10}+\dfrac{1}{2}}{2} & = & \dfrac{39}{20}.
\end{array}$$

Así, la suma de Riemann respectiva es:

$$\begin{aligned}
s(f,\mathcal{P}_{10}) &= \frac{1}{10}\left[f\left(\frac{21}{20}\right)+f\left(\frac{23}{20}\right)+f\left(\frac{25}{20}\right)+\cdots+f\left(\frac{39}{20}\right)\right] \\
&= \frac{1}{10}\left[\frac{20}{21}+\frac{20}{23}+\frac{20}{25}+\frac{20}{27}+\frac{20}{29}+\frac{20}{31}+\frac{20}{33}+\frac{20}{35}+\frac{20}{37}+\frac{20}{39}\right] \\
&= \frac{1}{10}[0,952+0,869+0,8+0,740+0,689+ \\
&\quad 0,645+0,606+0,571+0,540+0,512] \\
&= \frac{1}{10}[6,924] \approx 0,6924.
\end{aligned}$$

c)
- La suma superior es siempre mayor que la integral, por lo tanto el valor obtenido por esta vía es una aproximación por exceso.
- La suma inferior es siempre menor que el valor de la integral, por lo cual esta aproximación es una por defecto.
- La suma de las áreas de los trapecios puede ser, en general mayor o menor que el valor exacto.En este caso particular, debido a las propiedad de convexidad tenemos que esta aproximación es mayor que el valor exacto.
  en efecto: la función $\dfrac{1}{x}$ es convexa, por lo cual la recta que une los puntos $\left(x_{i-1},\dfrac{1}{x_{i-1}}\right)$ y $\left(x_i,\dfrac{1}{x_i}\right)$ está sobre la curva en el intervalo $[x_{i-1},x_i]$.
  Por lo tanto, el área de los trapecios es mayor que el área sobre la curva.
- Veamos ahora la cuarta aproximación. Al usar los puntos medios para evualuar la función en la respectiva suma de Riemann y teniendo en cuenta que

la función es estrictamente decreciente y positiva, podemos deducir que el área que queda sin evaluar, es decir que está sobre el rectángulo de altura $f(\overline{x_i})$ con $x \in [x_{i-1}\,,\,\overline{x_i}]$ es mayor que él área considerada en el rectángulo cuando $x \in [\overline{x_i}\,,\,x_i]$



7. *a*) Use que $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$ y la fórmula que convierte $\operatorname{sen} x_1 - \operatorname{sen} x_2$ en producto para demostrar que
$$|\operatorname{sen} x_1 - \operatorname{sen} x_2| \leq |x_1 - x_2|.$$

   b) Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$ definida en $[a,b]$ y $\mathcal{P}_n$ una partición de $[a,b]$ que divide este intervalo en n partes iguales. Demuestre que
$$0 \leq S(f,\mathcal{P}_n) - I(f,\mathcal{P}_n) \leq \frac{(b-a)^2}{n},$$
   donde $S(f,\mathcal{P}_n)$ es una suma superior de f con respecto a $\mathcal{P}_n$ y $I(f,\mathcal{P}_n)$ es una suma inferior de f con respecto a $\mathcal{P}_n$.

   c) Use el criterio de integrabilidad para demostrar que $f(x)$ es integrable en cualquier intervalo $[a,b]$.

   d) Deduzca que $g(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ es integrable en cualquier intervalo $[a,b]$.

   e) Deduzca que $\cos x$ es integrable en cualquier intervalo $[a,b]$.

Solución:

a) Usaremos $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$ y la conocida fórmula trigonométrica:
$$\operatorname{sen} x_1 - \operatorname{sen} x_2 = 2\cos\frac{x_1+x_2}{2}\operatorname{sen}\frac{x_1-x_2}{2}.$$
entonces,

$$\begin{aligned}
|\operatorname{sen} x_1 - \operatorname{sen} x_2| &\leq 2\left|\cos\frac{x_1+x_2}{2}\operatorname{sen}\frac{x_1-x_2}{2}\right|\\
&\leq 2\left|\cos\frac{x_1+x_2}{2}\right|\left|\operatorname{sen}\frac{x_1-x_2}{2}\right|\\
&\leq 2\left|\cos\frac{x_1+x_2}{2}\right|\left|\frac{x_1-x_2}{2}\right|\\
&\leq |x_1-x_2|, \quad \text{pues } |\cos\alpha|\leq 1.
\end{aligned}$$

b) Sea $x_i = a + (b-a)\cdot\dfrac{i}{n}$, $\quad i = 0, 1, \ldots n$.
Así, $\mathcal{P}_n = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$.

$$\begin{aligned}
S(f,\mathcal{P}_n) &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}).M_i = (b-a)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}M_i\\
I(P_r, f) &= \sum_{i=0}^{n-1}(x_i - x_{i-1}).m_i = (b-a)\sum_{i\equiv 0}^{n-1}\frac{1}{n}m_i
\end{aligned}$$

Denotemos por:

$$M_i = \operatorname{sen}(x_i^{**}), \quad m_i = \operatorname{sen}(x_i^{*}).$$

Para toda partición $\mathcal{P}_n$:

$$\begin{aligned}
S(f,\mathcal{P}_n) - I(f,\mathcal{P}_n) &= (b-a)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}(M_i - m_i)\\
&= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|(\operatorname{sen}(x_i^{**}) - \operatorname{sen}(x_i^{*})\right|\\
&\leq \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i^{**} - x_i^{*}| \leq \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - x_{i-1}|\\
&\leq \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{n=1}^{n}\frac{b-a}{n} = \frac{(b-a)^2}{n}.
\end{aligned}$$

c) De acuerdo a (b) dado $\varepsilon > 0$, en virtud del Principio de Arquímedes podemos escoger n tal que $\dfrac{(b-a)^2}{n} < \varepsilon$ y entonces existe una partición $\mathcal{P}_\varepsilon$ de modo que se cumpla:

$$0 \leq S(f, \mathcal{P}_\varepsilon) - I(f, \mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon.$$

d) Como $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ es continua por ser compuesta de dos funciones continuas es integrable.

e) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen} x = \cos x$
Esto es, $g(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ es integrable.

8. Sea
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ x & \text{si} \quad x \in [0,1] - \mathbb{Q} \end{cases}$$

a) Demuestre que la suma inferior de cualquier partición de $[0,1]$ vale cero.

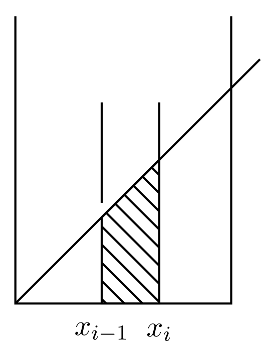
b) Calcule $\underline{\int_0^1} f(x)\, dx$.

c) Demuestre que toda suma superior $S(f, \mathcal{P}_n)$, donde $\mathcal{P}_n = \{0, x_1, \ldots, \ldots, x_n\}$ es una partición cualquiera de $[0,1]$, puede escribirse como:
$$S(f, \mathcal{P}_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \frac{1}{2}\Delta x_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(\Delta x_i)^2.$$

d) Observe que, $(x_i - \frac{1}{2}\Delta x_i)\Delta x_i$ es el área del trapecio de base Δx_i y de alturas x_{i-1} y x_i, y deduzca que
$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \frac{1}{2}\Delta x_i)\Delta x_i = \frac{1}{2}.$$

e) Demuestre que $f(x)$ no es integrable.

Solución:



a) Sea $\mathcal{P}$ una partición cualquiera $\mathcal{P} = \{x_0 = 0 < \cdots < x_n = 1\}$

$$I(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}).m_i = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \cdot 0 = 0.$$

Luego, para toda partición $\mathcal{P}$, tenemos $I(f,\mathcal{P}) = 0$.

b) $\underline{\int_0^1} f(x)dx = 0$, por definición de integral inferior.

c) $S(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}).M_i$; donde $M_i = x_i$.

Como $(x_i - x_{i-1}).x_i = x_i^2 - x_i x_{i-1}$, entonces:

$$\begin{aligned}
(x_i - x_{i-1}) \cdot x_i = \; &= \frac{x_i^2}{2} + \frac{x_i^2}{2} - x_i x_{i-1} - \frac{x_{i-1}^2}{2} + \frac{x_{i-1}^2}{2} = \\
&= \frac{x_i^2}{2} - \frac{x_{i-1}^2}{2} + \frac{x_i^2}{2} - x_i x_{i-1} + \frac{x_{i-1}^2}{2} \\
&= \frac{(x_i + x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1}) + \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})^2.
\end{aligned}$$

Usando que $\left(x_i - \frac{1}{2}\Delta x_i\right) = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$, se tiene que: $(x_i - x_{i-1}) \cdot x_i = (x_i - \frac{1}{2}\Delta x_i)\Delta x_i + \frac{1}{2} \cdot \Delta x_i^2$.

Así, $S(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{1}{2}\Delta x_i\right) \cdot \Delta x_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2$, para toda partición $\mathcal{P}$.

d) $\left(x_i - \frac{1}{2}\Delta x_i\right) = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$.

$\left(x_i - \frac{1}{2}\Delta x_i\right) \cdot \Delta x_i =$ área del trapecio de alturas x_i, x_{i-1} y base Δx_i.

Así, $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{1}{2}\Delta x_i\right)\Delta x_i =$ área del tríangulo rectángulo de lado $\mathrm{l} = \frac{1}{2}$.

Por tanto, para toda partición $\mathcal{P}$ tenemos que $S(f,\mathcal{P}) \geq \frac{1}{2}$.

e) Como $I(P,f) = 0$, usando el criterio de integrabilidad, podemos concluir que f no es integrable, ya que $S(f,\mathcal{P}) \geq \frac{1}{2}$. Como se vio en el item anterior.

9. Usando que:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}\right)=\frac{1}{k+1};\quad k\in\mathbb{N}.$$

Si $a>0, k\in\mathbb{N}$, calcular

$$\int_0^a x^k dx$$

Solución: La función $f(x)=x^k$ es continua, por lo tanto existe $\displaystyle\int_0^a x^k dx$.

Para calcularla tomaremos límites de sumas de Riemann inferiores con particiones que dividen el intervalo $[0,a]$ en n partes iguales.

Sea $\mathcal{P}_n=\{x_0,x_1,\cdot,\cdots,x_n\}$, donde:

$$\begin{array}{lcl} x_0 & = & 0,\ x_1=\dfrac{a}{n},x_2=\dfrac{2a}{n},\cdots,x_n=\dfrac{na}{n}=a \\ \xi_i & = & x_{i-1} \\ \Delta x_i & = & \dfrac{a}{n} \end{array}$$

$$\begin{aligned} I(f,\mathcal{P}_n) &= \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{(i-1)a}{n}\right)\frac{a}{n} \\ &= 0\cdot\frac{a}{n}+\left(\frac{a}{n}\right)^k\cdot\frac{a}{n}+\left(\frac{2a}{n}\right)^k\frac{a}{n}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}a\right)^k\frac{a}{n} \\ &= \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}}\left[1+2^k+\cdot+(n-1)^k\right] \end{aligned}$$

Usando el límite dado:

$$\lim_{n\to\infty} I(f,\mathcal{P}_n)=\frac{a^{k+1}}{k+1}$$

En consecuencia,

$$\boxed{\int_a^a x^k dx=\frac{a^{k+1}}{k+1};\quad a>0}$$

10. Calcular $\displaystyle\int_{-a}^{0} x^k dx$ usando el mismo método del ejercicio 9.

Solución:

$$\Delta x_i = \frac{a}{n}; \xi_i = x_i$$

$$x_0 = -a, \quad x_1 = -\frac{(n-1)}{a}a, \cdots\cdots, x_{n-2} = -\frac{2a}{n}; \quad x_{n-1} = -\frac{a}{n}, x_n = 0$$

$$\begin{aligned}
I(f, \mathcal{P}_n) &= 0 \cdot \frac{a}{n} + \left(\frac{-a}{n}\right)^k \frac{a}{n} + \left(\frac{-2a}{n}\right)^k \cdot \frac{a}{n} + \cdots + \left(-\frac{(n-1)a}{n}\right)^k \cdot \frac{a}{n} \\
&= \frac{(-a)^k \cdot a}{n^{k+1}} \left[1 + 2^k + \cdots + (n-1)^k\right] \\
&= -\frac{(-a)^{k+1}}{n^{k+1}} \left[1 + 2^k + \cdots + (n-1)^k\right] \\
\lim_{n\to\infty} I(f, \mathcal{P}_n) &= -\frac{(-a)^{k+1}}{k+1} \text{ Por lo tanto:} \\
\int_{-a}^{0} x^k dx &= -\frac{(-a)^{k+1}}{k+1} \\
\int_{c}^{0} x^k dx &= -\frac{c^{k+1}}{k+1}; \quad c < 0
\end{aligned}$$

Ejercicios propuestos

1. Generalice el resultado de los ejemplos 6.2.13 y 6.2.14 demostrando que la función parte entera satisface el criterio de integrabilidad sobre cada subintervalo $[k, k+1]$, $k \in \mathbb{Z}$ y que $\displaystyle\int_{k}^{k+1} [x]\, dx = k$.

2. Use el criterio de integrabilidad para averiguar cuales de las siguientes funciones son integrables y calcule $\int f$ cuando exista.

   a) $f(x) = [x]$ en $[0, 1]$.

   b) $f(x) = [x]$ en $[-2, 1]$.

c) $f(x) = x - [x]$ en $[-1, 1]$.

d) $f(x) = |x|$ en $[-1, 1]$.

e) $f(x) = x + 1$ en $[-3, 0]$.

f) $f(x) = x^3$ en $[0, 2]$.

g) $f(x) = x^3$ en $[-2, 0]$.

h) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si} \quad x \in [0,1] - \mathbb{Q} \end{cases}$

3. a) Grafique la curva $x^2 + y^2 = 1$.

   b) Grafique la función $y = \sqrt{1 - x^2}$.

   c) Use la interpretación geométrica de la integral para calcular

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} dx$$

4. Dada

$$f(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{si} \quad x \in [-2, -1] \\ x & \text{si} \quad x \in [-1, 0] \end{cases}$$

Calcule las sumas de Riemann para particiones que dividan el intervalo en $2n$ subintervalos de igual longitud. Calcule la integral de f en $[-2, 0]$

6.3. Propiedades de la Integral de Riemann

Teorema 6.3.1 Si f y g son funciones integrables en $[a,b]$, entonces se cumplen las siguientes propiedades de la integral de Riemann:

1. $f+g$ es integrable y $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

2. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces αf es integrable y $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$.

3. Si f es integrable y no negativa en $[a,b]$, entonces:
$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

4. Si f y g son funciones integrables en $[a,b]$ y si $f(x) \leq g(x)$ para cada x en $[a,b]$, entonces
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

5. Si f es integrable en $[a,b]$ y si $m \leq f(x) \leq M$ para cada $x \in [a,b]$, entonces
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

6. **Partición del intervalo de integración**
Si $a,b,c \in \mathbb{R}$ son tales que $a < c < b$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada, entonces
f es integrable en $[a,b]$ si y sólo si f es integrable en $[a,c]$ y $[c,b]$ y
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Demostración:

1. Como f y g son integrables, $f+g$ es una función acotada y dado $\varepsilon > 0$ existe partición $\mathcal{P}_\varepsilon(f)$ tal que
$$S(f,\mathcal{P}_\varepsilon(f)) - s(f,\mathcal{P}_\varepsilon(f)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Como g es integrable dado $\varepsilon > 0$ existe partición $\mathcal{P}_\varepsilon(g)$ tal que
$$S(g,\mathcal{P}_\varepsilon(g)) - s(g,\mathcal{P}_\varepsilon(g)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $\mathcal{P} = \mathcal{P}_\varepsilon(f) \cup \mathcal{P}_\varepsilon(g)$, entonces

$$S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) \leq S(f,\mathcal{P}_\varepsilon(f)) - s(f,\mathcal{P}_\varepsilon(f)) < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$S(g,\mathcal{P}) - s(g,\mathcal{P}) \leq S(g,\mathcal{P}_\varepsilon(g)) - s(g,\mathcal{P}_\varepsilon(g)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Escribamos $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ y sean

$$\begin{aligned} m_i &= \text{ínf}\{f(x)\,;\; x \in [t_{i-1}, t_i]\}\,, \\ m_i' &= \text{ínf}\{g(x)\,;\; x \in [t_{i-1}, t_i]\}\,, \\ m_i'' &= \text{ínf}\{f(x)+g(x)\,;\; x \in [t_{i-1}, t_i]\} \end{aligned}$$

y sean $M_i\,, M_i'\,, M_i''$ los respectivos supremos. Como
$m_i \leq f(x)$ y $m_i' \leq g(x)$, entonces

$$m_i + m_i' \leq f(x) + g(x).$$

Luego $m_i + m_i' \leq m_i''$.

Análogamente se verifica que
$M_i + M_i' \geq M_i''$.
Por otro lado,

$$\begin{aligned} S(f+g,\mathcal{P}) - s(f+g,\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} M_i''(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i''(t_i - t_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}(M_i + M_i')(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=0}^{n-1}(m_i - m_i')(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n}(M_i' - m_i')(t_i - t_{i-1}) \\ &\leq [S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P})] + S((g,\mathcal{P}) - s(g,\mathcal{P})) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto prueba que $f+g$ es una función integrable. Veamos ahora que

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

En efecto, como $m_i + m_i' \leq m_i''$, se tiene

$$s(f,\mathcal{P}) + s(g,\mathcal{P}) \leq s(f+g,\mathcal{P})$$

y como $M_i'' \leq M_i + M_i'$, se tiene

$$S(f+g,\mathcal{P}) \leq S(f,\mathcal{P}) + S(g,\mathcal{P}).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f+g)(x)dx - \left[\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\right] &\leq S(f+g,\mathcal{P}) - (s(f,\mathcal{P}) + s(g,\mathcal{P})) \\
&\leq S(f,\mathcal{P}) + S(g,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) - s(g,\mathcal{P}) \\
&\leq S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) + S(g,\mathcal{P}) - s(g,\mathcal{P}) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

2. Se deja como ejercicio.

3. Si $f(x) \geq 0$ en $[a,b]$, entonces todas las sumas superiores e inferiores relativas a cualquier partición son positivas. Como f es integrable, su integral

$$\int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \text{ínf}\{S(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ particion de } [a,b]\ \} \geq 0.$$

4. Esta propiedad es consecuencia de la propiedad 3.
   Si $f(x) \geq g(x)$ entonces, $f(x) - g(x) \geq 0$, para todo $x \in [a,b]$.

   Aplicando 3 y 1 tenemos, $\displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \geq 0,$
   consecuentemente, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$

5. Es una consecuencia directa de la propiedad 4, usando $g(x) = M$ y $h(x) = m$ en $[a,b]$. entonces, tenemos que

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x).$$

En virtud de la propiedad mencionada obtenemos:

$$\int_a^b h(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

De donde se deduce la propiedad requerida.

6. ($\Rightarrow$) Supongamos que f es integrable en $[a,b]$. Debemos demostrar que f es integrable en $[a,c]$ y $[c,b]$.

   Por hipótesis, dado $\varepsilon > 0$ existe partición $\mathcal{P}_\varepsilon = \{t_0, t_1 \ldots, t_n\}$ de $[a,b]$ tal que

$$S(f,\mathcal{P}_\varepsilon) - s(f,\mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon$$

   Suponemos que $c \in \mathcal{P}_\varepsilon$, es decir $c = t_j$ para algún $j = 1, \ldots, n-1$.
   Sean $\mathcal{P}_1 = \{t_0, \ldots, t_j\}$ y $\mathcal{P}_2 = \{t_j, \ldots, t_n\}$, se tiene que $\mathcal{P}_1$ es partición de $[a,c]$ y $\mathcal{P}_2$ es una partición de $[c,b]$, entonces

$$s(f,\mathcal{P}_\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{j-1} m_i(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=j}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) = s_{\mathcal{P}_1} + s_{\mathcal{P}_2}$$

   Análogamente $S(f,\mathcal{P}_\varepsilon) = S(f,\mathcal{P}_1) + S(f,\mathcal{P}_2)$, luego

$$\begin{aligned} S(f,\mathcal{P}_\varepsilon) - s(f,\mathcal{P}_\varepsilon) =& [S(f,\mathcal{P}_1) + S(f,\mathcal{P}_2)) - [(s(f,\mathcal{P}_1) + s(f,\mathcal{P}_2))] \\ &= [S(f,\mathcal{P}_1) - s(f,\mathcal{P}_1)] + [S(f,\mathcal{P}_2) - s(f,\mathcal{P}_2)] < \varepsilon \end{aligned}$$

   Así, si $c \in \mathcal{P}_\varepsilon$, entonces existen particiones $\mathcal{P}_{1,\varepsilon}(f)$, $\mathcal{P}_{2,\varepsilon}(f)$ tal que $S(f,\mathcal{P}_{1,\varepsilon)} - s(f,\mathcal{P}_{1,\varepsilon)} < \varepsilon$ en $[a,c]$ y $S(f,\mathcal{P}_{2,\varepsilon}) - s(f,\mathcal{P}_{2,\varepsilon}) < \varepsilon$ en $[c,b]$.
   Supongamos que $c \notin \mathcal{P}_\varepsilon$, entonces existe j tal que $t_{j-1} < c < t_j$. Sea $\mathcal{P}'_\varepsilon = \mathcal{P}_\varepsilon \cup \{c\} = \{t_0, t_1, t_{j-1}, c, t_j, \ldots, t_n\}$, claro que $\mathcal{P}'_\varepsilon$ es mas fina que $\mathcal{P}_\varepsilon$ y luego

$$s(f,\mathcal{P}_\varepsilon) \leq s(f,\mathcal{P}'_\varepsilon) \leq S(f,\mathcal{P}'_\varepsilon) \leq S(f,\mathcal{P}_\varepsilon)$$

   y entonces $S(f,\mathcal{P}'_\varepsilon) - s(f,\mathcal{P}'_\varepsilon) \leq S(f,\mathcal{P}_\varepsilon) - s(f,\mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon$.
   Por lo tanto,

$$S(f,\mathcal{P}'_\varepsilon) - s(f,\mathcal{P}'_\varepsilon) < \varepsilon$$

   Procedemos ahora como en el caso anterior pues $c \in \mathcal{P}'_\varepsilon$.Por lo tanto, f es integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$ ya que para todo $\varepsilon > 0$ hemos conseguido partición $\mathcal{P}_1$ de $[a,c]$ y $\mathcal{P}_2$ de $[c,b]$ tales que

$$S(f,\mathcal{P}_1) - s(f,\mathcal{P}_1) < \varepsilon \text{ y } S(f,\mathcal{P}_2) - s(f,\mathcal{P}_2) < \varepsilon.$$

   De la demostración anterior se desprende que

$$s(f,\mathcal{P}) \leq s(f,\mathcal{P}') = s(f,\mathcal{P}_1) + s(f,\mathcal{P}_2) \leq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

para cualquier partición $\mathcal{P}$. Por lo tanto,

$$\sup\{s(f,\mathcal{P})\} \leq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

así que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

También $S(f,\mathcal{P}') \leq S(f,\mathcal{P})$, es decir

$$S(f,\mathcal{P}_1) + S(f,\mathcal{P}_2) \leq S(f,\mathcal{P})$$

y luego $\displaystyle\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \leq S(f,\mathcal{P})$, así que $\displaystyle\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$.

Por lo tanto,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

($\Leftarrow$) Ahora nuestra hipótesis es f es integrable en $[a,c]$ y $[c,b]$ y debemos demostrar que f es integrable en $[a,b]$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $\mathcal{P}_1$ partición de $[a,c]$ tal que

$$S(f,\mathcal{P}_1) - s(f,\mathcal{P}_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

y existe partición $\mathcal{P}_2$ de $[c,b]$ tal que

$$S(f,\mathcal{P}_2) - s(f,\mathcal{P}_2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sea $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, claro que $\mathcal{P}$ es partición de $[a,b]$ y

$$S(f,\mathcal{P}) = S(f,\mathcal{P}_1) + S(f,\mathcal{P}_2),$$
$$s_{\mathcal{P}}(f) = s(f,\mathcal{P}_1) + s(f,\mathcal{P}_2)$$

Por lo tanto, $S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) = S(f,\mathcal{P}_1) - s(f,\mathcal{P}_1) + S(f,\mathcal{P}_2) - s(f,\mathcal{P}_2) \leq \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Por lo tanto, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\mathcal{P}$ partición de $[a,b]$ tal que

$$S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) < \varepsilon,$$

entonces f es integrable en $[a,b]$.

Al igual que antes concluimos qu,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

□

Teorema 6.3.2 1. Si f es integrable en $[a,b]$, entonces $|f|$ es integrable en $[a,b]$.

2. Si f es integrable en $[a,b]$, entonces $f^2 = f \cdot f$ es integrable en $[a,b]$.

3. Si f y g son integrables en $[a,b]$ entonces $f \cdot g$ es integrable en $[a,b]$.

Demostración:

1. Se deja de ejercicio.

2. Se deja de ejercicio.

3. $$(f+g)^2 = f^2 + g^2 + 2f \cdot g,$$

   implica

   $$f \cdot g = \frac{(f+g)^2 - f^2 - g^2}{2}.$$

   Por teoremas 6.3.1 y 6.3.2 podemos concluir que el producto de funciones integrables es integrable. □

El teorema del Valor Medio para integrales

Este importante teorema da respuesta a la pregunta : ¿Es posible calcular el valor promedio de una función sabiendo que, en general, ella tiene una cantidad infinitamente grande de valores diferentes? Consideremos una función continua $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$. Si dividimos el intervalo $[a,b]$ en n subintervalos de longitud $\triangle x = (b-a)/n$ y elegimos los puntos $x_1, \ldots x_n$ en los intervalos sucesivos y calculamos el promedio aritmético entre los números $f(x_1), \ldots f(x_n)$, tenemos:

$$\frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n}$$

De la ecuación $\triangle x = (b-a)/n$, obtenemos que $n = (b-a)/\triangle x$. Entonces, la expresión anterior la podemos escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{\frac{b-a}{\triangle x}} &= \frac{\triangle x[f(x_1)+\ldots+f(x_n)]}{b-a}\\ &= \frac{1}{b-a}[f(x_1)\triangle x+\ldots+f(x_n)\triangle x]\\ &= \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\triangle x\end{aligned}$$

Si aumentamos la cantidad de subintervalos, podemos calcular el valor promedio de una gran cantidad de valores de f, pero siempre una cantidad finita.Para pasar a una cantidad infinitamente grande que cubra todos los valores de f, debemos usar el concepto de lìmite y obtenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\triangle x &= \frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\triangle x\\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.\end{aligned}$$

Utilizando la definición de la integral de Riemann. Esto nos permite definir el **valor promedio** de f en el intervalo [a,b] como :

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Así, hemos logrado contestar la pregunta inicial, pero ahora surge otra inquietud: ¿existirá algún número c tal que la función evaluada en ese número sea igual al valor promedio de la función, es decir, $f(c)=\overline{f}$? el siguiente teorema responde a tal inquietud.

Teorema 6.3.3 Teorema del Valor Medio para integrales
Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua, entonces existe $c\in[a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Al número $f(c)$ se le llama **valor promedio o medio de f en** $[a,b]$.

Demostración:

Como f es continua en el intervalo cerrado y acotado $[a,b]$, el teorema de Weiersstras asegura que ella alcanza su valor máximo M y su valor mínimo m. así, tenemos que:

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Usando la propiedad 5 del teorema 6.3.1, tenemos que:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Lo que implica que,

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M.$$

Como la funciòn f es continua, el Teorema del Valor Intermadio asegura que su recorrido es $[m, M]$, por lo tanto el número $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ es elemento del recorrido de f. Es decir, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

$\square$

Definición 6.3.4 Si f es una función integrable sobre el intervalo $[a, b]$, $a \leq b$, entonces se define el número

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Observación 6.3.5 Como consecuencia de la def 6.3.4 haciendo $a = b$, obtenemos:

$$\int_a^a f(x)\,dx = -\int_a^a f(x)\,dx,$$

por lo tanto,

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Ejercicios resueltos

1. Use los ejercicios resueltos 9 y 10 de la sección 6.2, para demostrar que:

$$\int_a^b x^k dx = \frac{1}{k+1}\left(b^{k+1} - a^{k+1}\right); \quad a < b$$

Solución: Caso $1 : 0 < a < b$.

$$\int_0^b x^k dx = \int_0^a x^k dx + \int_a^b x^k dx; \qquad \text{usando propiedad 6.}$$
$$\frac{b^{k+1}}{k+1} = \frac{a^{k+1}}{k+1} + \int_a^b x^k dx$$
lo que implica que: $$\int_a^b x^k dx = \frac{b^{k+1}}{k+1} - \frac{a^{k+1}}{k+1}$$

Caso 2: $a < b < 0$

$$\int_a^0 x^k dx = \int_a^b x^k dx + \int_b^0 x^k dx; \qquad (\text{ usando propiedad 6.})$$
$$-\frac{a^{k+1}}{k+1} = \int_a^b x^k dx - \frac{b^{k+1}}{k+1}.$$ Por lo tanto, se obtiene la fórmula buscada.

Caso 3: $a < 0 < b$

$$\int_a^b x^k dx = \int_a^0 x^k dx + \int_0^b x^k dx; \qquad \text{usando propiedad 6.}$$
$$= -\frac{a^{k+1}}{k+1} + \frac{b^{k+1}}{k+1}$$

En general, tenemos que:

$$\boxed{\int_a^b x^k dx = \frac{1}{k+1}(b^{k+1} - a^{k+1}) \quad ; \quad a < b}$$

2. Deduzca que el valor absoluto de las integrales de seno y coseno son positivas y están acotadas por la longitud del intervalo de integración.

   Solución: Las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ son continuas, por lo tanto integrables en cualquier intervalo cerrado y acotado. Como $|\operatorname{sen} x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$, usando la propiedad de acotamiento de la integral, propiedad 5, se tiene que:

$$0 \leq \left| \int_a^b \operatorname{sen} x dx \right| \leq (b-a)$$
$$0 \leq \left| \int_a^b \cos x dx \right| \leq (b-a), \quad a \leq b.$$

3. Demuestre que:

   a) $0 \leq \left| \displaystyle\int_a^b \arctan x dx \right| \leq \dfrac{\pi}{2}(b-a), \quad a \leq b.$

   b) $\dfrac{1}{4} \leq \displaystyle\int_3^4 \dfrac{1}{x}\, dx \leq \dfrac{1}{3}$

   Solución:

   a) $f(x) = \arctan x$ es continua por lo tanto su integral existe en cualquier intervalo $[a, b]$. Además
   $$|f(x)| \leq \frac{\pi}{2}.$$
   Por lo tanto,
   $$0 \leq \left| \int_a^b \arctan x dx \right| \leq \frac{\pi}{2}(b-a)$$

   b) $3 < x < 4$, implica que $\dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{3}$. Por lo tanto,
   $$\int_3^4 \frac{dx}{4} \leq \int_3^4 \frac{dx}{x} \leq \int_3^4 \frac{dx}{3}.$$
   Es decir: $\boxed{\dfrac{1}{4} \leq \displaystyle\int_3^4 \dfrac{1}{x}\, dx \leq \dfrac{1}{3}}$

4. Verifique, sin calcular la integral, que:
   $$\frac{3}{8} \leq \int_0^3 \frac{dx}{x+5} \leq \frac{3}{5}$$

   Solución: Sea $f(x) = \dfrac{1}{x+5}$, $x \in [0, 3]$. entonces se tiene,
   $$f'(x) = -\left(\frac{1}{x+5}\right)^2 < 0, \; x \in [0, 3].$$

Así, tenemos que f es decreciente.

f es decreciente $[0,3]$. Como $f(0)=1/5, f(3)=\dfrac{1}{8}$, tenemos que

$$\frac{1}{8} \leq f(x) \leq \frac{1}{5}, \text{ para todo } x \in [0,3].$$

Luego, en virtud de la propiedad 4 concluimos que

$$\frac{1}{8}\cdot 3 \leq \int_0^3 \frac{dx}{x+5} \leq \frac{3}{5}.$$

5. Verifique que el valor promedio de la función $f(x)=x$ en $[a,b]$ es el punto medio del intervalo.

   Solución: Según el teorema del valor medio para integrales, teorema 6.3.3, el valor promedio de f en $[a,b]$ es

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

   Usando el valor de la integral, según ejemplo 1, tenemos:

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = \frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\Bigg]_a^b = \frac{1}{2}\frac{1}{b-a}(b^2-a^2) = \frac{a+b}{2} = \text{ punto medio de } [a,b].$$

6. Sea $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ una función derivable y tal que

$$\int_{-1}^0 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$$

   a) Aplique a cada integral por separado el Teorema del Valor Medio para integrales y deduzca que existen u y $v \in [-1,1]$ tal que $-1<u<0<v<1$ y $f(u)=f(v)$.

   b) Aplique el Teorema de Rolle para demostrar que existe $c\in[-1,1]$ tal que $f'(c)=0$.

   Solución:

a) Existe $u \in [-1, 0]$ tal que $\int_{-1}^{0} f(x)dx = f(u)(0 - (-1)) = f(u)$.
Existe $v \in [0, 1]$ tal que $\int_{0}^{1} f(x)dx = f(v)(1 - 0) = f(v)$.
Como $\int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx$ implica que $f(u) = f(v)$.

b) Aplicando el teorema de rolle en el intervalo $I = [u, v]$, tenemos la existencia de un número $c \in [u, v]$ tal que :

$$f'(c) = \frac{f(v) - f(u}{v - u} = 0.$$

7. Justifique por qué la integral $\int_a^b [x]\, dx$, existe a pesar que la función es discontinua. ¿Cuántas discontinuidades tiene? ¿Cuál es el valor de la integral?

Solución: La función parte entera es discontinua en los números enteros. Así, tenemos que los únicos puntos de discontinuidad de $[x]$ están localizados en los enteros contenidos en el intervalo $[a, b]$, los que constituyen una cantidad finita de discontinuidades, por lo tanto, podemoa aplicar el teorema 6.2.18.
Sean $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ los puntos de discontinuidad de f en $[a, b]$. En cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ el valor de la integral es x_i, ver ejercicio propuesto 1 de la sección 6.2. Así, el valor de la integral sobre $[a, b]$ es:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^{x_1} [x]\, dx + \int_{x_1}^{x_2} [x]\, dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} [x]\, dx + \int_{x_n}^{b} [x]\, dx \\ &= (x_1 - 1)(x_1 - a) + x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n(b - x_n).\end{aligned}$$

8. Calcular las siguientes integrales señalando claramente las propiedades usadas:
$\int_0^5 [x]dx$, $\int_{2,3}^{6,1} [x]\, dx$; $\int_{-4,7}^{3,4} [x]\, dx$.

Solución:

a) Usando la propiedad de partición del intervalo de integración y el ejercicio 7, tenemos:

$$\begin{aligned}\int_0^5 [x]dx &= \int_0^1 [x]dx + \int_1^2 [x]dx + \int_2^3 +[x]dx \int_3^4 [x]dx + \int_4^5 [x]dx \\ &= 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10.\end{aligned}$$

b) Usando la propiedad de partición del intervalo de integración y el ejercicio 7, tenemos:

$$\begin{aligned}\int_{2,3}^{6,1}[x]dx &= \int_{2,3}^{3} 2\,dx + \int_{3}^{4} 3\,dx + \int_{4}^{5} 4\,dx + \int_{5}^{6} 5\,dx + \int_{6}^{6,1} 6\,dx \\ &= 2\cdot 0,7 + 3 + 4 + 5 + 6\cdot 0,1 = 12 + 2 = 14.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-4,7}^{3,4}[x]dx =& \int_{-4,7}^{-4}(-5)\,dx + \int_{-4}^{-3} -4\,dx + \int_{-3}^{-2}(-3)\,dx + \int_{-2}^{-1}(-2)\,dx + \int_{-1}^{0}(-1)\,dx + \\ &+ \int_{0}^{1} 0\,dx + \int_{1}^{2} 1\,dx + \int_{2}^{3} 2\,dx + \int_{3}^{3,4} 3\,dx = \\ =& -5(0,7) - 4\cdot -3 - 2 - 1 + 1 + 2 + 3\cdot 0,4 \\ =& -7 - 3,5 + 1,2 = -9,3.\end{aligned}$$

9. Demuestre que dos funciones integrables que difieren en un punto tienen la misma integral sobre un mismo intervalo.
Solución: Sean f, g funciones integrables en $[a,b]$ tales que $f = g$ en $[a,b] - \{c\}$ y $f(c) \neq g(c)$.
Sea $h = f - g$, entonces
$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; x \in [a,b], x \neq c \\ h(c) \neq 0 & \end{cases}$

- h es integrable por las propiedad 1 y 2.
- Si $h(c) > 0$, calculamos la integral mediante su integral inferior y obtenemos que
$\displaystyle\int_a^b h(x)dx = 0.$
- Si $h(c) < 0$, calculamos la integral usando la integral superior y obtenemos que
$\displaystyle\int_a^b h(x)dx = 0.$
Entonces,

$$\int_a^b h(x)dx = 0 = \int_0^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = 0.$$

Por lo tanto,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Entonces por ejemplo:

$\displaystyle\int_{1,7}^{2}[x]dx = 1(2-1{,}7) = 0{,}3;$ pues en $[1{,}7\,,\,2]$ la función $[x]$ es igual a 1 excepto en $x = 2$.

10. Encuentre una fórmula general para la integral de un polinomio.

Solución: Sea $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0$ un polinomio de grado n. Por ser una función continua sobre $\mathbb{R}$, es integrable en cualquier intervalo $[a, b]$. Para calcular su integral usaremos el teorema 6.3.1 y el ejercicio resuelto **??** de esta misma sección.

$$\begin{aligned}
\int_a^b p(x)\,dx &= \int_a^b (a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0)\,dx \\
&= \int_a^b a_nx^n\,dx + \int_a^b a_{n-1}x^{n-1}\,dx + \cdots + \int_a^b a_1x\,dx + \int_a^b a_0\,dx \\
&= a_n\int_a^b x^n\,dx + a_{n-1}\int_a^b x^{n-1}\,dx + \cdots + a_1\int_a^b x\,dx + a_0\int_a^b dx \\
&= a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b + a_{n-1}\frac{x^n}{n}\Big|_a^b + \ldots + a_1\frac{x^2}{2}\Big|_a^b + a_0x\Big|_a^b \\
&= \frac{a_n}{n+1}\Big(b^{n+1} - a^{n+1}\Big) + \frac{a_{n-1}}{n1}\Big(b^n - a^n\Big) + \ldots + \frac{a_1}{2}(b^2 - a^2) + a(b-a).
\end{aligned}$$

11. Si $\overline{f}$[a,b] representa el valor promedio de f en el intervalo [a,b] y $a < c < b$, demostrar que

$$\overline{f}[a,b] = \frac{c-a}{b-a}\overline{f}[a,c] + \frac{b-c}{b-a}\overline{f}[c,b].$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\overline{f}[a,b] &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx, && \text{Definición valor promedio de una función continua}\\
&= \frac{1}{b-a}\left[\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\right], && \text{Prop.Integral de } f \text{ continua}\\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^c f(x)dx + \frac{1}{b-a}\int_c^b f(x)dx\\
&= \frac{c-a}{(c-a)(b-a)}\int_a^c f(x)dx + \frac{b-c}{(b-c)(b-a)}\int_c^b f(x)dx\\
&= \frac{c-a}{b-a}\cdot\frac{1}{c-a}\int_a^c f(x)dx + \frac{b-c}{b-a}\cdot\frac{1}{b-c}\int_c^b f(x)dx\\
&= \frac{c-a}{b-a}\overline{f}[a,c] + \frac{b-c}{b-a}\overline{f}[c,b].
\end{aligned}$$

12. Si f es continua y $\int_1^3 f(x)dx = 8$, demuestre que f alcanza el valor 4, cuando menos una vez, en el intervalo [1,3].

Solución:

Como f es continua, utilicemos el Teorema del Valor Medio:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= f(c)(b-a)\\
\int_1^3 f(x)dx &= f(c)\cdot 2\\
8 &= f(c)\cdot 2\\
\Rightarrow f(c) &= 4.
\end{aligned}$$

Esto nos indica que existe, por lo menos, un punto c en [1,3] tal que la función f en ese punto alcanza el valor 4.

Nota: Es fácil comprobar que el valor promedio de la función f es 4. Luego tenemos que:

$$\overline{f} = f(c) = 4.$$

Ejercicios propuestos

1. Analice la existencia de
$$\int_{-2}^{0}(x^2 - 3[x] + 8x^3)dx$$

2. *a*) Calcule explícitamente la función $g(x) = [x^2]$, en $[-1\,,\,1]$.
   b) Deduzca que g es integrable en $[-1\,,\,1]$.
   c) Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(x)\,dx$.

3. *a*) Calcule explícitamente la función $g(x) = [x^3]$, en $[-1\,,\,1]$.
   b) Deduzca que g es integrable en $[-1\,,\,1]$.
   c) Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(x)\,dx$.

4. *a*) Calcule explícitamente la función $g(x) = [\operatorname{sen} x]$, en $[-2\pi\,,\,2\pi]$.
   b) Deduzca que g es integrable en $[-2\pi\,,\,2\pi]$.
   c) Calcule $\displaystyle\int_{-2\pi}^{2\pi} g(x)\,dx$.

5. *a*) Calcule explícitamente la función $g(x) = [\cos x]$, en $[-2\pi\,,\,2\pi]$.
   b) Deduzca que g es integrable en $[-2\pi\,,\,2\pi]$.
   c) Calcule $\displaystyle\int_{-2\pi}^{2\pi} g(x)\,dx$.

6. *a*) Calcule explícitamente la función $g(x) =$ signo de x^2, en $[-1\,,\,1]$.
   b) Deduzca que g es integrable en $[-1\,,\,1]$.
   c) Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(x)\,dx$.

7. *a*) Calcule explícitamente la función $g(x) =$ signo de x^3, en $[-1\,,\,1]$.
   b) Deduzca que g es integrable en $[-1\,,\,1]$.
   c) Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(x)\,dx$.

8. *a*) Calcule explícitamente la función $g(x) =$ signo de $\operatorname{sen} x$, en $[-2\pi\,,\,2\pi]$.
   b) Deduzca que g es integrable en $[-2\pi\,,\,2\pi]$.

   c) Calcule $\displaystyle\int_{-2\pi}^{2\pi} g(x)\,dx$.

9. a) Calcule explícitamente la función $g(x) =$ signo de $\cos x$, en $[-2\pi\,,\,2\pi]$.
   b) Deduzca que g es integrable en $[-2\pi\,,\,2\pi]$.
   c) Calcule $\displaystyle\int_{-2\pi}^{2\pi} g(x)\,dx$.

10. Considere $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que f es continua y acotada, donde:

    - $\displaystyle\underline{\int_0^{1/2}} f(x)dx = \frac{3}{8}$
    - $\displaystyle\overline{\int_{1/4}^{1}} f(x)dx = 1$
    - $\displaystyle\overline{f}\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] = 2$

    a) Determine $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$
    b) Determine $\overline{f}[0,1]$

6.4. Teorema Fundamental de Cálculo

Como hemos visto en la sección 6.2, calcular integrales usando la definición puede ser extremadamente complicado y, a veces, imposible. El teorema que proporciona una manera de calcular integrales es el que estudiaremos en esta sección. Su fuerza radica en establecer, bajo ciertas condiciones, una relación entre la derivada y la integral.

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función integrable entonces, ella es integrable en los subintervalos $[a, x]$, para todo $x \in [a, b]$. Luego, tiene sentido la siguiente definición,

$$F(x) = \int_a^x f(s)ds.$$

F resulta ser una función con dominio $[a, b]$ y en los extremos del intervalo toma los valores: $F(a) = 0$, $F(b) = \displaystyle\int_a^b f(s)ds$. Llamaremos a F la **función integral de** f.

Teorema 6.4.1 Teorema Fundamental del Cálculo
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable y $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ la función integral de f. Si f es continua en $x_0 \in [a, b]$, entonces F es derivable en x_0 y y $F'(x_0) = f(x_0)$.

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$ y $a < x_0 < b$. Como f es continua en x_0 existe $\delta > 0$ tal que para $|x - x_0| < \delta$ se cumple $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, y para $0 < h < \delta$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{\displaystyle\int_a^{x_0+h} f(s)ds - \int_a^{x_0} f(s)ds}{h} - f(x_0)\right| \\
&= \left|\frac{\displaystyle\int_a^{x_0+h} f(s)ds + \int_{x_0}^{a} f(s)ds}{h} - f(x_0)\right| \\
&= \left|\frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f(s)ds}{h} - f(x_0)\right| = \left|\frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f(s)ds - \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)ds}{h}\right| \\
&= \left|\frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} (f(s) - f(x_0))ds}{h}\right| \leq \frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} |f(s) - f(x_0)|ds}{h} \\
&\leq \frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon\, ds}{h} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Análogamente, si $-\delta < h < 0$

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\Big| &= \frac{1}{|h|}\Big|\int_{x_0}^{x_0+h}(f(s)-f(x_0))ds\Big| \\
&= \frac{1}{|h|}\Big| -\int_{x_0+h}^{x_0}(f(s)-f(x_0))ds\Big| \\
&= \frac{1}{|h|}\Big|\int_{x_0+h}^{x_0}(f(s)-f(x_0))ds\Big| \\
&\leq \frac{\displaystyle\int_{x_0+h}^{x_0}|f(s)-f(x_0)|ds}{|h|} \\
&\leq \frac{\displaystyle\int_{x_0+h}^{x_0}\varepsilon\, ds}{|h|} = \frac{\varepsilon(-h)}{|h|} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Por lo tanto para $0 < |h| < \delta$ vale

$$\Big|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\Big| < \varepsilon$$

Esto es,

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0) = F'(x_0).$$

$\square$

Teorema 6.4.2 Regla de Barrow
Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua y $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función tal que $g'(x)=f(x)$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = g(b)-g(a)$$

Demostración: Sea $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(s)ds$. Como f es continua en $[a,b]$ entonces , usando el Teorema fundamental del Cálculo, tenemos que F es derivable en $[a,b]$ y $F'(x)=f(x)$, $x\in[a,b]$.

Por lo tanto, $F'(x)=g'(x)\ \forall\, x\in[a,b]$ y luego $F(x)=g(x)+c$.

Así, $F(a)=g(a)+c$ y como $F(a)=0$, entonces $-g(a)=c$. Concluimos que: $F(x)=g(x)-g(a)$.

Así para todo $x\in[a,b]$ se tiene $\displaystyle\int_a^x f(s)ds = \int_a^x g'(s)ds = g(x)-g(a)$. $\square$

Definición 6.4.3 Una función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $g'(x) = f(x)$, para todo $x \in [a, b]$ la llamaremos una **primitiva** de f.

Observación 6.4.4 En general una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ puede o no tener una primitiva. Pero, si f es continua entonces tiene primitiva dada por $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(s)ds$.

Ejemplo 6.4.5

1. $f(x) = x$, $g(x) = \dfrac{x^2}{2}$ es una primitiva pues $g'(x) = \dfrac{2x}{2} = x$.
2. $f(x) = x^2$, $g(x) = \dfrac{x^3}{3}$ es una primitiva pues $g'(x) = \dfrac{3x^2}{3} = x^2$.
3. $f(x) = x^n$, $g(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ es una primitiva pues $g'(x) = \dfrac{(n+1)x^{n+1}}{n+1} = x^{n+1}$.

$$\text{Así, } \int_a^b x^n dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

4. $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $g(x) = -\cos(x)$ es una primitiva pues $g'(x) = \operatorname{sen} x$.

$$\int_a^b \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x \Big|_a^b = \cos a - \cos b.$$

En particular,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \, dx = \cos(0) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

El cálculo de primitivas se verá en detalle en el capítulo 5. Una aplicación importante del Teorema Fundamental del Cálculo es la definición de la función logaritmo natural que veremos en la sección **??**.

Ejercicios resueltos

1. Calcule:

   a) $\dfrac{d}{dx} \displaystyle\int_a^b f(x)dx$

   b) $\dfrac{d}{dx} \displaystyle\int_x^b f(s)ds$

   c) $\dfrac{d}{dx} \displaystyle\int_a^x f(s)ds$.

Solución:

a) Como $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ es un número, su derivada vale 0.

b) Sea $F(x) = \displaystyle\int_x^b d(s)ds = -\int_b^x f(s)ds$. Usando el Teorema fundamental del Cálculo, tenemos:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_x^b f(s)ds = -f(x).$$

c) Sea $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(s)ds$

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) = F'(x).$$

2. Calcular $F'(x)$ si:

a) $F(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}\sqrt{1+\cos t}\ dt$

b) $F(x) = \displaystyle\int_0^x uf(u)du$; f función integrable en $\mathbb{R}$.

c) $F(x) = \displaystyle\int_0^x xf(t)dt$; f función integrable en $\mathbb{R}$.

d) $F(x) = \displaystyle\int_0^x x\sqrt{\operatorname{sen}^2(x+\cos t)}dt$

e) $F(x) = \displaystyle\int_0^1 x^3\sqrt{\operatorname{sen}^2(t+\cos t)}dt$

f) $F(x) = 10x^2 + \displaystyle\int_0^{100} \frac{\operatorname{sen} t^2}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} t)}dt$

g) $F(x) = 10x^2 + \displaystyle\int_0^{100} \frac{x\ \ \operatorname{sen} t^2}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} t)}dt$

h) $F(x) = F(1) + \displaystyle\int_1^{g(x)} f(t)dt$, donde f es continua y g derivable y $g(1) = 1$.

i) $F(x) = \sqrt{x} + \displaystyle\int_1^{x^2} \cos(t^2 \operatorname{sen} t)dt$

j) $F(x) = \displaystyle\int_0^x \left[\int_0^z f(t)dt\right] dz$; f continua;

k) $F(x) = \displaystyle\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt$; f continua; g y h derivables en $\mathbb{R}$

l) $F(x) = 400 + \displaystyle\int_1 \left(\int_{10}^{x} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t} dt \right) \operatorname{sen}(\operatorname{sen} t) dt$

Solución:

a) $F'(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{1+\cos x})$

b) $F'(x) = xf(x)$

c) $F(x) = x \cdot \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, pues x es independiente de la variable de integración t.Debemos usar la fórmula de derivada de un producto y el teorema Fundamental del Cálculo.

$$F'(x) = \int_0^x f(t)\,dt + x \cdot f(x).$$

d)

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x x \cdot \sqrt{\operatorname{sen}^2(x+\cos t)} dt = x \cdot \int_0^x |\operatorname{sen}(x + cost)| dt \\ &= x \cdot \int_0^x |\operatorname{sen} x \cos(\cos t) + \cos x \operatorname{sen}(\cos t)| dt. \end{aligned}$$

- Si $|\operatorname{sen} x \cos(\cos t) + \cos x \operatorname{sen}(\cos t)| = \operatorname{sen} x \cos(\cos t) + \cos x \operatorname{sen}(\cos t)$. Entonces:

$$\begin{aligned} F(x) &= x \cdot \int_0^x \operatorname{sen} x \cos(\cos t) dt + x \cdot \int_0^x \cos x \operatorname{sen}(\cos t) dt \\ &= x \cdot \operatorname{sen} x \cdot \int_0^x \cos(\cos t) dt + x \cdot \cos x \cdot \int_0^x \operatorname{sen}(\cos t) dt. \end{aligned}$$

  Por lo tanto,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \operatorname{sen} x \cdot \int_0^x \cos(\cos t) dt + x \cdot \cos x \int_0^x \cos(\cos t) dt \\ &\quad + x \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos(\cos x) + \cos x \int_0^x \operatorname{sen}(\cos t) dt \\ &\quad - x \operatorname{sen} x \int_0^x \operatorname{sen}(\cos t) dt + x \cos x \cdot \operatorname{sen}(\cos x) \end{aligned}$$

- Si $|\operatorname{sen} x \cos(\cos t) + \cos x \operatorname{sen}(\cos t)| = -[\operatorname{sen} x \cos(\cos t) + \cos x \operatorname{sen}(\cos t)]$. Entonces: $F'(x)$ es el inverso aditivo del valor obtenido en el caso anterior.

e) $F(x) = x^3 \int_0^1 \sqrt{\operatorname{sen}^2(t + \cos t)}dt$

$F'(x) = 3x^2 \cdot \int_0^1 \sqrt{\operatorname{sen}^2(t + \cos t)}dt$

f) $F'(x) = 20x$.

g) $F'(x) = 20x + \displaystyle\int_0^{100} \frac{\operatorname{sen} t^2}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} t)}dt$.

h) Si definimos $h(s) = \displaystyle\int_1^s f(t)dt$, entonces podemos escribir:

$$F(x) = F(1) + h(g(x)).$$

Por lo tanto,

$$F'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

i) $F(x) = \sqrt{x} + \displaystyle\int_1^{x^2} \cos(t^2 \operatorname{sen} t)dt$.

Para calcular la derivada del segundo sumando de F, usamos el ejercicio anterior.Así, obtenemos:

$$F'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + \cos(x^4 \operatorname{sen} x^2) \cdot 2x.$$

j) $F(x) = \displaystyle\int_0^x \left(\int_0^z f(t)dt\right) dz$

Si definimos $h(z) = \displaystyle\int_0^z f(t)dt$ entonces, $F(x) = \displaystyle\int_0^x h(z)dz$.

Por lo tanto,

$$F'(x) = h(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

k) $F(x) = \displaystyle\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt = \int_{g(x)}^{c} f(t)dt + \int_c^{h(x)} f(t)dt$

Sea $S(z) = \displaystyle\int_z^c f(t)dt = -\int_c^z f(t)dt$, entonces $S'(z) = -f(z)$.

Si $T(r) = \displaystyle\int_c^r f(t)dt$, entonces $T'(r) = f(r)$.

$$\begin{aligned}
F(x) &= S(g(x)) + T(h(x)) \\
F'(x) &= S'(g(x)) \cdot g'(x) + T'(h(x)) \cdot h'(x) \\
&= g'(x) \cdot (-f(g(x))) + f(h(x)) \cdot h'(x) \\
&= -g'(x) \cdot f(g(x)) + f(h(x)) \cdot h'(x).
\end{aligned}$$

l) $F(x) = 400 + \displaystyle\int_1^{\left(\int_{10}^x \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}dt\right)} \operatorname{sen}(\operatorname{sen} t)\, dt.$

Sea $h(x) = \displaystyle\int_{10}^x \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}dt$, entonces $h'(x) = \dfrac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}$.

$$F(x) = 400 + \int_1^{h(x)} \operatorname{sen}(\operatorname{sen} t)dt$$

Sea $S(z) = \displaystyle\int_1^z \operatorname{sen}(\operatorname{sen} t)dt$, entonces $S'(z) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} z)$.

Así,

$$\begin{aligned} F(x) &= 400 + S(h(x)) \\ F'(x) &= S'(h(x)) \cdot h'(x) = \\ &= \operatorname{sen}(\operatorname{sen} h(x)) \cdot \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}. \end{aligned}$$

3. Use el Teorema Fundamental del Cálculo y el Teorema de la Función Inversa para resolver los siguientes ejercicios, los que deben ser resueltos sin calcular las integrales.

   a) Dado $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}dt$;

   1) Determine el dominio de F.
   2) Justifique la existencia de F' y calcúlela.
   3) Deduzca que F es inyectiva.
   4) Justifique la existencia de F^{-1} y $(F^{-1})'$. Calcule $(F^{-1})'$ en términos de F^{-1}.

   Solución:

   1) Para que F esté bien definida la función $\dfrac{1}{t}$ debe ser al menos acotada en el intervalo de integración, por lo tanto x sólo puede tomar valores positivos. Así,
   $$D(F) =]0, +\infty[.$$
   2) Como $\dfrac{1}{t}$ es continua, el Teorema fundamental del Cálculo dice que
   $$F'(x) = \frac{1}{x}.$$

3) Como $F'(x) = \dfrac{1}{x}$, tenemos que la derivada de F es positiva en todo su dominio, por la tanto la función F es estrictamente creciente. Luego, es inyectiva.
4) El análisis hecho en los ítemes anteriores demuestran que se cumplen las hípotesis del Teorema de la Función Inversa. Entonces F^{-1} existe y es derivable. Su derivada es:

$$(F^{-1})'(x) = \frac{1}{F'(F^{-1}(x))} = \frac{1}{\dfrac{1}{(F^{-1}(x))}} = F^{-1}(x).$$

Esto nos dice que la derivada de F^{-1} es ella misma.

b) Dada $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$

1) Determine el dominio de F
2) Justifique la existencia de F' y calcúlela.
3) Deduzca que F es estrictamente creciente.
4) Justifique la existencia de F^{-1} y $(F^{-1})'$. Calcule $(F^{-1})'$ en términos de F^{-1}.

Solución:

1) Como la función $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ es continua en cualquier intervalo $[0, x]$ con $x \in \mathbb{R}$, la integral de $f(t)$ existe y F tiene como dominio $\mathbb{R}$.
2) El Teorema fundamental del Cálculo dice que F es derivable y que

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

3) Del ítem anterior podemos deducir que $F'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, la función F es estrictamente creciente, luego es inyectiva.
4) Así, ella puede ser invertida sobre su recorrido. Es decir existe F^{-1}. El Teorema de la función inversa asegura que esta inversa es derivable y que su derivada es:

$$(F^{-1})'(x) = \frac{1}{F'(F^{-1}(x))} = \frac{1}{\dfrac{1}{1+\left(F^{-1}(x)\right)^2}} = 1 + ((F^{-1})(x))^2.$$

4. Sea f una función derivable de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$, continua tal que $f(0) = 1$ y $f'(x) = f(x)$, para todo x.

a) Demuestre que:

$$\int_0^x f(t)dt = f(x) - f(0)$$

b) Demuestre que es inyectiva.

c) Demuestre que $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{x}$

d) Demuestre que $f^{-1}(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}dt$

Solución:

a) Usando la Regla de Barrow, tenemos: $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0)$.

b) $f'(x) = f(x) > 0$ para todo x, implica que f es estrictamente creciente, y por lo tanto, es inyectiva.

c) Por Teorema de la Función Inversa , existe $f^{-1}(x)$ definida sobre el recorrido de f, es derivable y su derivada es:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f(f^{-1}(x))} = \frac{1}{x}.$$

d)
$$\int_1^x \frac{1}{t}dt = \int_1^x (f^{-1})'(t)dt = (f^{-1})(x) - (f^{-1})(1) = (f^{-1})(x).$$

Hemos usado que $f(0) = 1$ lo que es equivalente a que $f^{-1}(1) = 0$.

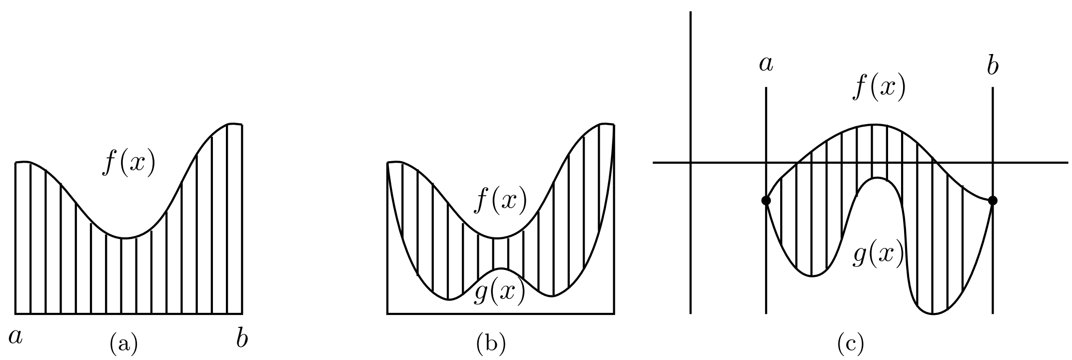
Capítulo 7

Aplicaciones de la integral

7.1. Cálculo de áreas

7.1.1. Cálculo de áreas en coordenadas rectangulares

Como hemos visto en el capítulo **??**, si $f(x) \geq 0$ entonces, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ representa el área comprendida entre el gráfico de la función, el eje de abscisas y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Supongamos que f y g son funciones no negativas tales que $g(x) \leq f(x)$ y cuyos



gráficos se cortan sólo en $(a, f(a))$ y $(b, g(b))$. En este caso el área encerrada por ambas curvas está dada por

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Si $g(x) \leq f(x)$ y las funciones son negativas en alguna parte, el área entre ambas curvas también es $A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$. En efecto sea $m = \text{ínf}\{g(x)\,;\ x \in [a, b]\}$.

Definimos las funciones h y H por

$$h(x) = f(x) + 2m \geq g(x) + 2m = H(x).$$

En esta caso el área entre h y H es igual al área entre f y g.
Por lo tanto,

$$A = \int_a^b (h(x) - H(x))dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

En síntesis, el área encerrada por los gráficos de dos funciones f y g es,

$$\boxed{A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx} \tag{7.1}$$

Ejemplo 7.1.1 Calcular el área encerrada por una circunferencia centrada en el orígen y de radio r.

Solución: La circunferencia es el conjunto de puntos $S_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x^2 + y^2 = r^2\}$. Para aplicar la fórmula 7.1, tomaremos $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ y $g(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$.

$$A = \int_{-r}^{r} (f(x) - g(x))dx = \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x^2}dx = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}dx$$

$$= 2 \cdot 2 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}dx.$$

Usando el cambio de variable: $x = r\,\mathrm{sen}(\theta)$, tenemos $dx = r\cos(\theta)d\theta$.

Entonces,

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2\,\mathrm{sen}^2(\theta)} \cdot r\cos(\theta)d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cdot \cos^2(\theta)d\theta = 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}d\theta$$

$$= 4r^2 \cdot \left(\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2\theta)}{2}d\theta \right) = r^2\pi + r^2\int_0^{\pi} \cos(v)dv = r^2\pi.$$

Por lo tanto,
$$A = \pi r^2.$$

Observación 7.1.2 Existe otra forma de calcular el área de un círculo. Usando la simetría de la curva, se puede llevar al cálculo de un cuarto de área mediante la integral $\displaystyle\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$.

Ejemplo 7.1.3 Calcular el área comprendida entre $f(x) = x^3$ y $g(x) = x$.

Solución: Para aplicar la fórmula 7.1 debemos quitar las barras para lo cual es necesario conocer el signo de la diferencia de las funciones.
Cálculo de los puntos de intersección entre las curvas.

$$\begin{aligned} x^3 = x \iff & x^3 - x = 0 \iff x(x^2-1) = 0 \iff x(x-1)(x+1) = 0 \\ \iff & x = 0,\ 1,\ -1. \end{aligned}$$

Las curvas se cortan en los puntos: $(-1,-1)$, $(0,0)\, y\, (1,1)$.
Por lo tanto, el área se calcula separando las integrales:

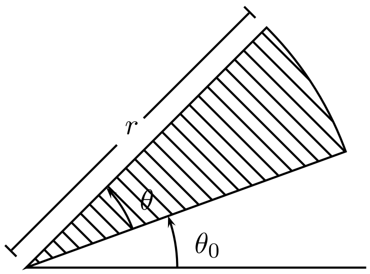
$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{0} (x^3 - x)dx + \int_0^1 (x - x^3)dx \\ &\int_{-1}^{0} (x^3 - x)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \\ &\int_0^1 (x - x^3)dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Así,
$$A = \frac{1}{2}.$$

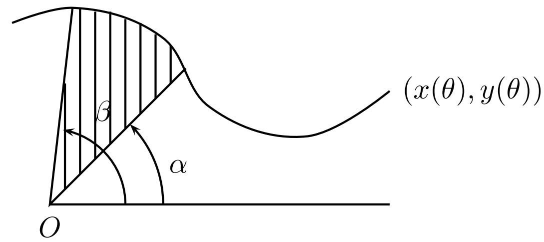
7.1.2. Cálculo de áreas en coordenadas polares

Sea $S_r(x_0, y_0)$ un círculo de centro (x_0, y_0) y radio r. Sabemos que el sector de $S_r(x_0, y_0)$ comprendido entre los ángulos $\nu = \theta_0$y $\nu = \theta_0 + \theta$ tiene área $\dfrac{1}{2}\theta r^2$.

Suponemos ahora que $r = f(\theta)$ y que $x = f(\theta)\cos\theta, \quad y = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$ es una curva en el plano (x, y) expresada en coordenadas polares. Vamos a calcular el área de esta curva comprendida en el sector determinado por los ángulos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ como podemos ver en la siguiente figura.



(d)



(e)

Con este propósito dividimos el intervalo $[\alpha, \beta]$ en subintervalos $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ de modo que :

$$\alpha = \theta_0 \leq \theta_1 \leq \cdots \leq \theta_n = \beta.$$

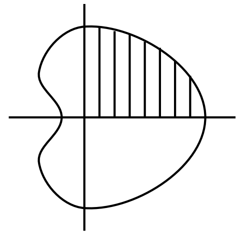
En cada subintervalo, elegimos un punto cualquiera $\xi_i \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$ y formamos la suma de Riemann que representa la suma de las áreas de los sectores circulares de ángulos θ_{i-1} y θ_i y radio $f(\xi_i)$: De acuerdo a lo señalado tenemos que la suma S de las áreas de los sectores circulares de ángulos $\theta_i - \theta_{i-1}$ y radios $f(\xi_i)$ es:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \left[f(\xi_i)\right]^2 \cdot (\theta_i - \theta_{i-1}) \, .$$

En este caso lo que hemos hecho es aproximar el área que nos interesa calcular con la de los sectores circulares de radio constante. Para obtener el área exacta debemos afinar la partición haciendo tender $n \to +\infty$. Así, obtenemos que el área está dada por la respectiva integral.

$$\boxed{\text{Área en coordenadas polares} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} (f(\theta))^2 d\theta.} \tag{7.2}$$

Ejemplo 7.1.4 Encuentre el área acotada por la curva $r = 2 + \cos\theta$ y los ángulos $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$.



Solución: De acuerdo a lo visto en el capítulo 4, sección **??**, la curva representada por la ecuación es una cardioide. El área pedida corresponde a la zona marcada en la figura.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(2+\cos\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(4+4\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta \\
&= 2\int_0^{\pi/2} d\theta + 2\int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta. \\
&= \pi + 2\operatorname{sen}\theta\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} d\theta + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\cos(2\theta)\, d\theta \\
&= \pi + 2 + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\cos(2\theta)\, d\theta.
\end{aligned}
$$

Haciendo el cambio de variable para la última integral,

$$
\begin{cases} u &= 2\theta \\ du &= 2d\theta, \end{cases}
$$

nos queda:

$$
\begin{aligned}
A &= \pi + 2 + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\cos(u)\cdot\frac{du}{2} \\
&= \frac{9}{8}\pi + 2.
\end{aligned}
$$

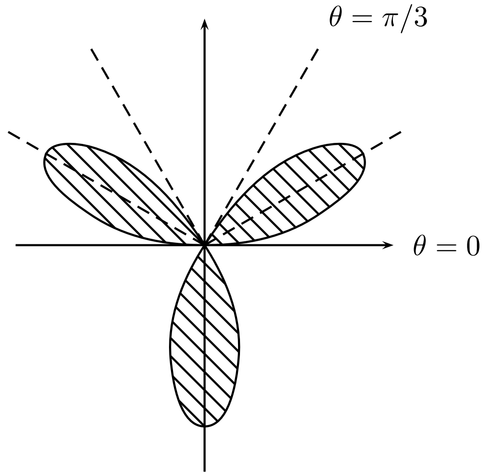
Ejemplo 7.1.5 Encuentre el área que encierra la curva $r = 2$ sen (3θ).

Solución: Como en todo cálculo de área, es importante y útil, hacer previamente el gráfico correspondiente.

$$\varphi(\theta) = 2\operatorname{sen}(3\theta).$$

Usando la aprendido en el capítulo 4 vemos que la curva es una rosa de tres pétalos. En particular, la curva es es simétrica con respecto al eje Y. en efecto,

$$\begin{aligned}\varphi(-\theta+\pi) =& 2\ \mathrm{sen}\,(-3\theta+3\pi)\\ =& 2[\ \mathrm{sen}\,(-3\theta)\cos(3\pi)+\cos(-3\theta)\ \mathrm{sen}\,(3\pi)]\\ =& 2\ \mathrm{sen}\,(-3\theta)(-1)=2\ \mathrm{sen}\,(3\theta)=\varphi(\theta).\end{aligned}$$



Sea A_0 en área encerrada por el pétalo del primer cuadrante, por lo tanto, el área solicitada es $3A_0$.

$$A_0=\int_0^{\pi/3}\frac{1}{2}(2\,\mathrm{sen}\,(3\theta))^2d\theta=2\int_0^{\pi/3}\ \mathrm{sen}^2\,(3\theta)d\theta.$$

Haciendo el cambio de variable,

$$\begin{cases}u &= 3\theta\\ du &= 3d\theta,\end{cases}$$

nos queda:

$$A_0=2\int_0^{\pi}\ \mathrm{sen}^2\,(u)\frac{du}{3}=\frac{2}{3}\int_0^{\pi}\ \mathrm{sen}^2\,(u)du.$$

Usando la fórmula del ángulo doble, obtenemos:

$$A_0=\frac{2}{3}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2u}{2}du=\frac{1}{3}\int_0^{\pi}du-\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\cos(2u)du\frac{\pi}{3}-\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\cos(2u)du.$$

Nuevamente, cambiando de variable

$$\begin{cases} v &= 2\theta \\ dv &= 2d\theta, \end{cases}$$

nos queda:

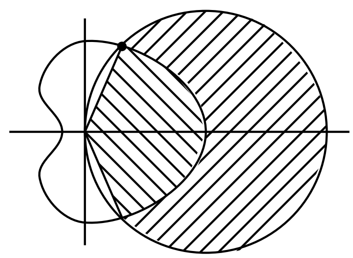
$$A_0 = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \cos v \frac{dv}{2} = \pi/3.$$

Por lo tanto,

$$A = 3A_0 = \pi.$$

Ejemplo 7.1.6 Encuentre el área en el interior del círculo $r = 5\cos\theta$ y fuera de la cardioide $r = 2 + \cos\theta$.

Solución: El área solicitada es la achurada en la siguiente figura.



Cálculo de los puntos de intersección de ambas curvas:

$$2 + \cos\theta = 5\cos\theta \iff \cos\theta = 1/2 \iff \theta = \pi/3\,, -\pi/3.$$

Ahora, calculamos el área encerrada por cada curva. Sean A_1 el área encerrada por la circunferencia y sea A_2 el área encerrada por la cardioide:

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1}{2} 25\cos^2\theta d\theta \\ A_2 &= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1}{2}(2 + \cos\theta)^2 d\theta. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el área pedida es:

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3} 25\cos^2\theta d\theta - \frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3} (2 + \cos\theta)^2 d\theta = \frac{8\pi}{3} + \sqrt{3}.$$

7.1.3. Cálculo de áreas usando ecuaciones paramétricas

Hemos visto en la sección anterior que el área de un sector de vértice O acotado por una curva C de ecuación polar $r = r(\theta)$ es $A = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} \dfrac{1}{2}(r(\theta))^2 d\theta$. Si esta curva tiene una representación paramétrica

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \ ; t \in [t_1, t_2] \end{cases}$$

entonces el área de la región queda expresada por

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (x\, y'(t) - y\, x'(t)\, dt.} \tag{7.3}$$

Para entender la fómula 7.3, recordemos que

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{y} \qquad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Así,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\left(\frac{y'x - x'y}{x^2}\right)$$

donde x' e y' representan las derivadas con respecto al parámetro t.

Ejemplo 7.1.7 La curva llamada **bifolio** está dada por la ecuación

En coordenadas rectangulares $(x^2 + y^2)^2 = 4ax^2y$

En coordenadas polares $r = a \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} 2\theta, \quad a > 0.$

Una forma paramétrica con $t = 2\theta$, es : $x(t) = a \operatorname{sen} t(1 + \cos t)\ ,\ y(t) = a \operatorname{sen}^2 t.$

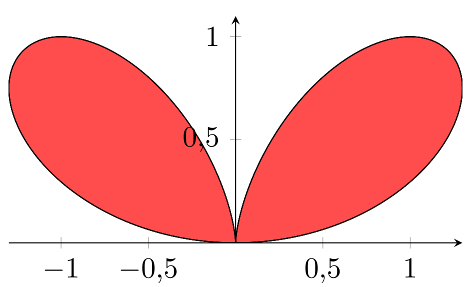


Figura 7.1: Bifolio recto, $a = 1$

Queremos calcular él área encerrada por una hoja o bucle.

$$\begin{aligned}
x'(t) =& a\cos t + a\cos 2t\\
y(t) =& 2a \operatorname{sen} t\cos t = a\operatorname{sen} 2t\\
x(t)y'(t) =& \left(a\operatorname{sen} t + \frac{a}{2}\operatorname{sen} 2t\right) a\operatorname{sen} 2t\\
=& a^2\operatorname{sen} 2t\operatorname{sen} t + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^2 2t = 2a^2\operatorname{sen}^2 t\cos t + 2a^2\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t\\
x'(t)y(t) =& a^2\operatorname{sen}^2 t\cos t + a^2\cos 2t\operatorname{sen}^2 t = a^2\operatorname{sen}^2 t\cos t + a^2(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t)\operatorname{sen}^2 t\\
=& a^2\operatorname{sen}^2 t\cos t + a^2\cos^2 t)\operatorname{sen}^2 t - a^2\operatorname{sen}^4 t
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$x(t)y'(t) - x'(t)y(t) = a^2\operatorname{sen}^2 t\cos t + a^2\operatorname{sen}^2 t$$

Así, el área encerrada por un bucle es,

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(x(t)y'(t) - x'(t)y(t))\,dt = \int_0^{\pi}(a^2\operatorname{sen}^2 t\cos t + a^2\operatorname{sen}^2 t\,dt = \frac{\pi a^2}{4}$$

Caso particular cuando y es función de x En este caso la fórmula para el área se obtiene de la fórmula en coordenadas rectangulares, en que $x = x(t)$ funciona como un cambio de variable, obteniéndose

$$\boxed{A = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt} \tag{7.4}$$

Ejemplo 7.1.8 Calcular el área bajo un arco de la curva:

$$\begin{cases} x(t) = at \\ y(t) = a(1-\cos t), \quad a \text{ positivo.}\end{cases}$$

Solución: $y(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, donde y es función de x. Un arco de la curva está comprendido entre dos ceros consecutivos de $y(t)$.

$$\begin{aligned}
y(t) = 0 \iff& a(1-\cos t) = 0 \iff 1 = \cos t\\
\iff& t = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Consideraremos el arco para $t \in [0, \pi]$.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi} y(t)\frac{dx}{dt}dt = \int_0^{\pi} a(1-\cos t)\cdot a\,dt \\ &= a^2\int_0^{\pi}(1-\cos t)\,dt = a^2(t-\operatorname{sen} t)\Big|_0^{\pi} = a^2\pi. \end{aligned}$$

Ejemplo 7.1.9 Calcular el área encerrada por la lemniscata de Gerono estudiada en el ejemplo 4.6.16 de la subsección 4.6.3.

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \operatorname{sen} 2t, \quad t \in [0, \pi]. \end{cases}$$

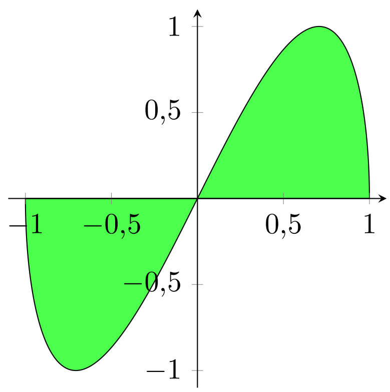


Figura 7.2: Lemniscata de Gerono

Solución: Como esta curva es simétrica con respecto a los dos ejes, basta calcular el área de un cuadrante, donde $y(x)$ es función de x.

$$\begin{aligned} A &= \int_{x=0}^{1} y(x)dx = \int_{\pi/2}^{0} y(t)\frac{dx}{dt}dt = \int_{\pi/2}^{0}\operatorname{sen} 2t\cdot(-\operatorname{sen} t)\,dt \\ &= -\int_{\pi/2}^{0} 2\operatorname{sen} t\cdot\cos t\cdot\operatorname{sen} t\,dt = \int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^2 t\cos t\,dt = 2\frac{\operatorname{sen}^3 t}{3}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Ejercicios resueltos

1. Calcule el área de un círculo, usando:

   a) Su ecuación en coordenadas rectangulares.

b) Sus ecuaciones paramétricas.

Solución:

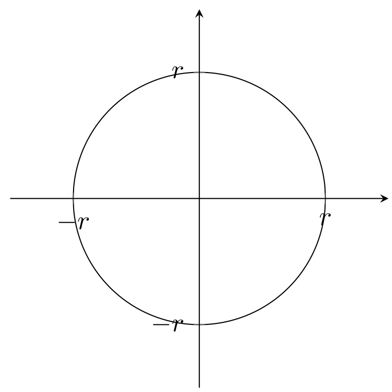


Figura 7.3: Circunferencia de radio r

a) $x^2 + y^2 = r^2$
$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2} \qquad r \leq x \leq r.$
Usando simetría tenemos:

$$\text{Area} = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}dx.$$

Esta integral se calcula usando el cambio de variable:

$$\begin{cases} x & = r \operatorname{sen}\theta \\ dx & = r\cos\theta d\theta. \end{cases}$$

Este cambio de variable implica el siguiente cambio en los límites de integración:

$$\begin{cases} x = r \iff \operatorname{sen}\theta = 1 \iff \theta = \pi/2. \\ x = -r \iff \operatorname{sen}\theta = -1 \iff \theta = -\pi/2. \end{cases}$$

Entonces nos queda:

$$\begin{aligned}
\text{Area} &= 2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}dx = 2\cdot\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-r^2\operatorname{sen}^2\theta}\, r\,\cos\theta\, d\theta \\
&= 2\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2\cos^2\theta d\theta \\
&= 2r^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta \\
&= r^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta + r^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos 2\theta\, d\theta \\
&= \pi r^2.
\end{aligned}$$

b) La ecuación de la circunferencia centrada en el origen y de radio r_0 en coordenadas polares es $r = r_0$. Por lo tanto,

$$\text{Area } = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r_0^2 d\theta = \pi r_0^2.$$

2. Calcule el área de una elipse cuyos semiejes son 2 y 3, usando:

a) Su ecuación en coordenadas rectangulares.

b) Sus ecuaciones paramétricas.

Solución:

a) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1 \iff y^2 = 9\left(1-\dfrac{x^2}{4}\right) \iff y = \pm 3\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}.$

Por lo tanto, usando la simetría de la curva,el área A pedida es

$$A = 2\int_{-2}^{2} 3\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\, dx.$$

Esta integral, como en el caso anterior, se calcula usando el cambio de variable:

$$\begin{cases} x &= 2\cos\theta \\ dx &= -2\operatorname{sen}\theta d\theta. \end{cases}$$

Este cambio de variable implica el siguiente cambio en los límites de integración:

$$\begin{cases} x = 2 \iff \cos\theta = 1 \iff \theta = 0. \\ x = -2 \iff \cos\theta = -1 \iff \theta = -\pi. \end{cases}$$

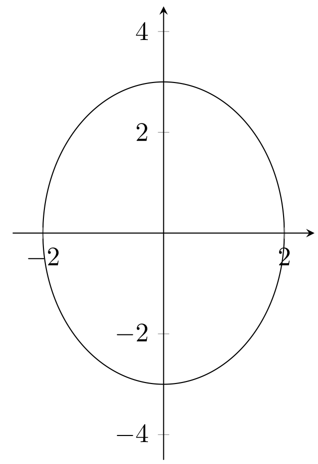


Figura 7.4: Gráfico de una elipse

Entonces nos queda:

$$
\begin{aligned}
A &= 6\int_{-\pi}^{0} \operatorname{sen}\theta(-2\operatorname{sen}\theta)d\theta = -12\int_{-\pi}^{0} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta \\
&= -12\int_{-\pi}^{0} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta = -\frac{12}{2}(\pi) = 6\pi.
\end{aligned}
$$

b) En virtud de la simetría de la curva, el área de la elipse es $4A$ donde A es el área bajo la curva en el primer cuadrante. Las ecuaciones paramétricas de la elipse son:

$$
\begin{cases}
y &= 3\operatorname{sen}\theta \\
x &= 2\cos\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}
\end{cases}
$$

Como $dx = -2\operatorname{sen}\theta\, d\theta$ el área queda expresada en la forma:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^2 y(x)\, dx = -\int_0^{\pi/2} 3\operatorname{sen}\theta(-2\operatorname{sen}\theta)d\theta \\
&= 6\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta = 6\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2\theta)\, d\theta = 6\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta \\
&= 3\Big[\theta - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

Así, el área encerrada por la elipse es $4A = 6\pi$.

3. Calcule el área comprendida entre la curva $y = e^{-|x|}$, el eje X y las rectas $x = -2$ y $x = 2$.

   Solución:

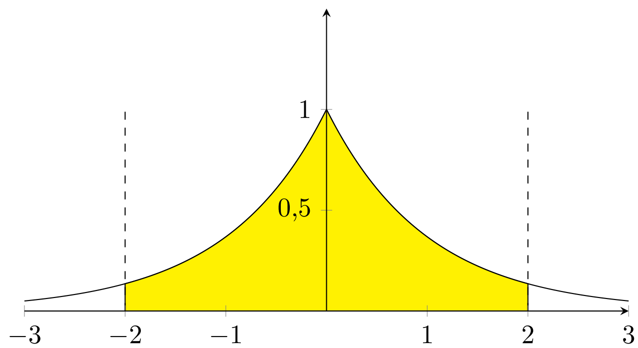


Figura 7.5: Área comprendida entre $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$, $y = e^{-|x|}$

Como $y(x) = e^{-|x|}$ es una función par, ella es simétrica con respecto al eje Y.Entonces,

$$\begin{aligned} \text{Area} &= 2 \cdot \int_0^2 e^{-x} dx = 2 \int_0^{-2} e^u(-du) \\ &= -2e^u \Big|_0^{-2} = -2(e^{-2} - 1) = 2(1 - e^{-2}). \end{aligned}$$

4. Calcule el área encerrada por la curva $y = |\operatorname{sen} x|$ y el eje X cuando $x \in [0, 4\pi]$.

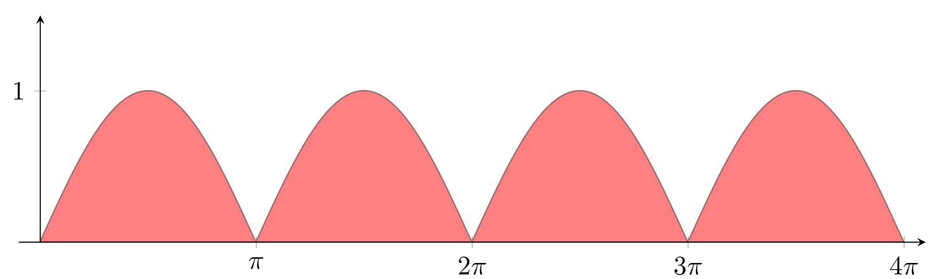


Figura 7.6: Gráfico del área comprendida entre $y = |\operatorname{sen} x|$, el eje X, con $x \in [0, 4\pi]$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\operatorname{sen} x dx + \int_{2\pi}^{3\pi} \operatorname{sen} x + \int_{3\pi}^{4\pi} (-\operatorname{sen} x) dx \\ &= 2+2+2+2 = 8. \end{aligned}$$

5. Calcule el área encerrada por las curvas:

   a) $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$ cuando $x \in [0, \pi]$.

   b) $y = \operatorname{sen} x$, $y = |\cos x|$ cuando $x \in [0, \pi]$.

Solución:

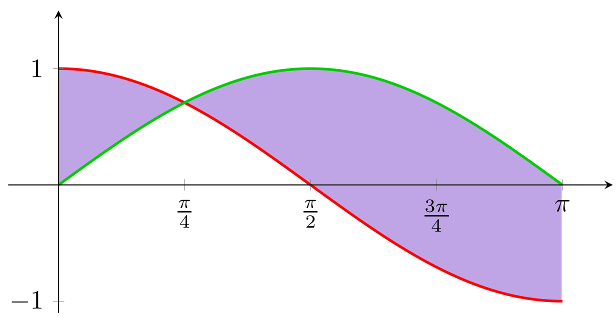


Figura 7.7: Gráfico del área comprendida entre seno y coseno entre 0 y π

a)

$$\begin{aligned} \text{Area} &= -\int_0^{\pi/4} (\operatorname{sen} x - \cos x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (\operatorname{sen} x - \cos x) dx \\ &= -(-\cos x - \operatorname{sen} x)\Big|_0^{\pi/4} + (-\cos x - \operatorname{sen} x)\Big|_{\pi/4}^{\pi} \\ &= -\left(-2\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) + \left(1 - \left(-2\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \\ &= \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} + 1 \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

b)

$$y(x) = |\cos x| = \begin{cases} \cos x, & \text{si } x \in [0, \pi/2] \\ -\cos x, & \text{si } x \in [\pi/2, \pi]. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{Area} &= 2\cdot\int_0^{\pi/4}(\cos x - \operatorname{sen} x) + 2\cdot\int_{\pi/4}^{\pi/2}(\operatorname{sen} x - \cos x)dx\\
&= 2\cdot(\operatorname{sen} x + \cos x)\Big|_0^{\pi/4} + 2\cdot(-\cos x - \operatorname{sen} x)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} =\\
&= 2\cdot\left(2\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) + 2\cdot\left(-1 - \left(-2\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\\
&= 2(\sqrt{2}-1) + 2(\sqrt{2}-1) = 4(\sqrt{2}-1).
\end{aligned}$$

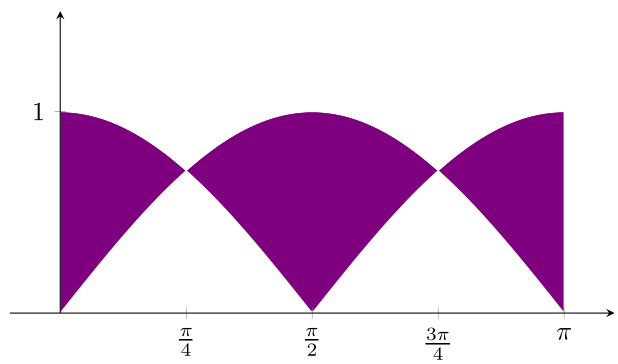


Figura 7.8: Gráfico del área comprendida entre $y = \operatorname{sen} x$ y $y = |\cos x|$, con x entre 0 y π

6. Calcule el área comprendida entre las curvas $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$, y las rectas $x = -1$ y $x = 3$.

Solución:

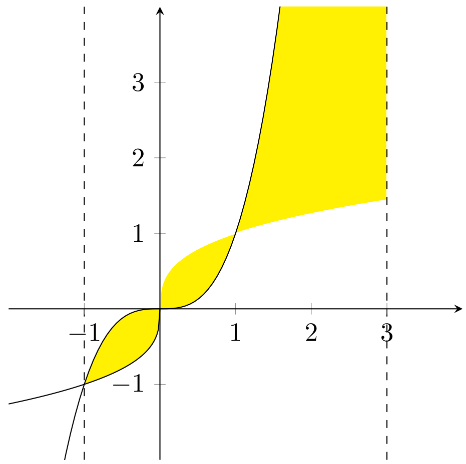


Figura 7.9: Gráfico del área comprendida entre $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$, y las rectas $x = -1$ y $x = 3$

Observemos que el área entre las curvas en $[-1, 0]$ es igual al área en $[0, 1]$. entonces el área pedida es:

$$\begin{aligned}
\text{A} &= 2\int_0^1 (\sqrt[3]{x} - x^3)dx + \int_1^3 (x^3 - \sqrt[3]{x})dx \\
&= 2 \cdot \left(\frac{3}{4}x^{4/3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3x^{4/3}}{4}\right)\Bigg|_1^3 \\
&= 2\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{81}{4} - \frac{\sqrt[3]{81}}{4}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) \\
&= \frac{3}{2} + \frac{81}{4} - \frac{\sqrt[3]{81}}{4} = \frac{87 - 3\sqrt[3]{3}}{4}.
\end{aligned}$$

7. Calcular el área encerrada entre las curvas $f(x) = x^4 + x^3 + 16x - 4$ y $g(x) = x^4 + 6x^2 + 8x + 4$. Ejercicio propuesto en el libro de G.W. Bluman, (ver bibligrafia).
Solución: Para evitar graficar los polinomios de cuarto grado, podemos trabajar con la diferencia de los polinomios $f - g$. Para calcular el área comprendida entre ambas curvas debemos conocer los puntos de intersección de ambas curvas lo que es equivalente a conocer las raices del polinomio $f - g$.

$$(f - g)(x) = x^3 - 6x^2 + 8x = x(x - 2)(x - 4).$$

$f(x) - g(x) = 0 \iff x(x-2)(x-4) = 0 \iff x = 0$ ó $x = 2$ ó $x = 4$. Por lo tanto, el area, A, encerrada entre ambas curvas es la correspondiente cuando $x \in [0,4]$. Entonces, $A = \displaystyle\int_0^4 |f(x) - g(x)|\, dx$, para lo cual es necesario conocer el signo de $f - g$.

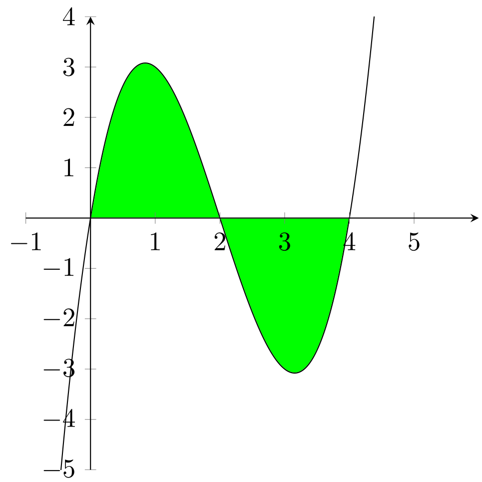


Figura 7.10: Gráfico del area encerrada entre el eje X e $y = x^3 - 6x^2 + 8x$

$$(f-g)(x) \begin{cases} \text{es positivo si} & 0 < x < 2 \\ \text{es negativo si} & 2 < x < 4. \end{cases}$$

Así, tenemos que:

$$\begin{aligned} \text{A} &= \int_0^2 (f(x) - g(x))dx + \int_2^4 (g(x) - f(x))dx. \\ \int_0^2 (f(x) - g(x)) &= \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx = \left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right)\Big|_0^2 = 4 \\ \int_2^4 (g(x) - f(x)) &= \int_2^4 (6x^2 - x^3 - 8x)dx = \left(2x^3 - \frac{x^4}{4} - 4x^2\right)\Big|_2^4 = 4 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el área pedida vale 8 unidades de área.

8. Calcule el área acotada por la curva $f(x)$, el eje X y las rectas $x = -2$ y $x = 2$,

donde:

$$f(x) = \begin{cases} |x - [x]| & \text{si } [x] \text{ es par} \\ |x - [x+1]| & \text{si } [x] \text{ es impar} \end{cases}$$

Solución:
Para graficar la función y visualizar la región cuya área queremos calcular, observemos que:

- Si $x \in [-2\,,\,-1[$, entonces $[x] = -2$,
- Si $x \in [-1\,,\,0[$, entonces $[x] = -1$,
- Si $x \in [0\,,\,1[$, entonces $[x] = 0$,
- Si $x \in [1\,,\,2[$, entonces $[x] = 1$.

Entonces,

$$f(x) = \begin{cases} |x - (-2)| = |x+2| = x+2 & \text{si } x \in [-2\,,\,-1[\\ |x - 0| = |x| = -x & \text{si } x \in [-1\,,\,0[\\ |x - 0| = |x| = x & \text{si } x \in [0\,,\,1[\\ |x - 2| = 2 - x & \text{si } x \in [1\,,\,2[. \end{cases}$$

Del gráfico vemos que el área es cuatro veces el área del triángulo rectángulo de base 1 y altura 1. Es decir,

$$\text{Área} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

9. Calcule el área de la región del plano acotada por las curvas $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

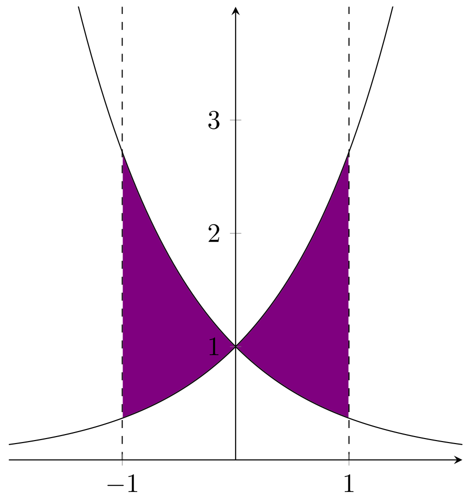


Figura 7.11: Gráfico del área acotada por por las curvas $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

$$A = \int_{-1}^{0} (e^{-x} - e^x)dx + \int_0^1 (e^x - e^{-x})dx.$$

- $\displaystyle\int_{-1}^{0} (e^{-x} - e^x)dx = -e^{-x} - e^x)\Big|_{-1}^{0} = -1 - 1 + e^{-1} + e = e + e^{-1} - 2.$
- $\displaystyle\int_0^1 (e^x - e^{-x}) = (e^x + e^{-x})\Big|_0^1 = e + e^{-1} - (1 + 1)) = e + e^{-1} - 2.$

Por lo tanto, el área pedida es : $e + e^{-1} + e + e^{-1} - 4 = 2(e + e^{-1} - 2)$.

10. Calcule el área de la región del plano acotada por las curvas $y = \cosh x$ e $y = 2$.
Solución:

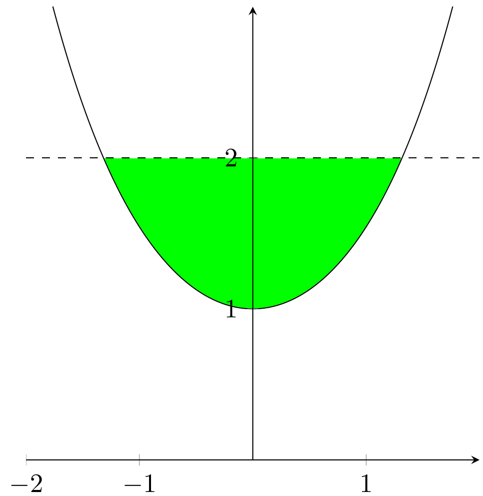


Figura 7.12: Gráfico del area entre $y = \cosh x$ e $y = 2$

Sea x_0 tal que $\cosh x_0 = 2$.

$$x_0 = \text{arccosh}\,(2) \iff 2 = \cosh x_0 \iff x_0 = \ln(2+\sqrt{3}).$$

$$\begin{aligned} \text{A} &= 2\int_0^{x_0}(2-\cosh x)dx = 2(2x - \operatorname{senh} x)\Big|_0^{x_0} \\ &= 2(2x_0 - \operatorname{senh} x_0). \end{aligned}$$

Usando la identidad fundamental de las funciones hiperbólicas:

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1,$$

tenemos que:

$$\operatorname{senh}^2 x_0 = \cosh^2 x_0 + 1 = 5.$$

Por lo tanto, el área pedida vale: $2(2\ln(2+\sqrt{5}) - \sqrt{5})$.

11. Demuestre que el área de la región acotada por la curva llamada **astroide** es $\dfrac{3}{2}\pi$.
Sus ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{aligned} x(t) &= 2\ \cos^3 t\ \ ,\ t \in [0, 2\pi]. \\ y(t) &= 2\ \operatorname{sen}^3 t\ \ ,\ t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Su ecuación en coordenadas cartesianas es $x^{2/3} + y^{2/3} = 2^{2/3}$.
Solución:

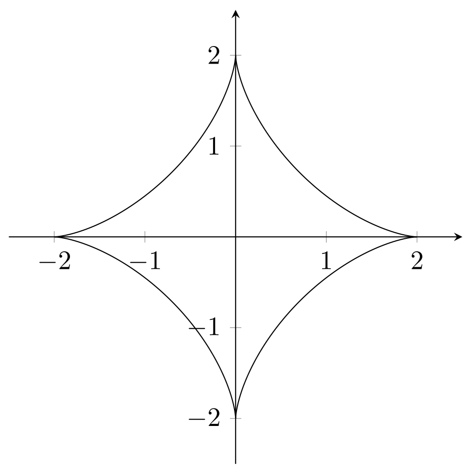


Figura 7.13: Astroide

Usando la simetría de la curva tenemos que:

$$\text{Area } = 4\int_0^2 y(x)\,dx.$$

Escribiendo la integral en términos del parámetro t, nos queda:

$$\text{Area } = 4\int_0^2 y(x(t))\frac{dx(t)}{dt}\,dt = -4\int_0^{\pi/2} 2\,\mathrm{sen}^3\,t\cdot 6\cos^2 t(-\,\mathrm{sen}\,t)dt.$$

Así,

$$\begin{aligned} \text{A} &= 48\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^4\,t\cos^2 dt = 48\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^4\,t(1-\mathrm{sen}^2\,t)\,dt \\ &= 48\left[\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^4\,tdt - \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^6\,tdt\right]. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Para calcular cada una de las integrales que nos conducirán al valor del área, usaremos las fórmulas de reducción estudiadas en el capítulo 5.

$$I_n = \int \mathrm{sen}^n\,xdx = -\frac{\mathrm{sen}^{n-1}\,x\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^6 t dt = -\frac{\operatorname{sen}^5 t \cos t}{6}\Bigg|_0^{\pi/2} + \frac{5}{6}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 t dt = \frac{5}{6}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 t dt.$$

Ahora calculamos,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 t dt = -\frac{\operatorname{sen}^3 t \cos t}{4}\Bigg|_0^{\pi/2} + \frac{3}{4}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t dt = \frac{3}{4}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t dt.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t dt &= \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos 2t \, dt \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\cos 2t)\cdot 2dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \cos v \, dv = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 t dt = \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4}.$$

Reemplazando los valores de las integrales en la ecuación 7.5 obtenemos el valos pedido:

$$\mathrm{A} = 48\Big[\frac{3\pi}{16} - \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4}\Big] = \frac{3\pi}{2}.$$

12. Encuentre $n \in \mathbb{N}$ tal que el área encerrada por las curvas x^n y $x^{1/n}$ sea igual a $\frac{1}{2}$.
Solución:
Estas curvas encierran área sólo si $x \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}\mathrm{A} &= \int_0^1 (x^{1/n} - x^n)dx = \int_0^1 x^{1/n}dx - \int_0^1 x^n dx = \\ &= \left[\frac{x^{(1/n)+1}}{(1/n)+1} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\frac{n+1}{n}} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}.\end{aligned}$$

Como queremos que el área sea igual a $\frac{1}{2}$, debemos resolver la ecuación:

$$\frac{n-1}{n+1} = \frac{1}{2},$$

lo que da el valor $n = 3$.

13. ¿Cúal es el área A_k comprendida entre la curva $y = x \operatorname{sen} x$, el eje X y las abscisas $x = k\pi$ y $x = (k+1)\pi$? $k = 0, 1, 2, \ldots\ldots$
Calcule el área A_n comprendida entre las abscisas 0 y $n\pi$. **Solución:**
Observemos que el área pedida es

$$\mathrm{A} = \int_0^{n\pi} x|\operatorname{sen} x|\, dx.$$

Como x es positiva en el intervalo de integración, basta analizar el signo de $\operatorname{sen} x$.

$$\operatorname{sen} x \begin{cases} \text{es positiva si} & x \in [2k\pi\,,\,(2k+1)\pi] \\ \text{es negativa si} & x \in [(2k+1)\pi\,,\,2k\pi]. \end{cases}$$

La integral

$$I_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x \operatorname{sen} x dx,$$

se calcula por partes y obtenemos:

$$\begin{aligned} I_k &= -x \cdot \cos x\Big|_{k\pi}^{(k+1)\pi} + \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \cos x\, dx = \\ &= -(k+1)\pi \cos(k+1)\pi + k\pi \cos k\pi + \operatorname{sen} x\Big|_{k\pi}^{(k+1)\pi} \\ &= -(k+1)\pi \left[\cos(k\pi)\cos\pi - \operatorname{sen} k\pi \operatorname{sen}\pi\right] + k\pi\cos(k\pi) = \\ &= (k+1)\pi\cos(k\pi) + k\pi\cos(k\pi) = (2k+1)\pi\cos(k\pi) \\ &= (-1)^k(2k+1)\pi. \end{aligned}$$

Ya que $\cos k\pi = (-1)^k$. Como se trata de calcular el área tenemos,

$$A_k = |I_k| = (2k+1)\pi$$

Para calcular el área comprendida entre 0 y $n\pi$ observemos que:

$$\begin{array}{lll} \text{Si} \;\; n = 1, & \text{área} & = \pi. \\ \phantom{\text{Si}} \;\; n = 2 & \text{área} & = \pi + 3\pi = 4\pi. \\ \phantom{\text{Si}} \;\; n = 3 & \text{área} & = \pi + 3\pi + 5\pi = 9\pi \\ \phantom{\text{Si}} \;\; n = 4 & \text{área} & = \pi + 3\pi + 5\pi + 7\pi = 16\pi \\ \phantom{\text{Si}} \;\; n = 5 & \text{área} & = \pi + 3\pi + 5\pi + 7\pi + 9\pi = 25\pi. \end{array}$$

Con estos cálculos podemos intuir que

$$A_n = n^2\pi.$$

Esto puede ser demostrado por inducción y se deja al estudiante.

14. Calcular el área encerrada por la curva polar $r = \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$, estudiada en la sección **??** ejemplo 4.6.19.

Solución: Sabemos que el área encerrada por una curva en coordenadas polares está determinada por:

$$A = \int_a^b \frac{1}{2} r^2 d\theta \quad ; [a, b] \quad \text{intervalo de variación de } \theta$$

En nuestro caso la curva existe en el intervalo $[0, 4\pi]$, pero debemos restar algunas áreas que se repiten:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\left\{\int_0^{4\pi} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta - \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta - \int_{\frac{7}{2}\pi}^{4\pi} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta\right\} \\
&= \frac{1}{4}\left\{\int_0^{4\pi} (1-\cos(\theta))d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(\theta))d\theta - \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} (1-\cos(\theta))d\theta - \int_{\frac{7}{2}\pi}^{4\pi} (1-\cos(\theta))d\theta\right\} \\
&= \frac{1}{4}\left\{(\theta - \operatorname{sen}(\theta))\Big|_0^{4\pi} - (\theta - \operatorname{sen}(\theta))\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - (\theta - \operatorname{sen}(\theta))\Big|_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} - (\theta - \operatorname{sen}(\theta))\Big|_{\frac{7}{2}\pi}^{4\pi}\right\} \\
&= \frac{1}{4}\left\{4\pi - \frac{\pi}{2} + 1 - \left[\left(\frac{5}{2}\pi - \operatorname{sen}\frac{5}{2}\pi\right) - \left(\frac{3}{2}\pi - \operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi\right)\right] - \left[(4\pi - 0) - \left(\frac{7}{2}\pi - \operatorname{sen}\frac{7}{2}\pi\right)\right]\right\} \\
&= \frac{1}{4}\left\{4\pi - \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{5}{2}\pi + \operatorname{sen}\frac{5}{2}\pi + \frac{3}{2}\pi - \operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi - 4\pi + \frac{7}{2}\pi - \operatorname{sen}\frac{7}{2}\pi\right\} \\
&= \frac{1}{4}\{2\pi + 1 + 1 + 1 + 1\} = \frac{1}{4}\{2\pi + 4\} = \frac{\pi}{2} + 1
\end{aligned}$$

Ejercicios propuestos

1. Calcular el área encerrada por la curva $y = \operatorname{sen} x$ y el eje X si $x \in [0, 2\pi]$. R: 4 unidades de área.

2. Demuestre que el área de la región encerrada por las curvas $y = x^n$ e $y = x^m$, $n, m \in \mathbb{N}$ es $\dfrac{n-m}{(m+1)(n+1)}$ unidades de área, si $n > m$.

de un sector circular Calcular usando integral, el área del sector circular de radio r y ángulo ta. circunferencia de rad

3. Demuestre que el área de la región encerrada por un arco de la **cicloide** y el eje X es $3\pi a^2$ unidades de área. Las ecuaciones paramétricas de esta curva son :

$$\begin{cases} x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

donde a es una constante positiva y $\theta \in \mathbb{R}$.

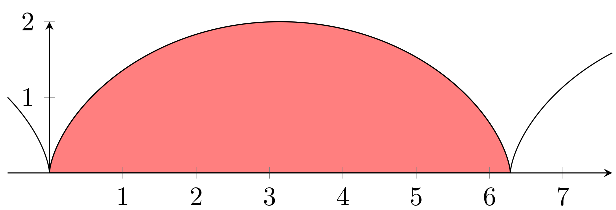


Figura 7.14: Cicloide, $a = 1$

4. Verifique que el área encerrada por la curva llamada **deltoide** es $2\pi b^2$ unidades de área. Las ecuaciones paramétricas de la curva son:

$$x(t) = b(2\cos t + \cos 2t)$$
$$y(t) = b(2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t), \quad b > 0.$$

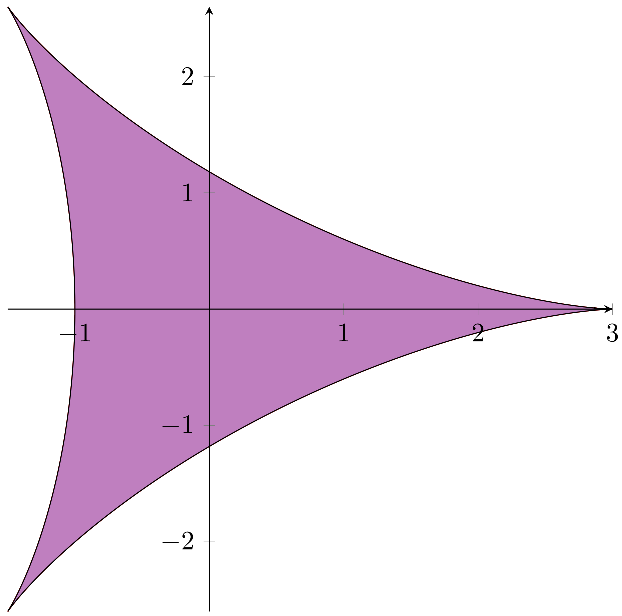


Figura 7.15: Deltoide

5. Las cuatro ecuaciones siguientes representan variantes de una cardioide:

$$r = 2a(1 \pm \cos\theta)$$
$$r = 2a(1 \pm \operatorname{sen}\theta), \quad a > 0.$$

   Elija una de las ecuaciones y verifique que el área encerrada por la curva es $6\pi a^2$ unidades de área.

6. Calcule el área de la región comprendida entre las dos cardioides: $r = 2a(1 + \cos\theta)$ y $r = 2a(1 - \cos\theta)$
.

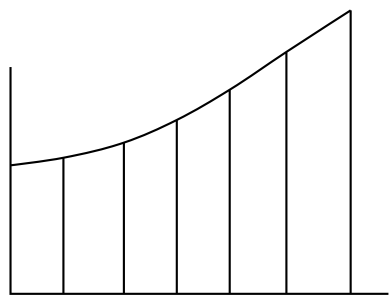
7.2. Cálculo de longitudes de curvas

7.2.1. Cálculo de longitudes de curvas en coordenadas rectangulares

Nuestro objetivo es ahora calcular la longitud del gráfico de la curva f entre a y b.

Supongamos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función con derivada continua.
Consideremos pa partición del intervalo $[a,b]$:

$$\{a, a+\frac{b-a}{n}, a+2\frac{b-a}{n}, \ldots, a+(n-1)\frac{b-a}{n}, b\}.$$



Si denotamos por L_i la longitud de la poligonal entre $[t_{i-1}, f(t_{i-1})]$ y $[t_i, f(t_i)]$ con $i = 1, 2, \ldots, n$, tenemos

$$L_i = \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2}.$$

El teorema del valor medio asegura la existencia de un número $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$, tal que:

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(c_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Así,

$$L_i = |t_i - t_{i-1}|\sqrt{1 + (f'(c_i))^2}.$$

Por lo tanto, la longitud de la poligonal es

$$\sum_{i=1}^{n} |t_i - t_{i+1}|\sqrt{1 + (f'(c_i))^2}. \tag{7.6}$$

Como f tiene derivada continua, entonces la función $g(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ definida sobre $[a,b]$ y con valores en $\mathbb{R}$ es continua y por lo tanto integrable. La ecuación 7.6 es una suma de Riemann de g, así cuando $n \to +\infty$, dichas sumas convergen hacia la integral de g.

$$\int_a^b g(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |t_i - t_{i+1}| g(c_i).$$

En consecuencia, la longitud de la curva f entre $x = a$ y $x = b$ es:

$$L_f = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Esta última fórmula representa la manera de calcular la longitud de un gráfico de una función.

Ejemplo 7.2.1 Calcularemos la longitud de un círculo centrado en el origen y de radio r.
Sea $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2},\ -r \leq x \leq r$

$$L_f = \int_{-r}^{r} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Por lo tanto,

$$L_f = \int_{-r}^{r} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}dx = \int_{-r}^{r} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}dx = r\int_{-r}^{r} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Si consideramos el cambio de variable $rv = x$, entonces $rdv = dx$, lo que implica

$$\int_{-r}^{r} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = r^2\int_{-1}^{1} \frac{dv}{r} \cdot \frac{1}{r\sqrt{1 - v^2}} = r\int_{-1}^{1} \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Haciendo nuevamente un cambio de variable:

$$\begin{cases} v = \operatorname{sen}\theta \\ dv = \cos\theta\, d\theta, \end{cases}$$

la integral se reduce a :

$$r\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = r\Big(\frac{\pi}{2} - \Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\Big) = r\pi.$$

Por lo tanto,

$$L_f = r \cdot \int_{-r}^{r} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = r\pi$$

Ya que el círculo tiene dos veces esta longitud se cumple que

$$\text{Longitud del círculo} = 2\pi r.$$

7.2.2. Cálculo de longitudes de curvas dadas por ecuaciones paramétricas

En esta sección vamos a calcular longitudes de arco de curvas expresadas mediante ecuaciones paramétricas. Para ello se recomienda al estudiante recordar lo visto en la subseccion **??** del capítulo 4 para graficar este tipo de curvas. Consideremos la curva parametrizada:

$$\begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = g(t). \end{cases}$$

De lo visto en la sección anterior, sabemos que la longitud de la curva $y = h(x)$ en $[a, b]$ está dada por:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (h'(x))^2}\, dx,$$

donde $a = f(t_0)$ y $b = f(t_1)$. Como $h'(x) = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}$ entonces,

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{1 + (h'(x))^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)^2} dx \\ &= \int_a^b \frac{dt}{dx} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dx = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt. \end{aligned}$$

Donde,

$$\begin{cases} x(t_0) = a \\ x(t_1) = b. \end{cases}$$

Ejemplo 7.2.2 Calcular la longitud de arco de la curva

$$\begin{cases} x = t^3 + 1 \\ y = 2t^{9/2} - 4, \quad 1 \le t \le 3 \end{cases}$$

Solución: Tenemos $x' = 3t^2 \quad , y' = 9t^{7/2}$. Luego,

$$L = \int_1^3 \sqrt{9t^4 + 81t^7}dt = 3\int_1^3 t^2\sqrt{1+9t^3}dt$$

Usando el cambio de variable :

$$u = 1 + 9t^3,\ du = 27t^2dt,$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{9}\int_1^3 27t^2\sqrt{1+9t^3}dt = \frac{1}{9}\int_{10}^{244}\sqrt{u}du \\ &= \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{3/2}\Big|_{10}^{244} = \frac{2}{27}\left(1+9t^3\right)^{3/2}\Big|_1^3 = \\ &= \frac{2}{27}\left((244)^{3/2} - 10^{3/2}\right). \end{aligned}$$

Ejemplo 7.2.3 Encuentre la longitud del arco de la cicloide:

$$\begin{cases} x = a(\theta - \text{ sen } \theta) \\ y = a(1-\cos\theta). \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}d\theta \\ &= a\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \text{ sen}^2\theta} = a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-2\cos\theta+1}d\theta = \\ &= a\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos\theta}d\theta = \sqrt{2}a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos\theta}d\theta. \end{aligned}$$

Para calcular esta integral usaremos la fórmula trigonométrica

$$\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \iff \sqrt{2}\ \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{1-\cos\theta}.$$

Usando el cambio de variable: $u = \dfrac{\theta}{2}$, entonces $du = \dfrac{d\theta}{2}$,es decir, $2du = d\theta$. Entonces nos queda:

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{2}a\cdot\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\text{sen}\frac{\theta}{2}d\theta = 2a\cdot\int_0^{\pi}\text{sen}\,u\cdot 2\,du \\ &= 4a(-\cos u)\Big|_0^{\pi} = 8a. \end{aligned}$$

7.2.3. Cálculo de longitudes de curvas en coordenadas polares

Vamos ahora a obtener una fórmula explícita para la longitud de una curva en coordenadas polares.

Como ya sabemos

$$\begin{cases} x(\theta) = r\cos\theta \\ y(\theta) = r \text{ sen } \theta. \end{cases}$$

Si $r = f(\theta)$ entonces:

$$x(\theta) = f(\theta)\cos\theta \quad , \frac{dx}{d\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\operatorname{sen}\theta$$

$$y(\theta) = f(\theta)\operatorname{sen}\theta \quad , \frac{dy}{d\theta} = f'(\theta)\operatorname{sen}\theta + f(\theta)\cos\theta$$

y, entonces

$$\begin{aligned} s &= \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta = \\ &= \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{(f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\operatorname{sen}\theta)^2 + (f'(\theta)\text{sen } \theta - f(\theta)\cos,\theta)^2} d\theta = \\ s &= \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{(f'(\theta)^2) + (f(\theta))^2} d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta \end{aligned}$$

que es la expresión buscada.

Ejemplo 7.2.4 Encuentre la longitud de arco de la curva: $r = 3e^{2\theta}, \theta \in [0, \pi/6]$ en el plano (x, y).

Solución:

$$s = \int_0^{\pi/6} \sqrt{9e^{4\theta} + 36e^{4\theta}} d\theta = \int_0^{\pi/6} \sqrt{45e^{4\theta}} d\theta$$

$$= 3\sqrt{5}\int_0^{\pi/6} e^{2\theta} d\theta = \left(\frac{3}{2}\sqrt{5}e^{2\theta}\right)_0^{\pi/6} =$$

$$s = \frac{3}{2}\sqrt{5}\left(e^{\pi/3} - 1\right)$$

Ejercicios resueltos

1. Calcule la longitud de un círculo, usando:

   a) Su ecuación en coordenadas rectangulares.

   b) Sus ecuaciones paramétricas.

Solución:

a) $x^2 + y^2 = r^2 \iff y^2 = r^2 - x^2 \iff y(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$; $-r \leq x \leq r$. Usando la simetría de la curva: $L = 2 \cdot \int_{-r}^{r} \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$; con $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ Lo cuál implica que: $f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ Por lo tanto: $L = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{1 + \dfrac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = 2 \cdot \int_{-r}^{r} \dfrac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx$
Usando la sustitución,$x = r\operatorname{sen}\theta,\ dx = r\cos\theta d\theta$

$$L = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r \cdot r\cos\theta d\theta}{\sqrt{r^2 - r^2\operatorname{sen}^2\theta}} = 2r\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = 2r\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\pi r$$

b) Las ecuaciones paramétricas del círculo son:

$$\left\{x(t) = r\cos t, y(t) = r\operatorname{sen} t, t \in [0, 2\pi]\right.$$

Así, $L = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt =$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\operatorname{sen} t)^2 + (r\cos t)^2} dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

2. Calcule la longitud de las siguientes curvas en un intervalo cualquiera $[0, x]$.

   a) La catenaria: $y = \cosh x$

   b) La parábola: $y = x^2$

   c) La parábola semicúbica: $y = x^{3/2}$

Solución:

a)

$$L = \int_0^x \sqrt{1+(y'(x))^2}dx = \int_0^x \sqrt{1+\operatorname{senh}^2 x} =$$
$$= \int_0^x \cosh x dx = \operatorname{senh} x\Big|_0^x = \operatorname{senh} x$$

b) $L = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1+(y')^2}du = \int_0^x \sqrt{1+4u^2}dv$
Sea $2u = \operatorname{senh} v \rightarrow 1+4v^2 = 1+\operatorname{senh}^2 v = \cosh^2 v$
$2du = \cosh v dv$

$$\int_0^x \sqrt{1+4v^2}dv = \int_0^{\text{arcsenh }(2x)} (\cosh v)\cdot\frac{\cosh v}{2}dv =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\text{arcsenh }(2x)} \cosh^2(v)dv = I$$

Como $\cosh(2v) = \cosh^2 v + \operatorname{senh}^2 v =$

$$\begin{aligned} &= \cosh^2 v + \cosh^2 v - 1 = 2\cosh^2 v - 1 \\ &\Rightarrow \frac{\cosh(2v)+1}{2} = (\cosh v)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_0^{\text{arcsenh }(2x)} \frac{1+\cosh(2v)}{2}dv = \\ &= \frac{1}{4}\text{arcsenh }(2x) + \frac{1}{4}\int_0^{\text{arcsenh }(2x)} \cosh(2v)dv \\ I &= \frac{1}{4}\text{arcsenh }(2x) + \frac{1}{8}\operatorname{senh}(2\cdot\text{arcsenh }(2x)) \end{aligned}$$

c) Si $y = x^{3/2}$, entonces $y' = \dfrac{3}{2}x^{1/2}$.Luego:

$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\frac{9}{4}x}$$

Por lo tanto,

$$L = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{9}{4}u}du$$

$$\text{Sea } v = 1 + \frac{9}{4}u$$
$$\text{Entonces } dv = \frac{9}{4}du$$

Luego,

$$\begin{aligned}
&= \int_1^{1+\frac{9}{4}x} \sqrt{v} \cdot \frac{4}{9}dv \\
&= \frac{4}{9}\int_1^{1+\frac{9}{4}x} \sqrt{v}dv \\
&= \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}v^{3/2}\bigg|_1^{1+\frac{9}{4}x} \\
&= \frac{8}{27} \cdot \left[\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2} - 1\right]
\end{aligned}$$

3. Calcule la longitud de la curva dada por:

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{-t}\cos t \\
y(t) &= e^{-t}\operatorname{sen} t \ \ , \ t \in [0, \pi/2].
\end{aligned}$$

Solución:
$x'(t) = -e^{-t}\cos t - e^{-t}\operatorname{sen} t$
$y'(t) = -e^{-t}\operatorname{sen} t + e^{-t}\cos t$

$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = e^{-2t}\cos^2 t + 2e^{-2t}\cos t \operatorname{sen} t + e^{-2t}\operatorname{sen}^2 t + e^{-2t}\operatorname{sen}^2 t - 2e^{-2t}\operatorname{sen} t\cos t +$

$e^{-2t}\cos^2 t = 2e^{-2t}$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt &= \int_0^{\pi/2}\sqrt{2e^{-2t}}dt = \\
&= \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} e^{-t}dt \qquad u=-t, du=-dt \\
&= \sqrt{2}\int_0^{-\pi/2} e^{u}(-du) = -\sqrt{2}\int_0^{-\pi/2} e^{u}dv = -\sqrt{2}e^{u}\Big|_0^{-\pi/2} = \\
&= -\sqrt{2}[e^{-\pi/2}-1] = \sqrt{2}[1-e^{-\pi/2}]
\end{aligned}$$

4. Demuestre que la longitud de la curva llamada **astroide** es 12. Sus ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{aligned}
x(t) &= 2\,\cos^3 t \\
y(t) &= 2\,\operatorname{sen}^3 t \ \ ,\ t\in[0,2\pi].
\end{aligned}$$

Su ecuación en coordenadas cartesianas es $x^{2/3}+y^{2/3}=2^{2/3}$.

Solución: $L=\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$

$$\begin{aligned}
x'(t) &= -6\cos^2 t\operatorname{sen} t \Rightarrow (x'(t))^2 = 36\cos^4 t\operatorname{sen}^2 t \\
y'(t) &= 6\operatorname{sen}^2 t\cos t \Rightarrow (y'(t))^2 = 36\operatorname{sen}^4 t\cos^2 t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x')^2+(y')^2} &= \sqrt{36\cos^4 t\operatorname{sen}^2 t + 36\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t} = \\
&= 6\sqrt{\cos^2 t\operatorname{sen}^2 t(\cos^2+\operatorname{sen}^2 t)} = 6\cdot\sqrt{\cos^2 t\operatorname{sen}^2 t} \\
&= 6|\cos t\operatorname{sen} t|
\end{aligned}$$

Sea $h(t)=\cos t\operatorname{sen} t$.

Esta función es ≥ 0 si $t\in[0,\pi/2], \leq 0$ si $t\in[\pi/2,\pi]$, ≥ 0 si $t\in\left[\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ y ≤ 0 si $t\in\left[\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]$

Así, $L = \displaystyle\int_0^{2\pi} 6|\operatorname{sen} t \cos t|dt = 6 \cdot \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} t \cos t dt - 6 \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen} t \cos t dt +$
$6 \displaystyle\int_{\pi}^{3\pi/2} \operatorname{sen} t \cos t dt - 6 \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \operatorname{sen} t \cos t dt$

Si $u = \operatorname{sen} t,\ du = \cos t dt$

$$\begin{aligned}
\text{Por lo tanto, } L &= 6 \cdot \int_0^1 u du - 6 \cdot \int_1^0 u du + 6 \int_0^{-1} u du - 6 \int_{-1}^0 u du \\
&= 6 \cdot \int_0^1 u du + 6 \int_0^1 u du - 6 \int_1^0 u du - 6 \int_{-1}^0 u du = \\
&= 12 \cdot \int_0^1 u du - 12 \int_{-1}^0 u du = 12 \cdot \left.\frac{u^2}{2}\right|_0^1 - 12 \cdot \left.\frac{u^2}{2}\right|_1^0 = \\
&= 12 \cdot \frac{1}{2} - 12 \cdot \left(0 - \frac{1}{2}\right) = 6 + 6 = 12.
\end{aligned}$$

5. Demuestre que la longitud de la curva llamada **cardioide** es $16a$. Sus ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{aligned}
x(t) &= 2a \cos t(1 + \cos t) \\
y(t) &= 2a \operatorname{sen} t(1 + \cos t) \ \ ,\ t \in [0, 2\pi].
\end{aligned}$$

Su ecuación en coordenadas cartesianas es $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$.

Solución:
$$\begin{aligned}
x'(t) &= -2a \operatorname{sen} t - 4a \operatorname{sen} t \cos t = -2a \operatorname{sen} t - 2a \operatorname{sen}(2t) \\
y'(t) &= 2a \cos t + 2a \cos^2 t - 2a \operatorname{sen}^2 t = 2a \cos t + 2a \cos(2t)
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
(x'(t))^2 + (y'(t))^2 &= 4a^2 \operatorname{sen}^2 t + 8a^2 \operatorname{sen} t \operatorname{sen}(2t) \\
&+ 4a^2 \operatorname{sen}^2(2t) + 4a^2 \cos^2 t + 8a^2 \cos t \cos^2(2t) + 4a^2 \cos^2(2t) \\
(x'(t))^2 + (y'(t))^2 &= 4a^2 + 8a^2(\cos t \cos 2t + \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 2t) + 4a^2 \\
&= 8a^2 + 8a^2 \cos(t) \\
&= 8a^2(1 + \cos t) \\
&= 8a^2 \cdot 2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right).
\end{aligned}$$

$$\text{Así, } L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{16a^2\cos^2(t/2)} = \int_0^{2\pi} 4a|\cos(t/2)|dt =$$

$$\begin{aligned}
&= 4a\int_0^{\pi}\cos(t/2)dt - 4a\int_{\pi}^{2\pi}\cos(t/2)dt\\
2v &= t \Rightarrow 2dv = dt\\
L &= 4a\int_0^{\pi/2}\cos v\cdot 2dv - 4a\int_{\pi/2}^{\pi}\cos(v)\cdot 2dv\\
L &= 8a\,\mathrm{sen}\,v\Big|_0^{\pi/2} - 8a\,\mathrm{sen}\,v\Big|_{\pi/2}^{\pi}\\
&= 16a.
\end{aligned}$$

6. Verificar que el cálculo de la longitud de la curva $r = \mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$, da origen a una integral elíptica.

Solución: Del estudio de esta curva hecho en la seccion **??**, ejemplo 4.6.19 tenemos que:

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{1}{2}\mathrm{sen}(\theta)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos(\theta)$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos(\theta) - \mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= \left[\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta - \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\right]^2 + \left[\frac{1}{2}\mathrm{sen}\,\theta\cos\frac{\theta}{2} + \mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\cos\theta\right]^2\\
&= \frac{1}{4}\cos^2\frac{\theta}{2}\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta\,\mathrm{sen}^2\,\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2} +\\
&\quad \frac{1}{4}\mathrm{sen}^2\,\theta\cos^2\frac{\theta}{2} + \mathrm{sen}^2\,\frac{\theta}{2}\cos^2\theta + \mathrm{sen}\,\theta\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\cos\theta\\
&= \frac{1}{4}\cos^2\frac{\theta}{2}\left[\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta\right] + \mathrm{sen}^2\,\frac{\theta}{2}\left[\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta\right]\\
&= \frac{1}{4}\cos^2\frac{\theta}{2} + \mathrm{sen}^2\,\frac{\theta}{2}
\end{aligned}$$

Luego la longitud L de la curva es:

$$L = \int_0^{4\pi} \sqrt{\frac{1}{4}\cos^2\frac{\theta}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta \approx 9,688448224 \quad \textit{unidades} \tag{7.7}$$

Nota: La integral L es una integral elíptica, para resolverla se utilizó un método numérico.

7.3. Volúmenes y áreas de superficies de sólidos de revolución

Definición 7.3.1 Llamaremos **sólido de revolución** a la figura que se obtiene al girar una región plana (dos dimensiones) en torno a un eje de rotación que está fijo.

Ejemplo 7.3.2 Los sólidos de revolución más simples son:

1. El **cilindro circular recto**, que se obtiene al girar un rectángulo en torno a uno de sus lados que se mantiene inmóvil.

2. El **cono circular recto**, que se obtiene al girar un triángulo sobre uno de sus lados.

3. La **esfera** se genera al girar una circunferencia en torno a su diámetro.

4. El **toro** se genera cuando un círculo rota en torno a un eje externo a él.

Nuestro objetivo es calcular los volúmenes de sólidos de revolución que se generan al girar una región cualquiera del plano XY en torno a un eje de rotación.

7.3.1. Método de los discos

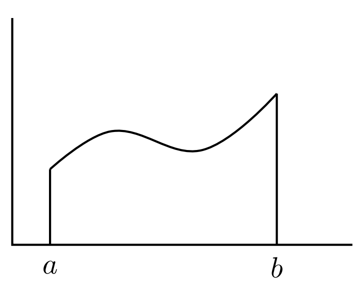
Teorema 7.3.3 Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva. Entonces el volumen del sólido que se obtiene al girar la región R:

$$R = \{(x, y) : x \in [a, b]\,,\, 0 \leq y \leq f(x)\ \}$$

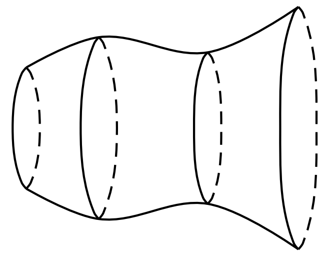
en torno al eje X está dado por la fórmula:

$$V = \pi \int_a^b \Big[f(x)\Big]^2\, dx.$$

Demostración:



Si hacemos rotar el gráfico de f en torno al eje x obtenemos una superficie en el espacio tridimensional, $S_f \subset \mathbb{R}^3$.



Vamos a calcular el volumen de esta superficie S_f.

Sea $t_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$ con $i = 0, 1, \ldots, n$. En $[t_{i-1}, t_i]$ consideremos un punto c_i y entonces el rectángulo de base $t_i - t_{i-1}$ y altura $f(c_i)$. Al rotar este rectángulo alrededor del eje x, tenemos un cilindro de volumen $\pi(f(c_i))^2(t_i - t_{i-1})$ y entonces $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \pi(f(c_i))^2(t_i - t_{i-1})$ es una aproximación del volumen de S_f. En general si $g(x) = \pi(f(x))^2$, entonces denotando por $\mathcal{P}_n$ la partición $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ tenemos

$$I(\mathcal{P}_n, g) \leq \sum_{i=1}^{n} \pi(f(c_i))^2(t_i - t_{i-1}) \leq S(\mathcal{P}_n, g)$$

así que si $n \to \infty$,

$$V(S_f) = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

$\square$

Observación 7.3.4 Este método se puede usar, también, para calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar una curva, definida por la función $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, alrededor de una recta $y = y_0$. La única condición es que la recta y la curva no se intersecten. En este caso el volumen requerido es

$$V(S_f) = \pi \int_a^b (y_0 - f(x))^2 dx.$$

7.3.2. Método de las cortezas o cilindros

Ahora calcularemos el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar una curva alrededor del eje Y.

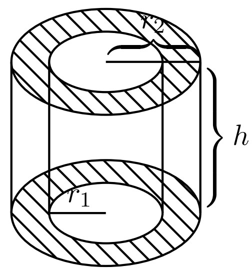
Teorema 7.3.5 Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva. Entonces el volumen del sólido que se obtiene al girar la región R:

$$R = \{(x, y) : x \in [a, b]\,,\ 0 \leq y \leq f(x)\ \}$$

en torno al eje Y está dado por la fórmula:

$$V(S_f) = 2\pi \int_a^b x\, f(x)\, dx.$$

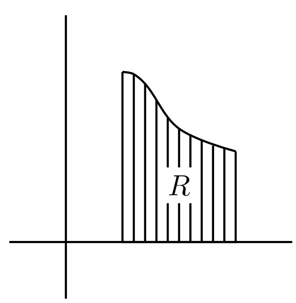
Demostración: Para calcular este volumen , el sólido obtenido se divide en cortes cilíndricos que de alguna manera se asemejan a cortezas de árboles, que es de donde viene el nombre del método. Un corte cilíndrico es el sólido que se forma entre dos cilindros concéntricos. Calculemos el volumen de un corte cilíndrico formado por dos cilindros de radios r_1 y r_2 , como se muestra en la siguiente figura:



Tenemos:

$$\begin{aligned}
V &= \pi h r_2^2 - \pi h r_1^2 = \pi h (r_2^2 - r_1^2) \\
&= 2\pi h \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)(r_2 - r_1) \quad \text{ó si} \\
\overline{r} &= \frac{r_1 + r_2}{2},\ \Delta r = r_2 - r_1 \\
V &= 2\pi h \overline{r} \Delta r.
\end{aligned}$$

Notamos que $2\pi\overline{r}$ es el perímetro de la circunferencia de radio $\overline{r}$ y Δr es el ancho del corte. El número h representa la altura de los cilindros.



Sea $P = \{a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b\}$ una partición de $[a, b]$. En cada $[x_{i-1}, x_i]$ sean ξ_i, η_i los puntos que satisfacen $f(\xi_i) \leq f(x) \leq f(\eta_i)$ para cada $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

Ahora, formamos dos cortes cilindrícos de radios iguales x_i y x_{i+1} con alturas $f(\xi_i)$ y $f(\eta_i)$. Aplicando la fórmula anterior a cada corte cilíndrico, tenemos los volúmenes $V(t_i)$ y $V(T_i)$ dados por:

$$V(t_i) = 2\pi f(\xi_i) \cdot \frac{x_i + x_{i-1}}{2} \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$V(T_i) = 2\pi f(\eta_i) \cdot \frac{x_i + x_{i-1}}{2} \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Por lo tanto, una aproximación del volumen del sólido de revolución es:

$$\sum_{i=0}^{n-1} V(t_i) \leq V(S_f) \leq \sum_{i=0}^{n-1} V(T_i)$$

y la igualdad se verifica en el límite, siempre que la norma de la partición tienda a cero con $n \to \infty$. Luego

$$V(S_f) = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx.$$

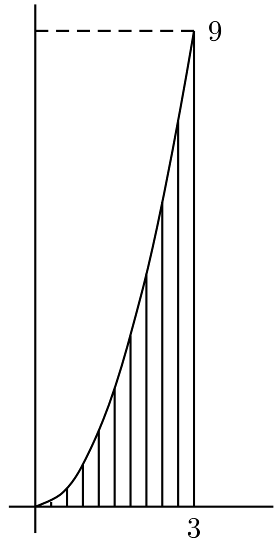
$\square$

Observación 7.3.6 Cuando la región está acotada por las rectas $y = c$, $y = d$, $x = g(y)$ y $x = 0$, con $g(y) \geq 0$ y el sólido de revolución es el obtenido al rotar esta región alrededor del eje X, entonces el respectivo volumen es,

$$V(S_f) = 2\pi \int_c^d y g(y) dy.$$

Ejemplo 7.3.7 1. La región R está acotada por $y = x^2, y = 0, x = 3$y se rota alrededor del eje Y. Encuentre el volumen del sólido generado.

Solución:



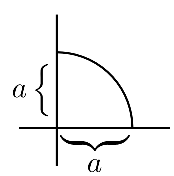
$$f(x) = x^2; \quad a = 0, b = 3$$

$$V(S_f) = 2\pi \int_0^3 x^2 \cdot x dx = 2\pi \frac{x^4}{4} \int_0^3$$

$$V(Sf) = \frac{81}{2}\pi.$$

2. La región acotada por el eje X , el eje Y y la curva $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ es rotada alrededor del eje Y. Encuentre el volumen del sólido generado.

Solución:



$$f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\begin{aligned} V(S_f) &= 2\pi \int_0^a x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ &= -\pi \int_0^a -2x\sqrt{a^2 - x^2} dx. \end{aligned}$$

Usando el cambio de variable:

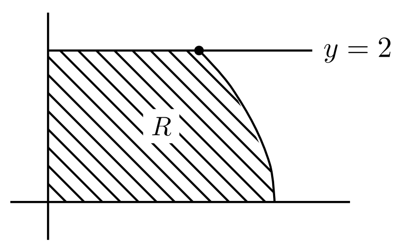
$$\begin{cases} u = a^2 - x^2 \\ du = -2xdx, \end{cases}$$

tenemos que el volumen es:

$$\begin{aligned} V(S_f) &= -\pi \int_{a^2}^{0} \sqrt{u}du \\ &= -\pi \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_{a^2}^{0} = \frac{\pi}{3} 2a^3 = \frac{2}{3}\pi a^3. \end{aligned}$$

3. La región R acotada por el eje X, el eje Y , la recta $y = 2$ y la parábola $x = 3 - \dfrac{1}{4}y^2$ es rotada alrededor del eje X. Encuentre el volumen generado.

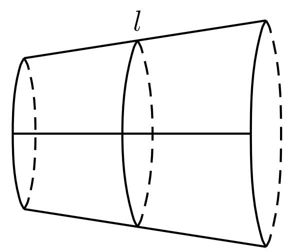
Solución:



$$\begin{aligned} V(S_f) &= 2\pi \int_0^2 y \cdot \left(3 - \frac{1}{4}y^2\right) dy = \\ &= 2\pi \int_0^2 \cdot \left(3y - \frac{1}{4}y^3\right) dy = \\ &= 2\pi \left(3\frac{y^2}{2} - \frac{1}{16}y^4\right) \Big|_0^2 \\ &= 2\pi(6 - 1) = 10\pi. \end{aligned}$$

7.3.3. Áreas de superficies de revolución

Vamos ahora a calcular el área del sólido de revolución S_f.

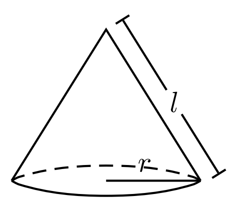


Consideremos el segmento que une $(t_{i-1}, f(t_{i-1}))$ y $(t_i, f(t_i))$ y lo hacemos rotar en torno del eje X.

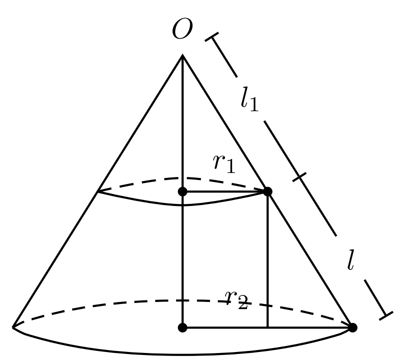
Al hacer esta rotación obtenemos un tronco de cono, cuya área es una aproximación del área de la superficie, S_f, entre los puntos $(t_{i-1}, f(t_{i-1}))$ y $(t_i, f(t_i))$. La arista del cono es

$$\mathcal{L} = \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2}.$$

Consideremos un cono de radio basal r y altura lateral l. Este cono tiene área $A_c = \pi \cdot r \cdot l$.



Consideremos un cono y dos cortes en r_1 y r_2 con altura l_1 y $l + l_1$. De acuerdo a nuestra fórmula el área del tronco del cono es $\pi(l + l_1)r_2 - \pi l_1 r_1$.



Como $\dfrac{l_1}{r_1} = \dfrac{l}{r_2 - r_1}$ entonces, $l_1 = \frac{lr_1}{r_2 - r_1}$. Por lo tanto, el área del tronco de cono es:

$$\begin{aligned}
\pi\Big(l + \frac{lr_1}{r_2 - r_1}\Big)r_2 - \pi l_1 r_1 &= \pi\Big(\frac{lr_2 - lr_1 + lr_1}{r_2 - r_1}\Big)r_2 - \pi\frac{lr_1}{r_2 - r_1}r_1 \\
&= \pi\frac{lr_2^2}{r_2 - r_1} - \frac{\pi l r_1^2}{r_2 - r_1} \\
&= \pi l\frac{(r_2 - r_1)(r_2 + r_1)}{r_2 - r_1} = \pi l(r_2 + r_1)
\end{aligned}$$

Así, aplicando lo anterior, obtenemos que el tronco de cono de radios $f(t_i)$ y $f(t_{i-1})$, tiene área

$$\begin{aligned}
\pi l(f(t_i) + f(t_{i-1})) &= \pi(f(t_i) + f(t_{i-1}))\sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2} \\
&= \pi(f(t_i) + f(t_{i-1}))\sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + f'(c_i)^2(t_i - t_{i-1})^2} \\
&= \pi(f(t_i) + f(t_{i-1}))\sqrt{1 + (f'(c_i))^2}(t_i - t_{i-1}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, una aproximación del área de S_f es

$$A = \sum_{i=1}^{n} \pi(f(t_i) + f(t_{i-1}))\sqrt{1 + (f'(c_i))^2}(t_i - t_{i-1}).$$

Podemos aproximar $f(c_i) = \dfrac{f(t_i) + f(t_{i-1})}{2}$, es decir,

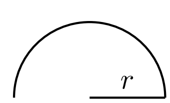
$$A \simeq \sum_{i=1}^{n} \pi 2 f(c_i)\sqrt{1 + (f'(c_i))^2}(t_i - t_{i-1}).$$

Por lo tanto, si $g(x) = 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ se tiene en el límite

$$A(S_f) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Ejemplo 7.3.8 Calcularemos el volumen y el área de una esfera de radio r.

Sea $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)$.



$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)dx = \pi \int_{-r}^{r} r^2 dx - \pi \int_{-r}^{r} x^2 dx \\
&= \pi r^2 x \Big|_{-r}^{r} - \pi \frac{x^3}{3}\Big|_{-r}^{r} \\
&= \pi(r^3 + r^3) - \frac{\pi}{3}(r^3 + r^3) = 2\pi r^3 - \frac{2\pi}{3} r^3 \\
&= \frac{6\pi r^3 - 2\pi r^3}{3} = \frac{4\pi}{3} r^3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}dx \\
&= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}dx = 2\pi \cdot r 2r = 4\pi r^2.
\end{aligned}$$

Ejercicios resueltos

1. *a*) Calcule el volumen de una esfera generada al girar el semicírculo $x^2 + y^2 = a^2$, en torno a su diámetro.

   b) Calcule el área de la superficie de la esfera considerada en (a).

   Solución:

   a) $V = \pi \cdot \displaystyle\int_a^b (f(x))^2 dx$

$$y^2 = a^2 - x^2, \;\; -a \leq x \leq a$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)dx = \pi \cdot \left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-a}^{a} \\
&= \pi \left[a^3 - \frac{a^3}{3} - (-a^3 + \frac{a^3}{3})\right] = \pi \left[2a^3 - \frac{2}{3}a^3\right].
\end{aligned}$$

Así, $\boxed{V = \frac{4}{3}\pi a^3}$.

b) Área $= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$

Como $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ entonces $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. Así,

$$f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2} = f(x) \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} = \sqrt{a^2 - x^2}\sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2}}.$$

Por lo tanto,

$$A = 2\pi \int_{-a}^{a} a dx = 4\pi a^2.$$

2. Encuentre el volumen del cono generado al rotar el triángulo formado por los segmentos de las rectas $y = \dfrac{x}{4}$ con $x \in [-4, 0]$, $x = -4$ y el eje X:

   a) en torno al eje X.

   b) en torno a la recta $x = -4$.

   Solución:

   a) En torno al eje X:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b (f(x))^2 dx = \pi \int_{-4}^{0} \frac{x^2}{16} dx \\ &= \frac{\pi}{16} \int_{-4}^{0} x^2 dx = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_{-4}^{0} = \frac{\pi}{16}\frac{64}{3} = \frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$

   b) En torno a la recta $x = -4$:

   Observemos que el volumen que se forma al rotar la curva $x = 4y$, $y \in [-1, 0]$ entorno a $x = -4$ es el mismo que se forma al rotar la función en torno a $x = 0$.

$$= \pi \int_a^b (f(y))^2 dy = \pi \int_{-1}^{0} 16y^2 dy = 16\pi \cdot \frac{y^3}{3}\Big|_{-1}^{0} = 16\pi\frac{1}{3} = \frac{16}{3}\pi.$$

3. Demuestre, usando integrales, que el volumen del cono truncado de radios r y R y altura h es $\dfrac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$.
   Solución:

   En primer lugar debemos determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(0, r)$ y (h, R).

$$y - r = \frac{R-r}{h}(x - 0) \iff y = \frac{R-r}{h}x + r.$$

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^v (f(x))^2 dx = \pi \int_0^h \left(\frac{R-r}{h}x + r\right)^2 dx \\
&= \pi \int_0^h \left(\left(\frac{R-r}{h}\right)^2 x^2 + 2r\frac{R-r}{h}x + r^2\right) dx = \\
&= \pi \left[\left(\frac{R-r}{h}\right)^2 \frac{x^3}{3} + \frac{R-r}{h}x^2 + r^2\right]_0^h = \\
&= \pi \left[\frac{(R-r)^2}{h^2}\frac{h^3}{3} + r(R-r)h + r^2 h\right] = \\
&= 6\ \pi \left[\frac{h}{3}(R^2 - 2rR + r^2) + Rrh - r^2 h + r^2 h\right] = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2).
\end{aligned}$$

4. Calcule el volumen del **paraboloide circular** generado al rotar el segmento de parábola $y = \sqrt{2x}$ con $x \in [0, 3]$ en torno al eje X.
   Solución:

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^3 (f(x))^2 dx = \pi \int_0^3 (2x) dx \\
&= \pi \cdot 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^3 = 9\pi.
\end{aligned}$$

5. Calcule el volumen del **paraboloide circular** generado al rotar el segmento de parábola $y = 2x^2$ con $x \in [0, 3]$ en torno al eje Y.

Solución:

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_a^b (f(y))^2 dy \\
x^2 &= \frac{y}{2} \iff x = \sqrt{\frac{y}{2}};\ y \in [0,18] \\
V &= \pi \int_0^{18} \left(\sqrt{\frac{y}{2}}\right)^2 dy = \pi \int_0^{18} \frac{y}{2} dy \\
&= \pi \cdot \frac{1}{2}\frac{y^2}{2}\Big|_0^{18} = \pi \cdot \frac{(2\cdot 9)^2}{2^2} = \pi \cdot 9^2 = 81\pi.
\end{aligned}$$

6. Demuestre que el volumen del **elipsoide circular** generado al rotar la semielipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ en torno al eje X es $\frac{4}{3}ab^2\pi$.

   a) Use coordenadas rectangulares.

   b) Use las ecuaciones paramétricas de la elipse:

$$\begin{cases} x = a\ \cos t \\ y = b\ \operatorname{sen} t\ ;\ t \in [0,\pi]. \end{cases}$$

Solución:

a)

$$b^2y^2 = a^2b^2 - b^2c^2 \iff y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2,\ x \in [-a,a].$$

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_a^b (f(x))^2 dx = \pi \int_{-a}^a (b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2) dx \\
&= \pi \left[b^2x - \frac{b^2}{a^2}\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^a = \pi \left[\left(b^2a - \frac{b^2}{a^2}\frac{a^3}{3}\right) - \left(b^2\ (-a) + \frac{b^2}{a^2}\frac{a^3}{3}\right)\right] \\
&= \pi \left[ab^2 - \frac{ab^3}{3} + ab^2 - \frac{ab^3}{3}\right] = \pi \frac{4ab^2}{3} = \frac{4}{3}ab^2\pi.
\end{aligned}$$

b) $\dfrac{dx}{dt} = -a \operatorname{sen} t$ lo que implica $dx = -a \operatorname{sen} t dt$.
Para calcular los límites de la integral en la variable t, observemos que: para

$t = 0,\ x(0) = a, \qquad$ para $t = \pi,\ x(\pi) = -a.$

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-a}^{a} (f(x))^2 \cdot dx \\
&= \pi \int_{\pi}^{0} b^2 \operatorname{sen}^2 t \cdot (-a \operatorname{sen} t) dt = -\pi a b^2 \int_{\pi}^{0} \operatorname{sen}^2 t (\operatorname{sen} t) dt \\
&= \pi a b^2 \int_{0}^{\pi} (1 - \cos^2 t) \operatorname{sen} t dt = -\pi a b^2 \cos t \Big|_0^{\pi} + \pi a b^2 \frac{\cos^3 t}{3} \Big|_0^{\pi} \\
&= 2\pi a b^2 - \frac{2}{3}\pi a b^2 = \frac{4}{3}\pi a b^2.
\end{aligned}$$

7. Calcule el volumen del **hiperboloide** generado al rotar el arco de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$, con $0 \leq x \leq 4$, $y \geq 0$, en torno al eje X.

   a) Use coordenadas rectangulares.

   b) Use las ecuaciones paramétricas de la hipérbola: $x = \cosh t$, $y = \operatorname{senh} t$.

Solución:

a)

$$y^2 = x^2 - 1,\ y \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad y = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Por lo tanto, el volumen pedido es:

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{1}^{4} (f(x))^2 dx = \pi \int_{1}^{4} (x^2 - 1) dx \\
&= \pi \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Bigg|_1^4 = \pi \left[\left(\frac{64}{3} - 4 \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \right] = \pi \left[\frac{52}{3} + \frac{2}{3} \right] = 18\pi.
\end{aligned}$$

b) Para $t = 0$, $x(0) = 1$, para $t = \operatorname{arccosh} 4 \iff t = \ln(4 + \sqrt{15})$. Ver subsección 3.6.

Luego el volumen pedido es:

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^{\ln(4+\sqrt{15})} (\operatorname{senh} t)^2 (\operatorname{senh} t) dt \\
&= \pi \int_0^{\ln(4+\sqrt{15})} (-1 + (\cosh t)^2) \operatorname{senh} t dt \\
&= \pi \int_0^{\ln(4+\sqrt{15})} -(\operatorname{senh} t) dt + \pi \int_0^{\ln(4+\sqrt{15})} (\cosh t)^2 \operatorname{senh} t dt \\
&= \pi(-(\cosh t))\Big|_0^{\ln(4+\sqrt{15})} + \pi \frac{(\cosh t)^3}{3}\Big|_0^{\ln(4+\sqrt{15})} \\
&= -\pi[4-1] + \frac{\pi}{3}[4^3 - 1] = -3\pi + 21\pi = 18\pi.
\end{aligned}$$

8. Calcule el volumen y el área de la superficie generada al girar el arco de $f(x)$ en torno al eje X.

   a) $f(x) = \operatorname{sen} x \ , \ x \in [0, \pi/4]$.
   b) $f(x) = \cos x \ , \ x \in [0, \pi/4]$.
   c) $f(x) = \exp x \ , \ x \in [0, 1]$.
   d) $f(x) = \cosh x \ , \ x \in [0, 1]$.

   Solución:

   a)
   $$V = \pi \int_0^{\pi/4} (\operatorname{sen}^2 x) dx = \pi \int_0^{\pi/4} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx.$$
   Haciendo el cambio de variable $u = 2x, \quad du = 2dx$ tenemos,
   $$\begin{aligned}
   V &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/4} dx - \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/4} \cos(2x) dx = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \cos u \cdot \frac{du}{2} \\
   &= \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi/2} \cos u du = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} u \int_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).
   \end{aligned}$$

   b)
   $$\begin{aligned}
   V &= \int_0^{\pi/4} \cos^2 x dx = \pi \int_0^{\pi/4} \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\pi/4} dx + \int_0^{\pi/4} \cos 2x dx \\
   &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} + 1\right).
   \end{aligned}$$

c)

$$V = \pi \int_0^1 e^{2x} dx.$$

Usando el cambio de variable: $v = 2x,\ dv = 2dx$, tenemos:

$$V = \pi \int_0^2 e^v \frac{dv}{2} = \frac{\pi}{2} \int_0^2 e^v dv = \frac{\pi}{2}[e^2 - 1].$$

d)

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (\cosh x)^2 dx = \pi \cdot \int_0^1 \frac{1 + \cosh 2x}{2} dx = \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 dx + \frac{\pi}{2} \int_0^1 \cosh\, 2x dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \int_0^2 \cosh v \frac{dv}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \operatorname{senh}\, v \Big|_0^2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \operatorname{senh}\, 2. \end{aligned}$$

9. Calcule el volumen generado por rotación de la región en el primer cuadrante acotada por las curvas : x^2 y $\sqrt{x}$.
Solución:

Sea V_1 el volumen generado por $y = \sqrt{x}$ y sea V_2 el volumen generado por $y = x^2$. entonces el volumen pedido es $V_1 - V_2$.

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^1 x dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{\pi}{2} \\ V_2 &= \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \frac{x^5}{5} = \frac{\pi}{5}. \\ V &= V_1 - V_2 = \frac{3\pi}{10}. \end{aligned}$$

7.4. Integrales elípticas e integración numérica

En esta sección sólo se pretende dar una idea muy general sobre las integrales elípticas y un esbozo de los métodos más elementales de integración numerica. El objetivo es que el estudiante sepa de dónde surgen y como deben ser tratadas estas integrales que aparecen de una aplicación muy básica de la integrales.

7.4.1. Integrales elípticas

En el capítulo 5 se muestran algunos métodos para calcular primitivas. Pero, existen funciones que siendo integrables no tienen una primitiva calculable explícitamente en términos de funciones elementales. Por ejemplo, las funciones $\dfrac{e^x}{x}$, e^{-x^2} entre otras son continuas, por lo tanto, integrables, pero sus integrales no pueden ser calculadas encontrando sus primitivas. Una familia de funciones que tienen esta particularidad son las que constituyen las **integrales elípticas**.

El nombre de **integral elíptica** surge del hecho de ellas aparecen cuando se quiere calcular la longitud de arco de una elipse. Veamos como.
Dada una elipse escrita en su forma canónica:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Calculemos la longitud de su perímetro usando la ecuación dada en el capítulo 7, sección 7.2. Al despejar y tenemos que:

$$y^2 = b^2\left(\frac{a^2 - x^2}{a^2}\right) \Leftrightarrow y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Derivando con respecto a x nos queda:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{b}{a}\frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}}(-2x) = \pm\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Luego, la longitud de la curva está determinada por:

$$\begin{aligned} l &= 4\int_0^a \sqrt{1 + \frac{b^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}\, dx = 4\int_0^a \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}\, dx \\ &= 4\int_0^a \sqrt{\frac{a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2}{(a^2 - x^2)}}\, dx \end{aligned}$$

Si hacemos $\kappa = \frac{\sqrt{|a^2-b^2|}}{a}$, entonces l queda determinada por:

$$l = 4\int_0^a \sqrt{\frac{a^2-\kappa^2x^2}{(a^2-x^2)}}\,dx$$

Ahora en $\displaystyle\int_0^a \sqrt{\frac{a^2-\kappa^2x^2}{(a^2-x^2)}}\,dx$ hacemos la sustitución trigonométrica:

$$\begin{cases} x &= a \text{ sen } \theta \\ dx &= a \cos\theta\, d\theta. \end{cases}$$

Luego,

$$a^2 - x^2 = a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2\theta = a^2\cos^2\theta$$

Notar que cuando $x = 0$ entonces $\theta = 0$ y cuando $x = a$ tenemos que $\operatorname{sen}\theta = 1$, por lo tanto, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Así,

$$\begin{aligned}
\int_0^a \sqrt{\frac{a^2-\kappa^2x^2}{(a^2-x^2)}}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{a^2-\kappa^2a^2\operatorname{sen}^2\theta}}{a\cos\theta}\cdot a\cos\theta\,d\theta \\
&= \sqrt{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\kappa^2\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta \\
&= a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\kappa^2\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta.
\end{aligned}$$

Definición 7.4.1 Llamaremos:

1. **Integral elíptica de primera clase** a una integral que se escribe como

$$\int_0^L \frac{dt}{\sqrt{1-\kappa^2\operatorname{sen}^2 t}} = F(\kappa, L).$$

2. **Integral elíptica de segunda clase** a una integral que tiene la forma

$$\int_0^L \sqrt{1-\kappa^2\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta = E(k, L).$$

3. **Integral elíptica de tercera clase** una integral que se escribe como

$$\int_0^L \frac{d\theta}{(1+n\operatorname{sen}^2\theta)\sqrt{1-\kappa^2\operatorname{sen}^2\theta}}$$

Para poder resolver estas integrales se necesitan a métodos numéricos.

Ejemplo 7.4.2 1. Exprese la longitud de una elipse cuyos semiejes son 2 y 3 usando sus ecuaciones paramétricas y clasífiquela c de que tipo de integral elíptica es. Obtenga alguna cota superior e inferior para la longitud de la elipse dada.

Solución: Las ecuaciones paramétricas de la elipse dada son:

$$\begin{cases} x(t) & = 2\cos t \\ y(t) & = 3\operatorname{sen} t\ ,\ t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{cases} x'(t) & = -2\operatorname{sen} t \\ y'(t) & = 3\cos t \\ (x')^2 + (y')^2 & = 4\operatorname{sen}^2 t + 9\cos^2 t = 4\operatorname{sen}^2 t + 9 - 9\operatorname{sen}^2 t = 9 - 5\operatorname{sen}^2 t. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{9 - 5\operatorname{sen}^2 t}dt = 3\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \frac{5}{9}\operatorname{sen}^2 t}dt = E(\frac{\sqrt{5}}{3}, 2\pi).$$

Es una integral elíptica de segunda clase. Como $9 - 5\operatorname{sen}^2 t \geq 9 - 5 = 4$ entonces, $l = \int_0^{2\pi} \sqrt{9 - 5\operatorname{sen}^2 t}dt \geq \int_0^{2\pi} \sqrt{4}dt = 4\pi$.Por otro lado, $\int_0^{2\pi} \sqrt{9 - 5\operatorname{sen}^2 t}dt \leq \int_0^{2\pi} \sqrt{9}dt = 6\pi$. Así, obtenemos que

$$4\pi \leq \text{ longitud de la elipse} \leq 6\pi.$$

2. Exprese la longitud de la sinusoide $y = A\operatorname{sen}(\omega x)$ en el intervalo $[0, T]$, donde T es el período, usando la notación para integrales elípticas.

Solución:

$$\begin{aligned} y' &= A\omega\cos(\omega x) \\ 1 + (y')^2 &= 1 + A^2\omega^2\cos^2(\omega x) = 1 + A^2\omega^2 - A^2w^2\operatorname{sen}(\omega x) = \\ &= (1 + A^2\omega^2)\left[1 - \frac{A^2\omega^2}{1 + A^2\omega^2}\operatorname{sen}^2(\omega x)\right]. \end{aligned}$$

La longitud pedida es:

$$l = \int_0^T \sqrt{1 + (y')^2}dx = \sqrt{1 + A^2\omega^2}\int_0^T \sqrt{1 - \frac{A^2\omega^2}{1 + A^2\omega^2}\operatorname{sen}^2(\omega x)}dx.$$

Llamando $\kappa^2 = \dfrac{A^2\omega^2}{1+A^2\omega^2}$, la integral que expresa la longitud de la sinusoide puede escribirse como:

$$l = \sqrt{1+A^2\omega^2}\int_0^T \sqrt{1-\kappa^2 \operatorname{sen}^2(\omega x)}dx.$$

Así vemos que la longitud de una sinusoide está dada por una integral eliptíca de segunda clase.

7.4.2. Dos métodos numéricos de integración

Muchas integrales , entre ellas las elipticas, sólo pueden ser aproximadas mediante métodos numéricos. A continuación mostraremos dos de ellos: la **Regla del trapecio** y la **Regla de Simpson**. La particularidad que tienen estos métodos es que permiten aproximar el valor de una integral definida sin conocer necesariamente todos los valores de $f(x)$.

Regla del trapecio

Este método permite aproximar una integral mediante una suma de Riemann muy particular, que consiste en particionar el intervalo de integración en una número finito de subintervalos que serán las bases de los trapecios de alturas $f(x_{i-1})$ y $f(x_i)$, como fue hecho en el problema resuelto $4b$ visto en la sección 6.2. Mostraremos un ejemplo que hemos sacado del trabajo de titulación de J.C.Guajardo y J.Urrea.

Ejemplo 7.4.3 En el Rally más importante de Chile, en donde compiten parejas de todo el mundo, los representantes locales, el piloto John Urrea y el copiloto Juan Carlos Guajardo han ganado la primera etapa con un tiempo de 1 hora y 15 minutos.

La siguiente tabla muestra las distintas velocidades que alcanzaron estos competidores:

Tiempo[s]	Velocidad[m/s]
0	26,39
900	30,55
1800	12,50
2700	22,22
3600	45,83

¿Cuál fue la distancia aproximada que cubrieron en la primera etapa todos los participantes del Rally?

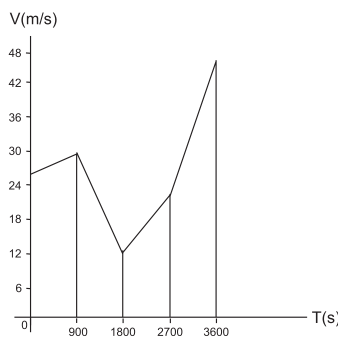


Figura 7.16: Gráfico de Datos

Solución: En primer lugar, ubicaremos en un gráfico (ver Figura 7.16) los seis puntos correspondientes a los datos entregados. Luego, surgen dos importantes interrogantes; ¿cómo unir de manera razonable estos seis puntos? y ¿cómo calcular el área de la región resultante? Respecto a la primera pregunta, la forma más elemental de unir estos puntos es por medio de segmentos de recta. De esta manera, se puede observar que en la región limitada por la gráfica y el eje X en el intervalo [0,4500] se tienen cinco trapecios. Así, teniendo en cuenta la segunda pregunta, el área de la región resultante será la suma de las áreas de cada trapecio. Recordemos que el área de un trapecio de base b y de lados paralelos h_1 y h_2 está dada por:

$$\left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right) b$$

Por lo tanto, el área total que queremos calcular, es decir, la distancia aproximada que cubrieron en la primera etapa los participantes del Rally es:

$$\begin{aligned}
A_T &= \frac{f(0)+f(900)}{2}900 + \frac{f(900)+f(1800)}{2}900 + \frac{f(1800)+f(2700)}{2}900 \\
&\quad + \frac{f(2700)+f(3600)}{2}900 \\
&= [f(0)+2f(900)+2f(1800)+2f(2700)+f(3600)]450 \\
&= (26,39 + 2\cdot 30,55 + 2\cdot 12,50 + 2\cdot 22,22 + 45,83)450 \\
&= 202,76\cdot 450 \\
&= 91242
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la distancia recorrida por los competidores en la primera etapa del Rally fue de 91242 metros.

Regla de Simpson

Este método emplea segmentos parabólicos en lugar de segmentos de recta. Igual que antes, particionamos nuestro intervalo $[a,b]$ en n subintervalos de igual longitud, o sea, $\triangle x = (b-a)/n$; y donde esta vez n es un número par. Entonces, conectamos cada conjunto de tres puntos consecutivos aproximando la curva $y=f(x)\geq 0$ por medio de un polinomio cuadrático, y como ya sabemos, los polinomios son fáciles de integrar. Si $y_i = f(x_i)$, entonces $P_i(x_i,y_i)$ es el punto de la curva que está sobre x_i.

Con motivo de simplificar nuestros cálculos, analizaremos el caso en que $x_0 = -\triangle x$, $x_1 = 0$ y $x_2 = \triangle x$, ver Figura 7.17.

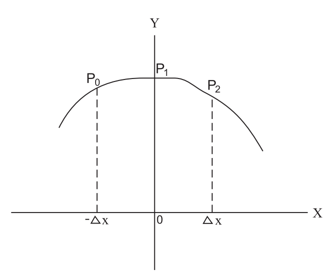


Figura 7.17: Regla de Simpson

La ecuación de la parábola que pasa por los puntos P_0, P_1 y P_2 es de la forma $y = Ax^2+Bx+C$; entonces el área bajo la parábola que va desde $x_0 = -\triangle x$ hasta $x_2 = \triangle x$ es:

$$\begin{aligned}
\int_{-\triangle x}^{\triangle x}(Ax^2+Bx+C)dx &= A\frac{x^3}{3}\Big|_{-\triangle x}^{\triangle x}+B\frac{x^2}{2}\Big|_{-\triangle x}^{\triangle x}+Cx\Big|_{-\triangle x}^{\triangle x}\\
&= A\frac{(\triangle x)^3}{3}-A\frac{(-\triangle x)^3}{3}+B\frac{(\triangle x)^2}{2}-B\frac{(-\triangle x)^2}{2}\\
&\quad +C(\triangle x)-C(-\triangle x)\\
&= A\frac{(\triangle x)^3}{3}+A\frac{(\triangle x)^3}{3}+B\frac{(\triangle x)^2}{2}-B\frac{(\triangle x)^2}{2}\\
&\quad +C(\triangle x)+C(\triangle x)\\
&= 2A\frac{(\triangle x)^3}{3}+2C(\triangle x)\\
&= \frac{\triangle x}{3}(A(\triangle x)^2+6C)
\end{aligned}$$

Ahora, como la parábola pasa por $P_0(-\triangle x, y_0)$, $P_1(0, y_1)$ y $P_2(\triangle x, y_2)$, tenemos:

$$\begin{aligned}
y_0 &= A(-\triangle x)^2+B(-\triangle x)+C=A(\triangle x)^2-B(\triangle x)+C\\
y_1 &= C\\
y_2 &= A(\triangle x)^2+B(\triangle x)+C
\end{aligned}$$

Luego:

$$y_0+4y_1+y_2=2A(\triangle x)^2+6C$$

De esta forma, podemos expresar el área bajo la parábola de la siguiente manera:

$$\frac{\triangle x}{3}(y_0+4y_1+y_2)$$

Como podemos observar, el área bajo la parábola que pasa por los puntos P_0, P_1 y P_2, desde $x = x_0$ hasta $x = x_2$ no cambia si ésta la desplazamos en sentido horizontal. De esta forma, el área bajo la parábola que pasa por los puntos P_2, P_3 y P_4, desde $x = x_2$ hasta $x = x_4$ está dada por:

$$\frac{\triangle x}{3}(y_2+4y_3+y_4)$$

De este modo, si calculamos las áreas bajo todas las parábolas y sumamos los resultados, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &\approx \frac{\triangle x}{3}(y_0+4y_1+y_2)+\frac{\triangle x}{3}(y_2+4y_3+y_4)+\ldots \\
&\quad +\frac{\triangle x}{3}(y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n) \\
&= \frac{\triangle x}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+\ldots+2y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n)
\end{aligned}$$

Esta es una aproximación confiable para cualquier función continua.

Ejemplo 7.4.4 Resolveremos el mismo problema del ejemplo anterior 7.4.3 usando la regla de Simpson. Utilizando $n=4$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{3600} f(x)dx &\approx \frac{3600-0}{3\cdot 4}\left[f(0)+4f(900)+2f(1800)+4f(2700)+f(3600)\right] \\
&= \frac{3600}{12}(26,39+4\cdot 30,55+2\cdot 15,50+4\cdot 22,22+45,36) \\
&= 300(26,39+122,2+31+88,88+45,36) \\
&= 300\cdot 513,83 \\
&= 154149
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la distancia recorrida por los competidores en la primera etapa del Rally fue de 154149 metros.

Observación 7.4.5 Por lo general, la regla de Simpson es más precisa que la regla del Trapecio. Esto se debe a que la primera calcula el área debajo de parábolas aproximantes y la última calcula el área debajo de rectas aproximantes. Es más, la regla de Simpson proporciona valores exactos de integrales para cualquier polinomio de grado 3 o menor.

A continuación enunciaremos un teorema que permite aproximar integrales controlando el error que se comete.

Teorema 7.4.6 Si f tiene derivadas continuas hasta el cuarto orden , entonces existe $\mu \in (a,b)$ tal que la regla de Simpson con $n=2m$ subintervalos de $[a,b]$ aproxima la integral I madiante la relación:

$$I=\int_a^b f(x)\,dx \approx I_S=\frac{h}{3}\left[f(a)+2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2j})+4\sum_{j=1}^{m} f(x_{2j-1})+f(b)\right],$$

donde , $a = x_0 < x_1 < ... < x_{2m} = b$, $h = \dfrac{(b-a)}{2m}$ y $x_j = x_0 + h$ para cada $j = 0, 1, ..., 2m$. Con un error igual a

$$I - \int_a^b f = \frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{iv}(\mu).$$

Observación 7.4.7 El teorema 7.4.6 permite acotar el error:

$$|I_S - \int_a^b f| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} K,$$

donde K es una cota de $|f^{IV}(x)|$ para $x \in [a, b]$.
La demostración de este teorema puede verse en [**?**]

Ejercicios resueltos

1. Utilizando la fórmula de Simpson, calcular la integral elíptica 7.7 del problema 6 del capítulo 7 con un error menor o igual que $\varepsilon = 0,21$.

   Solución: En este caso tenemos ,

$$L = \int_0^{4\pi} \sqrt{\frac{1}{4}\cos^2\frac{\theta}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta = \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{4\pi} \sqrt{1 + 3\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta}_{I}, \quad \text{con } a = 0, b = 4\pi.$$

   Calcularemos el valor aproximado de I para luego al multiplicar este valor por $\frac{1}{2}$ y así obtener el valor aproximado de la integral L pedida.
   Tenemos entonces que en el intervalo de integración, $[0, 4\pi]$, de I el integrando $f(\theta) = \sqrt{1 + 3\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}$ admite derivada cuarta continua (esta derivada es muy extensa por lo que se recomienda calcularla con un software matemático). Veamos el gráfico, de $|f^{IV}(\theta)|$ en la Figura 7.18.

   Según el gráfico se puede ver claramente que f^{IV} está acotada en $[0, 4\pi]$ y que una de sus cotas es $K = 2{,}5$, por lo tanto el número n de partes en el que hay que dividir el intervalo $[0, 4\pi]$, para así garantizar un error menor o igual que $\varepsilon = 0,21$ es tal que:

$$\frac{(b-a)^5}{180n^4} K \leq \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \frac{(4\pi)^5}{180n^4} 2{,}5 \leq\; 0{,}21$$

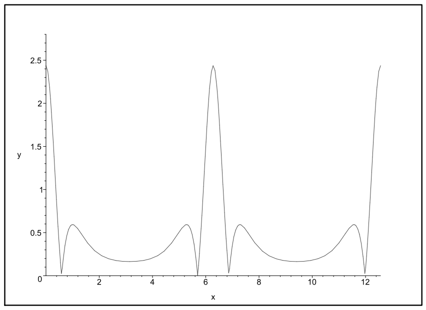


Figura 7.18: Gráfico de $|f^{IV}(\theta)|$

O sea,

$$n^4 \geq \frac{(4\pi)^5}{180 \cdot 0{,}21}\, 2{,}5$$

Es decir, debemos tomar $n \geq 11{,}99\ldots$, luego escogemos $n = 12$.

Luego,

$$h = \frac{4\pi - 0}{12} = \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$$

Ahora encontremos el valor de:

$$\sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2j}) = \sum_{j=1}^{5} f(x_{2j})$$

Calculemos los x_{2j} para $j \in \{1, ..., 5\}$

$$\begin{aligned}
x_2 &= x_0 + 2h = 0 + 2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi; \quad x_4 = 4h = 4 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi \\
x_6 &= 6h = 6 \cdot \frac{\pi}{3} = 2\pi; \quad x_8 = 8h = 8 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{8}{3}\pi \\
x_{10} &= 10h = 10 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{10}{3}\pi
\end{aligned}$$

Entonces;

$$
\begin{aligned}
f(x_2) &= f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \sqrt{1 + 3\,\mathrm{sen}^2\,\frac{\pi}{3}} = \sqrt{1 + 3 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2} \\
f(x_4) &= f\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \sqrt{1 + 3\,\mathrm{sen}^2\,\frac{2}{3}\pi} = \sqrt{1 + 3 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2} \\
f(x_6) &= f(2\pi) = 1 \\
f(x_8) &= f\left(\frac{8}{3}\pi\right) = \sqrt{1 + 3\,\mathrm{sen}^2\,\frac{4}{3}\pi} = \sqrt{1 + 3 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2} \\
f(x_{10}) &= f\left(\frac{10}{3}\pi\right) = \sqrt{1 + 3\,\mathrm{sen}^2\,\frac{5}{3}\pi} = \sqrt{1 + 3 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{5} f(x_{2j}) &= f\left(\frac{2}{3}\pi\right) + f\left(\frac{4}{3}\pi\right) + f(2\pi) + f\left(\frac{8}{3}\pi\right) + f\left(\frac{10}{3}\pi\right) \\
&= \frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \\
&= 1 + 2\sqrt{13}
\end{aligned}
$$

Ahora, para encontrar el valor de $\sum_{j=1}^{m} f(x_{2j-1}) = \sum_{j=1}^{6} f(x_{2j-1})$ buscamos el valor de x_{2j-1} para todo $j \in \{1, ..., 6\}$.

$$
\begin{aligned}
&x_1 = x_0 + h = 0 + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}; \quad x_3 = 3h = 3 \cdot \frac{\pi}{3} = \pi \\
&x_5 = 5h = 5 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi; \quad x_7 = 7h = 7 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{7}{3}\pi \\
&x_9 = 9h = 9 \cdot \frac{\pi}{3} = 3\pi; \quad x_{11} = 11h = 11 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{11}{3}\pi
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{1+3\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{6}} = \sqrt{1+3\cdot\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}\\
f(x_3) &= f(\pi) = \sqrt{1+3\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{2}} = \sqrt{1+3\cdot 1} = 2\\
f(x_5) &= f\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \sqrt{1+3\operatorname{sen}^2\frac{5\pi}{6}} = \sqrt{1+3\cdot\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}\\
f(x_7) &= f\left(\frac{7}{3}\pi\right) = \sqrt{1+3\operatorname{sen}^2\frac{7\pi}{6}} = \sqrt{1+3\cdot\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}\\
f(x_9) &= f(3\pi) = \sqrt{1+3\operatorname{sen}^2\frac{3\pi}{2}} = \sqrt{1+3\cdot 1} = 2\\
f(x_{11}) &= f\left(\frac{11}{3}\pi\right) = \sqrt{1+3\operatorname{sen}^2\frac{11\pi}{6}} = \sqrt{1+3\cdot\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{6} f(x_{2j-1}) &= f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f(\pi) + f\left(\frac{5}{3}\pi\right) + f\left(\frac{7}{3}\pi\right) + f(3\pi) + f\left(\frac{11}{3}\pi\right)\\
&= \frac{\sqrt{7}}{2} + 2 + \frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} + 2 + \frac{\sqrt{7}}{2}\\
&= 4 + 2\sqrt{7}
\end{aligned}$$

Además, $f(a) = f(0) = 1$ y $f(b) = f(4\pi) = 1$

Reemplazando en la fórmula tenemos:

$$I = \frac{\pi}{9}\left[1 + 2(1+2\sqrt{13}) + 4(4+2\sqrt{7}) + 1\right] \approx 19{,}4039$$

Luego, $\frac{1}{2}\cdot I = 9{,}7019\ldots$ que es una buena aproximación para la integral L pedida.

Ejercicios propuestos

1. Exprese la longitud de la curva llamada **trocoide** dada por:

$$\begin{aligned}
x(t) &= at - b\operatorname{sen} t\\
y(t) &= a - b\cos t \ , \ t \in [0, L],
\end{aligned}$$

en términos de una integral elíptica de segunda clase.

2. La longitud de arco de una hipérbola puede expresarse en términos de integrales elípticas de primera y segunda clase. Ver A.Blank: Problemas de Cálculo y Análisis Matemático. Limusa-Wiley, 1971., pág. 201.

Índice alfabético